Bacalaureat 2000
Profilurile: matematica-fizica, informatica, metrologie
Sesiunea iunie

Subiectul I

1. Se considera polinomul cu coeficienti reali $f = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$
   a) (3 p.) Sa se calculeze f(1);
   b) (3 p.) Sa se determine catul si restul impartirii lui f la $X - 1$;
   c) (4 p.) Sa se rezolve ecuatia $f(x) = 0$.
2. (5 p.) Sa se rezolve ecuatia:
   $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0,\ x > 0$.
3. (10 p.) Sa se determine $x \in$ **R** astfel incat $\int_0^x (3t^2 - 4t - 5)dt + 6 = 0$.
4. In sistemul cartezian de coordonate xOy se considera dreptele de ecuatii:
   $d_1 : 3x - 2y = 0,\ d_2 : x + 3y - 11 = 0,\ d_3 : 2x - 3y + 5 = 0$.
   a) (3 p.) Sa se determine punctul de intersectie al dreptelor d_1 si d_2;
   b) (4 p.) Sa se arate ca dreptele d_1, d_2, d_3 sunt concurente;
   c) (3 p.) Sa se scrie ecuatia cercului de centru O(0, 0) care trece prin punctul de concurenta al celor trei drepte.

Subiectul II

1. Se considera polinomul $f = X^3 - X^2 + aX - 1, a \in$ **R**. Pentru $n \in$ **N*** notam $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, unde $x_1, x_2, x_3 \in$ **C** sunt radacinile polinomului f.
   a) (6 p.) Sa se arate ca $S_3 - S_2 + aS_1 - 3 = 0$
   b) (6 p.) Sa se determine $a \in$ **R** astfel incat $S_3 = 1$

2. Pentru orice $x \in [0,1)$ se defineste suma:
   $S_n(x) = \sqrt{1-x} + x\sqrt{1-x} + ... + x^{n-1}\sqrt{1-x},\ \forall n \in$ **N***
   a) (4 p.) Sa se arate ca pentru orice $n \in$ **N***, avem:
   $$S_n(x) = \sqrt{1-x} \cdot \frac{1-x^n}{1-x},\ x \in [0,1)$$
   b) (4 p.) Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$.
   c) (5 p.) Sa se calculeze $\int_0^1 \sqrt{1-x}dx$.

Subiectul III

In $M_2(\mathbf{R})$, multimea matricelor patratice de odin 2 peste **R**, se considera matricea:

$$X(a)=\begin{pmatrix}1+5a & 10a\\ -2a & 1-4a\end{pmatrix}, a\in \mathbf{R}$$

a) (3 p.) Sa se calaculeze determinantul matricei X(a);

b) (3 p.) Sa se arate ca pentru orice $a,b\in \mathbf{R}$ avem:
$X(a)\cdot X(b)=X(ab+a+b)$.

Se considera multimea $G=\{X(a) | a\in(-1,\infty)\}$

c) (3 p.) Sa se demonstreze ca G este o parte stabila a lui $M_2(\mathbf{R})$ in raport cu operatia de inmultire a matricelor;

d) (2 p.) Sa se determine $(X(1))^2$.

e) (4 p.) Sa se demonstreze, utilizand metoda inductiei matematice, ca pentru orice $n\in \mathbf{N}^*$, avem $(X(1))^n=X(2^n-1)$.

Subiectul IV

Se considera functia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$

a) (3 p.) Sa se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^4}$

b) (6 p.) Sa se determine f' si f''.

c) (2 p.) Sa se arate ca $f'(x)>0, \forall x\in(0,\infty)$ si $f'(x)<0, \forall x\in(-\infty,0)$

d) (2 p.) Sa se demonstreze ca pentru orice $x\in\mathbf{R}, f(x)\geq 0$.

e) (2 p.) Pentru functia $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, g(x)=\cos x$, sa se arate ca aria suprafetei plane limitate de graficul functiei, axa Ox si dreptele de ecuatii x=0, x=1, este mai mare decat $\frac{5}{6}$.

Nota. Se acorda din oficiu 10 p.