PROBA SCRISA LA MATEMATICA – Sesiunea iunie – iulie 2005
Proba D.
M1. Filiera teoretica (& vocationala –militar),
profil : Matematica - Informatica

SUBIECTUL I (30p)

➢ **Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen**

(3p) **1.** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este $f(x)=x-3$, cât este produsul $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(7)$?

(3p) **2.** Câte submulțimi nevide ale mulțimii $\mathbf{Z}_3$ au suma elementelor egală cu $\hat{0}$?

(3p) **3.** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este $f(x)=-x^4+2x$, cât este $(f\circ f)(1)$?

(3p) **4.** Care este probabilitatea ca un element n din mulțimea $\{0,1,2,3,4\}$ să verifice relația $2^n+5^n=3^n+4^n$?

(3p) **5.** Câte soluții reale are ecuația $x^4=16$?

Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^x+x+\dfrac{1}{2}$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x),\quad x\in\mathbf{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\int_0^1 f(x)dx$?

(3p) **8.** Cum este funcția f pe mulțimea numerelor reale : convexă sau concavă ?

(3p) **9.** Cât este $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n}$?

SUBIECTUL II (20p)

(4p) **11.** Care este distanța dintre punctele $A(1,3,5)$ și $B(3,5,7)$?

(4p) **12.** Care este lungimea razei cercului $x^2+y^2=4$?

(4p) **13.** Cât este $\cos^2\pi+\sin^2\pi$?

(4p) **14.** Care este modulul numărului complex $\dfrac{5+8i}{8-5i}$?

(2p) **15.** Cât este aria unui triunghi cu lungimile laturilor de 3, 3 și 4 ?

(2p) **16.** Care este ecuația tangentei la parabola $y^2=2x$ dusă prin punctul $P(2,2)$?

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $K=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Spunem că matricea $M\in M_2(\mathbf{R})$ este *nilpotentă*, dacă există $n\in\mathbf{N}^*$, astfel încât $M^n=O_2$.

(6p) **a)** Să se verifice că matricele O_2 și J sunt *nilpotente.*

(4p) **b)** Să se arate că matricea K nu este nici inversabilă nici *nilpotentă.*

(4p) **c)** Să se arate că, dacă matricea $X\in M_2(\mathbf{R})$, este $X=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$, atunci avem identitatea $X^2-(p+s)X+(ps-rq)I_2=O_2$.

(2p) **d)** Să se arate că, dacă matricea $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$ verifică relația $A^2=O_2$, atunci $a+d=0$ și $ad-bc=0$.

(2p) **e)** Să se arate că, dacă matricea $B\in M_2(\mathbf{R})$ este *nilpotentă,* atunci $B^2=O_2$.

(2p) **f)** Să se arate că matricea I_2 nu poate fi scrisă ca o sumă finită de matrice *nilpotente.*

SUBIECTUL IV (20p)

(4p) **a)** Să se verifice că $\dfrac{1}{1-a}=1+a+\ldots+a^n+\dfrac{a^{n+1}}{1-a}$, $\forall n\in\mathbf{N}$ și $\forall a\in\mathbf{R}-\{1\}$.

(4p) **b)** Să se deducă relația $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)^2+\ldots+(-1)^n\left(\sqrt{x}\right)^n+(-1)^{n+1}\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^{n+1}}{1+\sqrt{x}}$, $\forall x\in[0,1], \forall n\in\mathbf{N}$.

(4p) **c)** Să se arate că $0\le\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^{n+1}}{1+\sqrt{x}}\le\left(\sqrt{x}\right)^{n+1}$, $\forall x\in[0,1], \forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **d)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^b\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{n+1}}{1+\sqrt{x}}dx=0$, $\forall b\in[0,1]$

(4p) **e)** Să se calculeze integrala $\displaystyle\int_0^b\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$, unde $b>0$.

(2p) **f)** Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(x+\frac{(-1)^1x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{(-1)^2x^{\frac{2}{2}+1}}{\frac{2}{2}+1}+\ldots+\frac{(-1)^nx^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1}\right)=\int_0^x\frac{1}{1+\sqrt{t}}dt,\ \forall x\in[0,1].$$