Bacalaureat 2003
Profil: Matematica-Informatica

Se considera sirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n = \frac{1}{2^{1^2}} + \frac{1}{2^{2^2}} + \frac{1}{2^{3^2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n^2}}$ si $b_n = a_n + \frac{1}{2n\cdot 2^{n^2}}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

1. Multimea $\{n\in\mathbb{N}^* \mid a_n < a_{n+1}\}$ este:
   a) Formata dintr-un singur element;
   b) $\mathbb{N}^*$
   c) $\varnothing$
   d) Finita, avand cel putin doua elemente.

2. Multimea $\{n\in\mathbb{N}^* \mid b_n > b_{n+1}\}$ este:
   a) $\mathbb{N}^*$
   b) Finita, avand cel putin doua elemente;
   c) Formata dintr-un singur element;
   d) $\varnothing$

3. Stiind ca sirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt convergente, notam cu $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ si $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Atunci $a-b$ este:
   a) 0,5
   b) 0
   c) 0,25
   d) 1

4. Numarul $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ apartine multimii:
   a) $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$
   b) $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$
   c) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
   d) $\mathbb{N}$

In sistemul cartezian de coordonate xOy se considera punctele $A_n(n, n^2), n\in\mathbb{N}$

5. Panta dreptei A_0A_1 este:
   a) 2
   b) 1
   c) –2
   d) -1

6. Ecuatia dreptei A_0A_1 este:

a) $y = x^2$
b) $y = x$
c) $x^2 + y = 0$
d) $x + y = 0$

7. Lungimea segmentului A_1A_2 este:
   a) 10
   b) $\sqrt{10}$
   c) 3
   d) 4

8. Aria triunghiului $A_nA_{n+1}A_{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$ este:
   a) 2
   b) n
   c) 1
   d) $n+1$

9. Numarul dreptelor care trec prin cate 2 puncte din multimea $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ este:
   a) 9
   b) 8
   c) 10
   d) 20

10. Cate triunghiuri au varfurile in multimea $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$?
   a) 15
   b) 5
   c) 20
   d) 10

Se considera functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$. Notam prin $f^{(n)}(x)$ derivata de ordinul n a functiei f, luata in punctul x.

11. Care dintre numerele urmatoare este perioada pentru functia f?
   a) π
   b) $\frac{\pi}{2}$
   c) 2π
   d) 3π

12. Cate puncte de maxim local are functia f in intervalul $[0, 11\pi]$?
   a) 11

b) 5
c) 6
d) 10

13. Aria suprafetei plane cuprinse intre graficul functiei f, axa Ox si dreptele de ecuatii $x=0$ si $x=2\pi$ este:
a) 0
b) 2
c) 4
d) 3

14. Valoarea $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x |f(t)|dt}{x}$ este:
a) 0
b) $\frac{2}{\pi}$
c) 1
d) ∞

15. Lungimea maxima a unui interval inclus in $[0, 2\pi]$ pe care functia f este convexa, este:
a) $\frac{\pi}{2}$
b) π
c) 2π
d) $\frac{3\pi}{2}$

16. Valoarea $f^{(2004)}(0)$ este:
a) 1
b) –1
c) 0
d) 0,5

Se considera polinomul $f = X^4 - 14X^2 + 9$, cu radacinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$, numarul $a = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ si multimile $A = \{g(a) | g \in \mathbb{Z}[X]\}, B = \{g(a) | g \in \mathbb{Z}[X],\ \mathrm{grad}(g) \le 3\}$.

17. Care dintre numerele urmatoare nu este radacina a polinomului f?
a) $-\sqrt{2} + \sqrt{5}$
b) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$
c) $\sqrt{2} - \sqrt{5}$

d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

18. Suma $x_1+x_2+x_3+x_4$ este:
    a) 4
    b) 14
    c) 0
    d) -14

19. Produsul $x_1x_2x_3x_4$ este:
    a) 0
    b) 14
    c) –9
    d) 9

20. Daca $p\sqrt{2}+q\sqrt{5}+r\sqrt{10}+s=0, p,q,r,s\in\mathbb{Q}$, atunci valoarea expresiei $2p+5q+10r+s$ este:
    a) 0
    b) 5
    c) 7
    d) 2

21. Multimea $A\setminus B$ este:
    a) $\varnothing$
    b) Infinita;
    c) Finita, avand cel putin doua elemente;
    d) Formata dintr-un singur element.

Se considera matricele $A\in M_{3,4}(\mathbb{C}), A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ si $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

22. Rangul matricei A este:
    a) 4
    b) 1
    c) 3
    d) 2

23. Solutia sistemului $\begin{cases}x+y+z+t=1\\ \quad y+z+t=0\\ \qquad z+t=0\end{cases}, (x,y,z,t)\in\mathbb{C}^4$ este:
    a) $(-1,1,-1,1)$
    b) $(1,1,-1,-1)$

c) $(1, 0, \lambda, -\lambda), \lambda \in \mathbb{C}$

d) $(1, -1, 1, -1)$

24. Ecuatia $AX = I_3, X \in M_{4,3}(\mathbb{C})$ are:
    a) Nu are solutii;
    b) O infinitate de solutii;
    c) O singura solutie;
    d) Un numar finit de solutii strict mai mare decat 1.

25. Matricea I_3A are suma elementelor:
    a) 9
    b) 10
    c) 0
    d) 12

26. Multimea $\{Y \in M_{4,3}(\mathbb{C}) | \det(YA) \neq 0\}$ este:
    a) Vida;
    b) Formata sintr-un singur element;
    c) Formata dintr-un numar finit de elemente, cel putin 2;
    d) Infinita.

27. Cate solutii are in inelul $\mathbb{Z}_6$ ecuatia $\hat{3}x = \hat{0}$?
    a) 1
    b) 4
    c) 2
    d) 3

28. Suma $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5}$, calculata in $\mathbb{Z}_6$, este:
    a) $\hat{3}$
    b) $\hat{2}$
    c) $\hat{0}$
    d) $\hat{1}$

29. Produsul $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \hat{4} \cdot \hat{5}$, calculat in $\mathbb{Z}_6$, este:
    a) $\hat{1}$
    b) $\hat{2}$
    c) $\hat{3}$
    d) $\hat{0}$

30. Care este ordinul elementului $\hat{2}$ in grupul $(\mathbb{Z}_6, +)$?

a) 2
b) 4
c) 6
d) 3

Indicatii la exercitiile mai dificile.

4) Presupunem ca limita comuna a celor doua siruri este un numar rational $a=\frac{p}{q}, p,q\in\mathbb{N}^*$. Intrucat sirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescator (vezi subiectul 1), iar $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescator (subiectul 2), rezulta $a_n<\frac{p}{q}<b_n, (\forall)n\geq 1$. Dubla inegalitate revine la $0<\frac{p}{q}-\left(\frac{1}{2^{1^2}}+\frac{1}{2^{2^2}}+...+\frac{1}{2^{n^2}}\right)<\frac{1}{2n\cdot 2^{n^2}}, (\forall)n\geq 1$; inlocuim $n=q$ si rezulta:

$$0<\frac{p}{q}-\left(\frac{1}{2^{1^2}}+\frac{1}{2^{2^2}}+...+\frac{1}{2^{q^2}}\right)<\frac{1}{2q\cdot 2^{q^2}}\,\Big|\cdot\left(2q\cdot 2^{q^2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0<2p\cdot 2^{q^2}-2q\cdot 2^{q^2}\left(\frac{1}{2^{1^2}}+\frac{1}{2^{2^2}}+...+\frac{1}{2^{q^2}}\right)<1$$

Rezulta deci ca numarul intreg $2p\cdot 2^{q^2}-2q\cdot 2^{q^2}\left(\frac{1}{2^{1^2}}+\frac{1}{2^{2^2}}+...+\frac{1}{2^{q^2}}\right)$ apartine intervalului $(0,1)$, contradictie. In concluzie, numarul a este irational; raspunsul corect este c).

9)-10) Se observa ca toate punctele multimii sunt necoliniare. Numarul dreptelor distincte determinate este $C_5^2=10$, iar numarul triunghiurilor distincte este $C_5^3=10$.

14) Valorile propuse arata ca limita exista. Calculam integrala in cazul particular $x=2k\pi$:

$$\int_0^{2k\pi}|\sin t|dt=k\int_0^{2\pi}|\sin t|dt=k\left(-\cos t\Big|_0^{\pi}+\cos t\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)=4k$$

Limita in acest caz se scrie:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\int_0^{2k\pi}|\sin t|\,dt}{2k\pi}=\lim_{k\to\infty}\frac{4k}{2k\pi}=\frac{2}{\pi}$$; raspunsul corect este b).

16) Cum $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),(\forall)n\geq 1$ (vezi rubrica “materiale ajutatoare”), rezulta $f^{(2004)}(x)=\sin(x+1002\pi)=\sin x\Rightarrow f^{(2004)}(0)=0$; raspunsul corect este c).

17) Chiar fara sa calculam radacinile lui f, stim ca un polinom cu coeficienti rationali care admite radacina $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, unde $a,b\in\mathbb{N}$ nu sunt patrate perfecte, trebuie sa admita si radacinile $\sqrt{a}-\sqrt{b},-\sqrt{a}+\sqrt{b},-\sqrt{a}-\sqrt{b}$. Daca numarul $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ar fi radacina, celelalte ar fi $\sqrt{2}-\sqrt{3},-\sqrt{2}+\sqrt{3},-\sqrt{2}-\sqrt{3}$, ceea ce ar conduce la trei variante corecte de raspuns, a), b) si c). Singura sansa este deci ca $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sa nu fie radacina; raspunsul corect este d).

21) Fie $g\in\mathbb{Z}[X]$; teorema impartirii cu rest a lui g la f se scrie:
$g(X)=(X^4-14X^2+9)Q(X)+R(X), \text{grad}(R(X))\le 3$; cum
$f(a)=0\Rightarrow g(a)=R(a), \text{grad}(R(a))\le 3$
Presupunem ca numarul $\alpha=g(a)$ apartine multimii A; cum
$\alpha=R(a), \text{grad}(R(X))\le 3\Rightarrow \alpha\in B\Rightarrow A\subseteq B\Rightarrow A\setminus B=\varnothing$; raspunsul corect a).

24) Fie $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix}$; ecuatia $AX=I_3$ revine la sistemul:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=0 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=0 \\ x_{21}+x_{31}+x_{41}=0 \\ x_{22}+x_{32}+x_{42}=1 \\ x_{23}+x_{33}+x_{43}=0 \\ x_{31}+x_{41}=0 \\ x_{32}+x_{42}=0 \\ x_{33}+x_{43}=1 \end{cases}$$

Consideram sistemul format din ecuatiile 1, 4 si 7. El este de tipul celui rezolvat la subiectul 23), deci are ca solutie $x_{11}=1, x_{21}=0, x_{31}=\alpha, x_{41}=-\alpha, \alpha\in\mathbb{C}$.

Sistemul format de ecuatiile 2, 5 si 8 este similar – dar nu identic – cu cel anterior. Solutia sa este $x_{12}=-1, x_{22}=1, x_{32}=\beta, x_{42}=-\beta, \beta\in\mathbb{C}$. In fine, sistemul format de ecuatiile 3, 6 si 9 are solutia $x_{13}=0, x_{23}=-1, x_{33}=\gamma, x_{43}=1-\gamma, \gamma\in\mathbb{C}$.
Solutia ecuatiei este deci:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & -\beta & 1-\gamma \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

Observatii. 1) Urat exercitiu !!!

2) In culegerea aparuta la editura Mathpress, solutia acestui subiect este gresita. Din graba, se considera ca sistemele formate de ecuatiile 2,5,8 si respectiv 3,6,9 sunt identice cu cel format de ecuatiile 1,4,7. Similare, da, dar nu identice – tinand seama de pozitiile elementelor 1 si 0 in matricea I_3. Oricum, raspunsul corect este “o infinitate de solutii” (b), dar familia de solutii este cea prezentata mai sus.