Bac 2001
Varianta 4
Profil: mate-fizica, informatica, metrologie

Subiectul I (30 p)

1. Se considera polinomul $f = X^3 - X + 3$ cu radacinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ si polinomul $g = X^2 + X + 1$ cu radacinile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.
   a) (4p) Sa se determine catul si restul impartirii polinomului f la polinomul g.
   b) (2p) Sa se verifice ca $y_1^3 = y_2^3 = 1$.
   c) (2p) Sa se arate ca numarul $a = f(y_1) + f(y_2)$ este natural.
   d) (2p) Sa se calculeze $b = g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)$.
2. Se considera functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
   a) (4p) Sa se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.
   b) (2p) Sa se determine asimptotele la graficul functiei f.
   c) (4p) Sa se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$
3. In sistemul cartezian de coordonate xOy se considera punctele A(3,0), B(0,4) si C(3,4).
   a) (3p) Sa se determine aria triunghiului ABC.
   b) (4p) Sa se calculeze perimetrul triunghiului ABC.
   c) (3p) Sa se demonstreze ca triunghiul ABC este dreptunghic.

Subiectul II (20 p)

1. Se considera binomul $a = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^{100}$
   a) (3p) Sa se determine numarul de termeni rationali din dezvoltarea binomului. Notam cu S suma termenilor rationali si cu T suma termenilor irationali ai binomului.
   b) (1p) Sa se arate ca $S - T = \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^{100}$.
   c) (3p) Sa se arate ca $S > T$.
   d) (3p) Sa se arate ca $S - T < \frac{1}{3^{100}}$
2. Se considera functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita prin $f(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$
   a) (4p) Sa se arate ca $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
   b) (4p) Sa se cacluleze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.
   c) (2p) Sa se calculeze $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

Subiectul III (20 p)

Se considera matricele:

$$X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -2\end{pmatrix}, I_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \text{ si}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\1&2&-1&-2\\1&2&-1&-2\\1&2&-1&-2\end{pmatrix}$$

Definim $B=aA+I_4, a\in\mathbb{R}$.

a) (4p) Sa se calculeze matricea $A-XY$.
b) (4p) Sa se calculeze determinantul si rangul matricei A.
c) (3p) Sa se calculeze A^2
d) (3p) Sa se verifice ca $2B-B^2=I_4$.
e) (3p) Sa se arate ca B este inversabila, $\forall a\in\mathbb{R}$ si sa se calculeze inversa sa.
f) (3p) Sa se demonstreze, utilizand metoda inductiei matematice, ca $B^n=I_4+naA, \forall n\in\mathbb{N}^*, \forall a\in\mathbb{R}$.

Subiectul IV (20 p)

Se considera numarul real $a\in(0;1)$ si sirurile $(x_n)_{n\geq1}, (I_n)_{n\geq1}$ cu termenii generali:

$$x_n=a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}+...+(-1)^{n-1}\frac{a^{2n-1}}{2n-1},\ I_n=\int_0^a\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

a) (4p) Sa se demonstreze identitatea:

$$1-x^2+x^4+...+(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1+(-1)^{n-1}x^{2n}}{1+x^2}, \forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}$$

b) (4p) Integrand egalitatea de la punctul a), sa se arate ca:
$x_n=\operatorname{arctg}a+(-1)^{n-1}I_n, \forall n\in\mathbb{N}^*, a\in(0;1]$.

c) (4p) Sa se arate ca $0\leq\frac{x^{2n}}{1+x^2}\leq x^{2n}, \forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

d) (4p) Sa se arate ca $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$ si $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\operatorname{arctg}a$.

e) (4p) Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}+...+\frac{(-1)^n\cdot4}{2n+1}\right)$

Indicatii (la exercitiile ceva mai dificile)

Subiectul I

1c) Avem $a=f(y_1)+f(y_2)=y_1^3-y_1+3+y_2^3-y_2+3=8-(y_1+y_2)$

Conform relatiilor lui Viete, $y_1+y_2=-1\Rightarrow a=9\in\mathbb{N}$.

1d) Calculam:

$$b=\sum_{k=1}^{3}\left(x_k^2+x_k+1\right)=3+\sum_{k=1}^{3}x_k+\sum_{k=1}^{3}x_k^2$$

Dar $\sum_{k=1}^{3}x_k=0$; $\sum_{1\le i<j\le 3}x_ix_j=-1$ (relatiile Viete). Se calculeaza:

$\sum_{k=1}^{3}x_k^2=\left(\sum_{k=1}^{3}x_k\right)^2-2\sum_{1\le i<j\le 3}x_ix_j=0+2=2$. Rezulta $b=3+0+2=5$.

Subiectul II

1abcd) Termenii impari din dezvoltare sunt rationali, iar cei pari sunt irationali. Dezvoltarea $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^{100}$ are aceiasi termeni cu cea initiala, dar termenii irationali apar cu semnul minus. Cum $S-T=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^{100}>0\Rightarrow S>T$.

Pe de alta parte, $\sqrt{3}-\sqrt{2}<\frac{1}{3}\Rightarrow\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{100}<\frac{1}{3^{100}}\Rightarrow S-T<\frac{1}{3^{100}}$.

2a) $f(-x)=\int_0^{-x}e^{t^2}dt$. Se efectueaza substitutia $u=-t$ si rezulta:

$$f(-x)=\int_0^{x}e^{(-u)^2}(-du)=-\int_0^{x}e^{u^2}du=-f(x)$$

2b) Functia de sub semnul integral este continua pe **R**, deci admite o primitiva pe care o vom nota cu $\Phi(t)$. Conform formulei Leibniz-Newton, avem:

$$f(x)=\Phi(x)-\Phi(0)\Rightarrow f'(x)=\Phi'(x)=e^{x^2},x\in\mathbb{R}.$$

2c) Intr-o vecinatate V a lui $+\infty$ avem:

$$e^{t^2}>e^t,\forall t\in V\Rightarrow\int_0^x e^{t^2}dt>\int_0^x e^tdt\Rightarrow f(x)>e^t\Big|_0^x=e^x-1$$

Rezulta $\lim_{x\to\infty}f(x)\ge\lim_{x\to\infty}\left(e^x-1\right)=\infty\Rightarrow\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

Subiectul III

e) Egalitatea de la punctul d) se poate scrie sub forma $B\left(2I_4-B\right)=I_4\Rightarrow\det(B)\ne 0\Rightarrow B$ nesingulara $\Rightarrow B$ inversabila. Inversa este $B^{-1}=2I_4-B$.

Subiectul IV

a) Suma din membrul stang este suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice de ratie $q=-x^2$, cu termenul initial $b_1=1$.

Rezulta $S_n=\frac{1-\left(-x^2\right)^n}{1+x^2}=\frac{1-(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}=\frac{1+(-1)^{n-1}}{1+x^2}$

b) Se face integrarea intre 0 si a.

c) Prima inegalitate este evidenta; a doua rezulta imediat din $x^2 \geq 0 \Rightarrow 1+x^2 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq x^{2n}$

d) Se integreaza intre 0 si a dubla inegalitate de la punctul c):

$$0 \leq \int_0^a \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx \leq \int_0^a x^{2n}\,dx \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{a^{2n+1}}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Trecand la limita in aceasta inegalitate (criteriul clestelui), rezulta $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$. Conform punctului b), rezulta $\lim_{n\to\infty} x_n = \operatorname{arctg} a$

e) Avem de calculat:

$$L = 4\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right).$$

In paranteza, avem expresia sirului x_{n+1} pentru $a=1$. Conform celor demonstrate anterior, avem $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = \operatorname{arctg} 1 = \frac{p}{4} \Rightarrow L = p$.