Bacalaureat 2002
Profil: real (matematica-fizica, informatica)

Subiectul I (30 p)

1. Se considera functia $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(x)=x^2+2x$
   a) (4p) Sa se verifice ca $f(x)=(x+1)^2-1, \forall x\in\mathbb{C}$
   b) (4p) Sa se rezolve in **R** ecuatia $(f\circ f)(x)=0$
   c) (2p) Utilizand metoda inductiei matematice, sa se arate ca $\underbrace{(f\circ f\circ ...\circ f)}_{n \text{ ori}}(x)=(x+1)^{2^n}-1, \forall x\in\mathbb{C}$.
2. Se considera functia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(x^2+1)$.
   a) (4p) Sa se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$
   b) (3p) Sa se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$
   c) (3p) Sa se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.
3. In sistemul cartezian de coordonate xOy se considera punctele $A(n,-n), \forall n\in\mathbb{N}$.
   a) (3p) Sa se scrie ecuatia dreptei A_0A_1.
   b) (4p) Sa se arate ca lungimea segmentului A_nA_{n+1} nu depinde de $n, \forall n\in\mathbb{N}$.
   c) (3p) Sa se arate ca punctul A_n se afla pe dreapta $A_0A_1, \forall n\in\mathbb{N}$.

Subiectul II (20 p)

1. Se considera sistemul: $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x-2y+3z=0 \\ x-3y+5z=0 \end{cases}$, unde $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Notam cu A matricea sistemului.
   a) (5p) Sa se calculeze determinantul si rangul matricei A.
   b) (3p) Sa se rezolve sistemul.
   c) (2p) Sa se gaseasca o solutie (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0+2y_0+3z_0=8$.

2. Se considera sirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Admitem cunoscut ca $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{p^2}{6}$ si consideram sirurile $(b_n)_{n\geq 1}$ si $(c_n)_{n\geq 1}$ definite prin $b_n = a_n + \frac{1}{n}, c_n = a_n + \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) (3p) Sa se arate ca sirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescator.

b) (3p) Sa se arate ca sirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este strict crescator.

c) (2p) Sa se arate ca $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{p^2}{6}$.

d) (2p) Sa se arate ca $\lim_{n\to\infty} n\left(a_n - \frac{p^2}{6}\right) = -1$.

Subiectul III (20 p)

Pentru orice numar natural nenul n, se considera multimea de numere rationale $H_n = \left\{\frac{k}{n!} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

a) (4p) Sa se arate ca, daca $x, y \in H_n$, atunci $x + y \in H_n$.

b) (4p) Sa se verifice ca, daca $x \in H_n$, atunci $-x \in H_n$.

c) (4p) Sa se arate ca, daca $n < p \in \mathbb{N}^*$, atunci $H_n \subset H_p$.

d) (2p) Sa se arate ca pentru orice numar rational r, exista $n \in \mathbb{N}^*$ astfel incat $r \in H_n$.

e) (4p) Sa se arate ca daca $(G, +)$ este subgrup al grupului $(\mathbb{Q}, +)$ si $\frac{1}{n!} \in G, n \in \mathbb{N}^*$, atunci $H_n \subset G$.

f) (2p) Sa se demonstreze ca, daca $G_1, ..., G_{2002}$ sunt subgrupuri ale grupului $(\mathbb{Q}, +)$ si $\mathbb{Q} = G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_{2002}$, atunci exista $i \in \{1, 2, ..., 2002\}$ astfel incat $G_i = \mathbb{Q}$.

Subiectul IV (20 p)

Se considera numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n$ si functiile $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + ... + a_n \sin nx$

$F(x) = -a_1 \cos x - \frac{a_2}{2} \cos 2x - ... - \frac{a_n}{n} \cos nx, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

a) (4p) Sa se arate ca functia F este o primitiva a functiei f pe **R**.

b) (4p) Sa se verifice ca $F(x + 2kp) = F(x), \forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) (2p) Utilizand rezultatul: “Daca o functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este periodica si monotona atunci este constanta”, sa se arate ca daca $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, atunci functia F este constanta.

d) (4p) Sa se arate ca daca functia F este constanta, atunci $f(x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$.

e) (4p) Notam cu $S(p,q)=\int_0^{2p} \sin px \sin qx \, dx, \forall p,q \in \mathbb{N}^*$. Utilizand formula $2\sin a \sin b = \cos(a-b)-\cos(a+b), \forall a,b \in \mathbb{R}$, sa se arate ca:

$$S(p,q)=\begin{cases} 0, & \text{daca } p \neq q \\ p, & \text{daca } p = q \end{cases}, \forall p,q \in \mathbb{N}^*$$

f) (4p) Sa se demonstreze ca daca $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, atunci $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.