

# Métodos Funcionais

Usualmente fazemos:

(Peskin 9.1, Ryder 5.1)

Clássico  $q_i, p_i$   $\longrightarrow$  Quântico  $\hat{q}_i, \hat{p}_i$   
 $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}$

Estudamos então o comportamento destes operadores no espaço de Hilbert, resolvendo:

$$i\hbar \left( \frac{d}{dt} |\psi\rangle \right) = H(\hat{p}, \hat{q}) |\psi\rangle$$

Alternativamente, podemos estar mais interessados no estudo de objetos do tipo:

$$U(q_a, q_b; T) = \langle q_b | e^{-iHT/\hbar} | q_a \rangle$$

(assumindo um sistema unidimensional)

Que é a amplitude de probabilidade de uma partícula viajar de  $q_a$  para  $q_b$  em um dado tempo  $T$ .

$$T = t_b - t_a$$

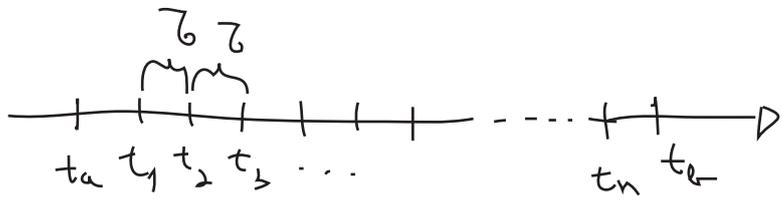
$$\langle q_b | e^{-i\frac{H}{\hbar}(t_b - t_a)} | q_a \rangle = \langle q_b | e^{-i\frac{H t_b}{\hbar}} e^{i\frac{H t_a}{\hbar}} | q_a \rangle =$$

$$|q, t\rangle = e^{i\frac{H t}{\hbar}} |q\rangle$$

$$= \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle$$

Na linguagem de funções de onda:

$$\psi(q_b, t_b) = \langle q_b | \psi(t_b) \rangle_S = \langle q_b, t_b | \psi \rangle_H = \int dq_a \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle \langle q_a, t_a | \psi \rangle_H$$

$$= \int dq_a U(q_b, q_a; T) \psi(q_a, t_a) \quad \int dq_a |q_a, t_a\rangle \langle q_a, t_a|$$


$$e^{-i\frac{H}{\hbar}T} = e^{-i\frac{H}{\hbar}\tau} e^{-i\frac{H}{\hbar}\tau} e^{-i\frac{H}{\hbar}\tau} \dots e^{-i\frac{H}{\hbar}\tau}$$

$$1 = \int dq |q\rangle \langle q|$$

$$U(q_a, q_b; T) = \int dq_1 \int dq_2 \dots \int dq_n \langle q_b, t_b | q_n, t_n \rangle \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q_a, t_a \rangle$$

(eq. 1.1)

Para um número de intervalos muito grande:  $\tau \rightarrow 0$

e um elemento qualquer desta cadeia:

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle &= \langle q_{j+1} | e^{-i \frac{H}{\hbar} \tau} | q_j \rangle \simeq \langle q_{j+1} | 1 - \frac{iH}{\hbar} \tau | q_j \rangle = \\ &= \delta(q_{j+1} - q_j) - \frac{i\tau}{\hbar} \langle q_{j+1} | H | q_j \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{i}{\hbar} p(q_{j+1} - q_j)} dp - \frac{i\tau}{\hbar} \langle q_{j+1} | H | q_j \rangle \quad (\text{eq. 2.1}) \end{aligned}$$

$$\delta(q_{j+1} - q_j) = \frac{1}{\hbar} \delta\left[\frac{1}{\hbar}(q_{j+1} - q_j)\right] = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar} p(q_{j+1} - q_j)}$$

Assumindo uma forma simples para H:

$$H = p_A(\hat{p}) + p_B(\hat{q})$$

$$\langle q_{j+1} | H | q_j \rangle = \langle q_{j+1} | p_A(\hat{p}) | q_j \rangle + \langle q_{j+1} | p_B(\hat{q}) | q_j \rangle$$

$$\langle q_{j+1} | p_A(\hat{p}) | q_j \rangle = \int dk \int dk' \langle q_{j+1} | k \rangle \langle k | p_A(\hat{p}) | k' \rangle \langle k' | q_j \rangle =$$

$$\langle q | k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} k q}$$

$$= \int dk \int dk' \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}(k q_{j+1} - k' q_j)} p_A(k') \delta(k - k') =$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} k (q_{j+1} - q_j)} p_A(k)$$

$$\langle q_{j+1} | p_B(\hat{q}) | q_j \rangle = p_B(q_j) \delta(q_{j+1} - q_j) =$$

$$= p_B\left(\frac{q_{j+1} + q_j}{2}\right) \int \frac{dk}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} k (q_{j+1} - q_j)}$$

$$\overline{q_j} = \frac{q_{j+1} + q_j}{2}$$

$$\langle q_{j+1} | H | q_j \rangle = \int \frac{dP}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} P (q_{j+1} - q_j)} f_A(P) +$$

$$+ f_B(\bar{q}_j) \int \frac{dP}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} P (q_{j+1} - q_j)}$$

$$\langle q_{j+1} | \underbrace{H(\hat{q}, \hat{p})}_{\text{OPERADORES}} | q_j \rangle = \int \frac{dP}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} P (q_{j+1} - q_j)} \underbrace{H(\bar{q}_j, P)}_{\text{NÚMEROS}}$$

OPERADORES

NÚMEROS

É preciso ter cuidado com Hamiltonianas que tenham produtos entre os operadores  $p$  e  $q$ , neste caso é preciso "Weyl-ordenar" a Hamiltoniana antes de usar a relação acima (ver Peskin pg 281). Com esse cuidado podemos usar (3.1) normalmente.

De (2.1) temos:

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \int \frac{dP}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} P (q_{j+1} - q_j)} \left[ 1 - \frac{i\tau}{\hbar} H(\bar{q}_j, P) \right]$$

$$= \int \frac{dP}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} P (q_{j+1} - q_j)} e^{-\frac{i}{\hbar} \tau H(\bar{q}_j, P)} \quad (\text{eq. 3.1})$$

Voltando para (1.1) temos:

$$(q_0 = q_a, q_{n+1} = q_b)$$

$$U(q_n, q_b; T) = \int dq_1 \int dq_2 \dots \int dq_n \langle q_n, t_n | q_n, t_n \rangle \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q_a, t_a \rangle$$

$$= \int dq_1 \int dq_2 \dots \int dq_n \left( \int \frac{dP_n}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} P_n (q_{n+1} - q_n)} e^{-\frac{i}{\hbar} \tau H(\bar{q}_n, P_n)} \right) \times \dots \times$$

$$\times \left( \int \frac{dP_0}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} P_0 (q_1 - q_0)} e^{-\frac{i}{\hbar} \tau H(\bar{q}_0, P_0)} \right) =$$

$$= \left( \prod_{j=1}^n \int dq_j \int \prod_{i=0}^n \frac{dP_i}{2\pi\hbar} \text{Exp} \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{\ell=0}^n [P_\ell (q_{\ell+1} - q_\ell) - \tau H(\bar{q}_\ell, P_\ell)] \right\} \right) \quad (\text{eq. 3.2})$$

No limite do contínuo ( $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ )  $p$  e  $q$  podem ser pensados como funções do tempo, temos então:

$$q_a = q(t_a) \quad q_b = q(t_b)$$

$$\sum_{k=0}^n \left[ P_k \frac{q_{k+1} - q_k}{\epsilon} - \epsilon H(\bar{q}_k, P_k) \right] = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[ P(t) \dot{q}(t) - H(q, P) \right]$$

$$\int \prod_{j=1}^n dq_j \int \prod_{i=0}^n \frac{dP_i}{2\pi} \equiv \int \mathcal{D}q \mathcal{D}P$$

$$U(q_a, q_b; T) = \int \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}P}{\mathcal{R}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \left[ P(t) \dot{q}(t) - H(q, P) \right] \right\}$$

(eq. 4.1)

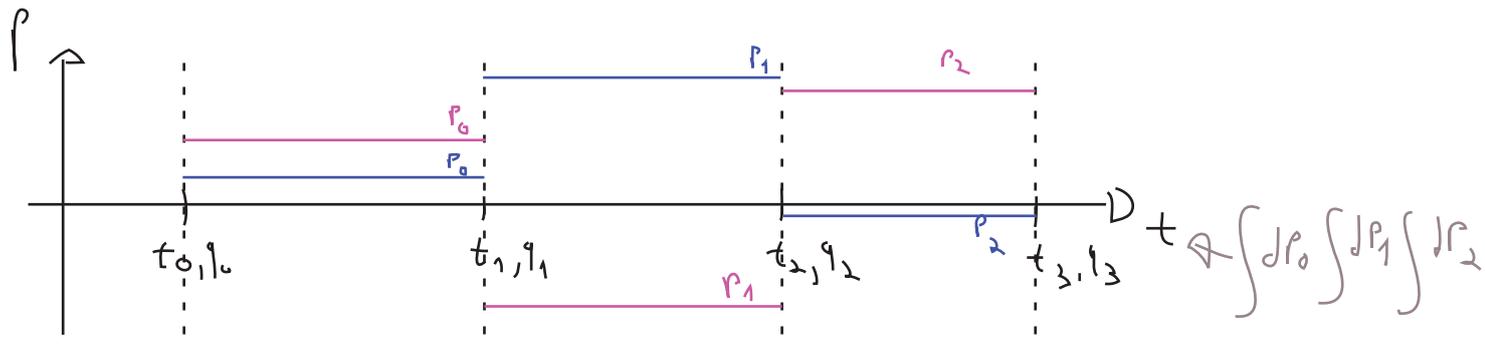
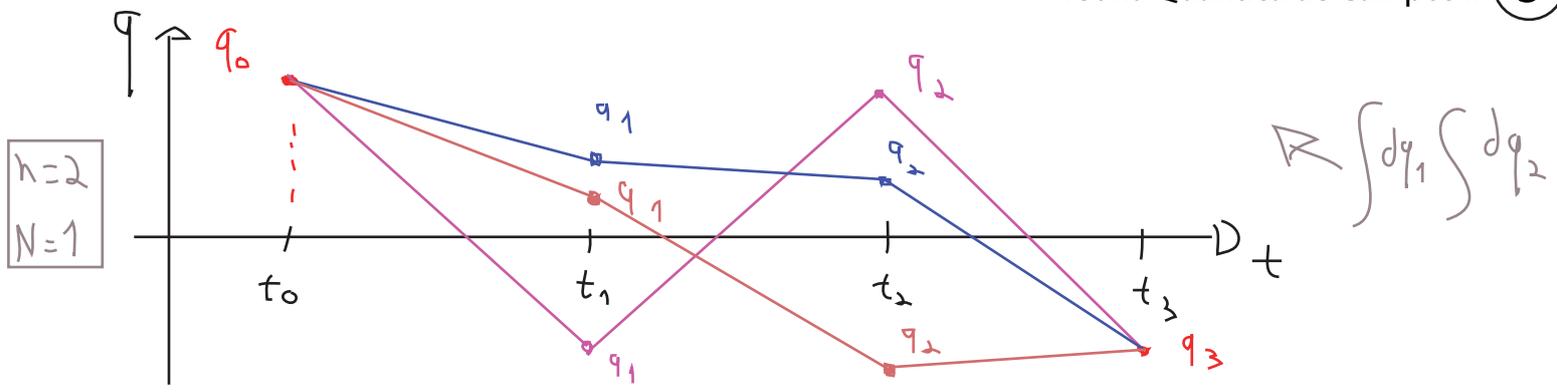
No caso de um sistema com mais coordenadas:  $q \rightarrow (q^1, q^2, \dots, q^N)$

$$\prod_{m=1}^N \int \mathcal{D}q^m \mathcal{D}P^m \equiv \int \prod_{i,j=1}^N dq_j^m \frac{dP_i^m}{2\pi}$$

$$U(q_a, q_b; T) = \left( \prod_m \int \frac{\mathcal{D}q^m \mathcal{D}P^m}{\mathcal{R}} \right) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \left[ \sum_i \dot{P}^i(t) \dot{q}^i(t) - H(q, P) \right] \right\}$$

(eq. 4.2)

Com isso temos uma forma de calcular esta amplitude de transição (que chamaremos de propagador) a partir desta "soma" sobre todas as possíveis trajetórias no espaço de fase.



Temos uma forma mais simples para o propagador no caso de Hamiltonianas do tipo:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (\text{eq. 5.1})$$

neste caso as integrais no momento podem ser feitas:

$$\int \frac{Dp}{\mathcal{K}} \text{Exp} \left\{ \frac{i}{\mathcal{K}} \int_{t_a}^{t_b} dt \left[ p(t) \dot{q}(t) - \frac{p^2}{2m} \right] \right\}$$

DISCRETO  
 ↓

$$\int \prod_j \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \text{Exp} \left\{ \frac{i}{\mathcal{K}} \sum_j \tau \left[ p_j \frac{(q_{j+1} - q_j)}{\tau} - \frac{p_j^2}{2m} \right] \right\}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Exp} [-ax^2 + bx + c] dx = \text{Exp} \left[ \frac{b^2}{4a} + c \right] \left( \frac{\pi}{a} \right)^{1/2}$$

$$\int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \text{Exp} \left\{ \frac{i}{\mathcal{K}} \left[ p_j (q_{j+1} - q_j) - \frac{\tau}{2m} p_j^2 \right] \right\} = \left( \frac{m}{2\pi\hbar i \tau} \right)^{1/2} \text{Exp} \left[ \frac{im}{2\mathcal{K}\tau} (q_{j+1} - q_j)^2 \right]$$

(n+1) INTEGRAIS EM P

$$U(q_n, q_{n-1}; T) = \int \prod_j dq_j \text{Exp} \left\{ \sum_j \frac{i z}{\hbar} [-V(q_j)] \right\} \left( \frac{m}{2i\hbar z} \right)^{\frac{n+1}{2}} \text{Exp} \left[ \sum_j \frac{i m}{2\hbar z} (q_{j+1} - q_j)^2 \right] =$$

$$= \left( \frac{m}{2i\hbar z} \right)^{\frac{n+1}{2}} \int \prod_j dq_j \text{Exp} \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_j z \left[ \frac{m}{2} \frac{(q_{j+1} - q_j)^2}{z^2} - V(q_j) \right] \right\}$$

↓ CONTÍNUO

$$U(q_n, q_{n-1}; T) = N \int \mathcal{D}q \text{Exp} \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \left[ \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right] \right\}$$

$$N = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ z \rightarrow 0}} \left( \frac{m}{2i\hbar z} \right)^{\frac{n+1}{2}}$$

$$L(q, \dot{q})$$

$$U(q_i, q_f; T) = \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S[q]}$$

(eq. 6.1)

Comentários:

(1) Nem sempre é possível escrever o propagador na forma (6.1), ela só vale se o Hamiltoniano for da forma (5.1)

(2) Originalmente Feynman assumiu (6.1) e a partir dela provou a eq. de Schrödinger

## Derivadas Funcionais

(Peskin pg 289, Ryder 5.4)

Função:  $\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$

Funcional:  $C^\infty(M) \longmapsto \mathbb{R}$  NOTAÇÃO  $f(x_n) \rightarrow F[f]$   
↳ ex.:  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, \dots$

$$E_{x:(1)} F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx$$

$$(1) \underline{F}_a[p] = p^2(a)$$

↪ PARÂMETRO

Derivada Funcional:

podemos definir diferencial de funções por:  $df \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\epsilon h) - f(x)}{\epsilon} = ah$   
 ( $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\epsilon h) - f(x)}{\epsilon} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(x+\eta) - f(x)}{\eta} h$$

↪  $\forall h \in \mathbb{R}$

$$h=1 \Rightarrow df = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} = a \equiv \frac{df}{dx}$$

Em  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f = f(x_1, x_2, \dots)$$

DIFERENCIAL:  $df = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + \epsilon \vec{r}) - f(\vec{x})}{\epsilon} = \vec{a} \cdot \vec{r}$

$$\vec{r} = (0, 0, 0, \dots, \underset{\uparrow}{1}, \dots) \Rightarrow r_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{r} = a_j r_j = a_i$$

$$df = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \epsilon, \dots) - f(\vec{x})}{\epsilon} = a_i \equiv \underbrace{\frac{df}{dx_i}}_{\text{DERIVADAS}}$$

$$\vec{r} = \vec{\nabla} f$$

$$F[f] \Rightarrow \delta F = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f + \epsilon h] - F[f]}{\epsilon} = \int a(x) h(x) dx$$

$$h = \delta_y \Rightarrow h(x) = \delta(x - y) \Rightarrow \int a(x) h(x) dx = a(y)$$

$$\delta F = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f + \epsilon \delta_y] - F[f]}{\epsilon} = a(y) \equiv \frac{\delta F}{\delta f(y)}$$

$$\frac{\delta F}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f + \epsilon \delta_y] - F[f]}{\epsilon}$$

(eq. 8.1)

LINEAR!  
(FRÉCHET  
DERIVATIVE)

$$\delta F = \int \frac{\delta F}{\delta f(x)} h(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f + \epsilon h] - F[f]}{\epsilon}$$

(eq. 8.2)

Ex:  $F[f] = \int_0^1 f^2(x) dx$

(8.2)  $\Rightarrow F[f + \epsilon h] = \int_0^1 [f^2(x) + 2\epsilon f(x) h(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)] dx =$

$$\delta F = \frac{F[f + \epsilon h] - F[f]}{\epsilon} = \int_0^1 2 f(x) h(x) dx$$

$\frac{\delta F}{\delta f(x)} = 2f(x)$

(8.1)  $\Rightarrow \frac{\delta F}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f(x) + \epsilon \delta(x - y)] - F[f(x)]}{\epsilon} =$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^1 \left[ 2 \epsilon \rho(x) \delta(x-y) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] dx = 2\rho(y)$$



Ex 2:  $F[f] = \int f(x) dx$

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int [f(x) + \epsilon \delta(x-y)] dx - \int f(x) dx \right\} =$$

$$= \int \delta(x-y) dx = 1$$

Ex 3:  $F_x[f] = \int G(x,y) f(y) dy$

$$\frac{\delta F_x[f]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int G(x,y) \epsilon \delta(y-z) dy = G(x,z)$$

Ex 4:  $F_a[f] = f(a)$       $a$  fixo

$$\frac{\delta F_a[f]}{\delta f(x)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F_a[f(y) + \epsilon \delta(y-x)] - F_a[f(y)]}{\epsilon} =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(a) + \epsilon \delta(a-x) - f(a)}{\epsilon} = \delta(a-x)$$

$$f(x) = F_x[f] \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x-y)$$

Ex 5:  $F_x[f] = g(f(x))$

$$\frac{\delta F_x[f]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g(f(x) + \epsilon \delta(x-y)) - g(f(x))}{\epsilon}$$

$$g[f(x) + \epsilon \delta(x-y)] \approx g(f(x)) + \epsilon \delta(x-y) \left. \frac{dg}{df} \right|_{f=f(x)} + \dots$$

$$\frac{\delta g(f(x))}{\delta f(y)} = \delta(x-y) \left. \frac{dg}{df} \right|_{f=f(x)}$$

Ex 6:  $F[y, z] = \int y^2(x) z'(x) dx$

$$\frac{\delta F[y, z]}{\delta y(x)} = 2 y(x) z'(x)$$

$$\frac{\delta F[y, z]}{\delta z(x)} = 1 y(x) z''(x)$$

Ex 7:  $C^\infty(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}$

$$\frac{\delta g(p(x_1, x_2, x_3))}{\delta p(y_1, y_2, y_3)} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \left. \frac{dg}{dp} \right|_{p=p(x_1, x_2, x_3)}$$

Ex 8:

$$\frac{\delta g(p(x_1, x_2, x_3))}{\delta p(x_1, y_2, y_3)} = \delta(x_1 - y_2) \delta(x_2 - y_3) \left. \frac{dg}{dp} \right|_{p=p(x_1, x_2, x_3)}$$

$\hookrightarrow p(x_1, x_2, x_3) = p'(x_1, x_2)$

PARÂMETRO VARIÁVEL  
PARÂMETRO FIXO

$$\frac{\delta f(\phi(\vec{x}_i, x^0), \pi(\vec{x}_i, x^0))}{\delta \phi(\vec{x}_j, x^0)} \equiv \delta^3(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \left. \frac{df(\phi, \pi)}{d\phi} \right|_{\phi = \phi(\vec{x}, x^0)}$$

## Funções de Correlação

(Ryder 5.5)

Desejaremos usar este formalismo para obter funções de correlação e propagadores para as teorias de campo estudadas. Começemos então pelo seguinte objeto:

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | \hat{q}(t_m) | q_i, t_i \rangle &= \quad t_f > t_m > t_i \\ &= \int dq_1 \dots dq_n \langle q_f, t_f | q_n, t_n \rangle \dots \langle q_{n_1}, t_{n_1} | \hat{q}(t_m) | q_{n_1-1}, t_{n_1-1} \rangle \dots \\ &\quad \dots \langle q_1, t_1 | q_i, t_i \rangle = \end{aligned}$$

$$\langle q_{n_1}, t_{n_1} | \hat{q}(t_m) | q_{n_1-1}, t_{n_1-1} \rangle = q(t_m) \langle q_m, t_m | q_{n_1-1}, t_{n_1-1} \rangle$$

Uma vez que transformamos este operador em uma função, podemos seguir o mesmo procedimento usado nas páginas 2 a 6 para obter:

$$\langle q_f, t_f | \hat{q}(t_1) | q_i, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q \, q(t_1) \text{Exp} \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \, L \right\}$$

(de agora em diante:  $t = 1, c = 1$ )

No caso de dois operadores vale o mesmo:

$$\langle q_f, t_f | \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) | q_i, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q \, q(t_1) q(t_2) \text{Exp} \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \, L \right\}$$

$t_f > t_1 > t_2 > t_i$

$$\langle q_f, t_f | \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_1) | q_i, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q \, q(t_1) q(t_2) \text{Exp} \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \, L \right\}$$

$t_f > t_2 > t_1 > t_i$

$$N \int \mathcal{D}_q q(t_1) q(t_2) \text{Exp} \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt L \right\} = \langle q(t_f) | T \{ \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \} | q(t_i) \rangle$$

O ordenamento temporal aparece naturalmente na integral de trajetória

Este procedimento pode ser generalizado para:

$$\langle q(t_f) | T \{ \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \dots \hat{q}(t_n) \} | q(t_i) \rangle = N \int \mathcal{D}_q q(t_1) \dots q(t_n) \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} L dt \right\}$$

(eq. 12.1)

Isso é quase função de correlação que precisamos, a menos dos estados iniciais e finais, que deveriam ser o estado fundamental (vácuo). Gostaríamos de obter:

$$\underbrace{\langle 0, -\infty |}_{\hookrightarrow \text{VÁCUO}} T \{ \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \dots \hat{q}(t_n) \} \underbrace{| 0, +\infty \rangle}_{\hookrightarrow \text{VÁCUO}}$$

O que temos é uma transição de vácuo-vácuo, com estados mais excitados (partículas) criados e aniquilados em tempos intermediários. Isso é aproximadamente o que acontece em situações experimentais, com partículas criadas em um ponto (tipicamente por um choque) e aniquiladas em um outro (no momento da detecção). Podemos dar conta destas criações e aniquilações usando fontes:

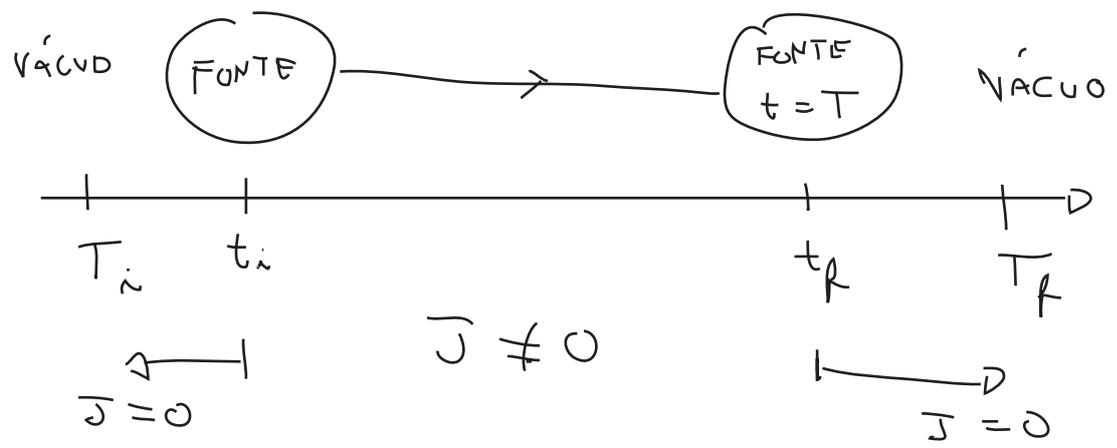
$$L \rightarrow L + \int J(t) q(t)$$

$|q, t\rangle \rightarrow |q, t\rangle^J$

FONTE

Uma generalização da idéia de uma partícula carregada interage com o campo eletromagnético por meio de um termo  $\int \bar{J}_\mu A^\mu$  onde  $\bar{J}_\mu$  é a corrente associada à carga. Este corrente é a fonte do campo  $A_\mu$

Neste caso estamos interessados em estudar então o seguinte caso:



$$\langle Q_R T_f | Q_i T_i \rangle^J = N \int \mathcal{D}q \exp \left[ i \int_{T_i}^{T_f} (L + Jq) dt \right]$$

$$\langle Q_R T_f | Q_i T_i \rangle^J = \int dq_R dq_i \langle Q_R T_f | q_R t_f \rangle \langle q_R t_f | q_i t_i \rangle \langle q_i t_i | Q_i T_i \rangle$$

J=0 ENTRE T\_f E T\_i

$$\langle Q_R T_f | q_R t_f \rangle = \langle Q_R | e^{-i \hat{H} T_f} | q_R, t_f \rangle =$$

$$= \sum_n \langle Q_R | e^{-i \hat{H} T_f} | E_n \rangle \langle E_n | q_R, t_f \rangle =$$

$$= \sum \phi_n^*(q_R, t_f) \phi_n(Q_R) e^{-i E_n T_f}$$

Estou buscando um elemento de matriz que envolva o estado fundamental da teoria (vácuo) isto pode ser obtido a partir do elemento acima de mais de uma forma:

1 Calculando a expressão acima no limite:  $T_f \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)$

$$e^{-i E_n T_f} \rightarrow e^{-i E_n T_f} \underbrace{e^{-E_n \epsilon T_f}}$$

Com  $T_f$  grande, a soma de exponenciais deste tipo será dominada pela contribuição de menor energia.

$$\therefore \lim_{T_f \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle Q_R T_f | q_R t_f \rangle = \phi_0^*(q_R, t_f) \phi_0(Q_R) e^{-i E_0 T_f}$$

Fazendo o mesmo no elemento que envolve  $T_i$ , temos: ( $T_i \rightarrow -\infty(1 - i\epsilon)$ )

$$\lim_{\substack{T_f \rightarrow \infty(1-i\epsilon) \\ T_i \rightarrow -\infty(1-i\epsilon)}} \langle Q_R T_f | Q_i T_i \rangle^J = \phi_0^*(Q_i) \phi_0(Q_R) \exp[-i E_0 (T_f - T_i)] \times \\ \times \int dq_i dq_f \phi_0^*(q_R, t_f) \langle q_R t_f | q_i t_i \rangle^J \phi_0(q_i, t_i)$$

$$\int dq_i dq_f \phi_0^*(q_f, t_f) \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle^J \phi_0(q_i, t_i) = \frac{\lim_{\substack{T_f \rightarrow \infty(1-i\epsilon) \\ T_i \rightarrow -\infty(1-i\epsilon)}} \langle Q_f, T_f | Q_i, T_i \rangle^J}{\phi_0^*(Q_i) \phi_0(Q_f) \text{EXP}[-iE_0(T_f - T_i)]}$$

$t_f \rightarrow \infty$        $\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J$   
 $t_i \rightarrow -\infty$

$$\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J \propto \lim_{\substack{T_f \rightarrow \infty(1-i\epsilon) \\ T_i \rightarrow -\infty(1-i\epsilon)}} \langle Q_f, T_f | Q_i, T_i \rangle^J =$$

$$= N \int \mathcal{D}q \text{EXP} \left[ i \int_{-\infty(1-i\epsilon)}^{+\infty(1-i\epsilon)} (L + Jq) dt \right]$$

A conclusão é que a amplitude de transição vácuo-vácuo é proporcional a integral de trajetória acima. Definiremos então o **FUNCIONAL GERADOR**:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q \text{EXP} \left[ i \int_{-\infty(1-i\epsilon)}^{+\infty(1-i\epsilon)} (L + Jq) dt \right] \propto \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J$$

(note que definimos Z de forma normalizada - jogamos fora qualquer número na frente deste - isto é o mesmo que dividir por  $Z[J=0]$  o que faz o Peskin eq. 9.35) (eq. 14.1)

2 Uma outra forma de "separar o vácuo" seria modificar a Hamiltoniana

$$H \rightarrow H(1 - i\epsilon)$$

$$\langle Q_f | e^{-i\hat{H}T_f} | q_f, t_f \rangle \rightarrow \sum \phi_n^*(q_f, t_f) \phi_n(Q_f) e^{-iE_n T_f} e^{-\epsilon E_n T_f}$$

o que nos leva ao mesmo resultado, só que agora

$$\begin{cases} T_f \rightarrow \infty \\ T_i \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q \exp \left[ i \int_{-\infty}^{+\infty} (L + Jq - i\epsilon V(q)) dt \right]$$

(lembre-se que assumimos  $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$  toda vez que passamos de H para L)

ATENÇÃO: no Ryder ele define este funcional com  $+\frac{i}{2}\epsilon q^2$  (Ryder: eq 5.68), ele consegue sair "impune" disto pois só utilizará esta definição para o campo escalar, cujo potencial é  $-\frac{m}{2}q^2$



Com esta definição em mente, notemos que:

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(t_1)} = \int \mathcal{D}q \underbrace{\frac{\delta}{\delta J(t_1)} \left[ i \int_{-\infty}^{+\infty} (L + Jq) dt \right]}_{i q(t_1) \text{ (VEJA EX3 NA PÁG 9)}} \exp \left[ i \int_{-\infty}^{+\infty} (L + Jq) dt \right]$$

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} = i^n \int \mathcal{D}q q(t_1) \dots q(t_n) \exp \left[ i \int_{-\infty}^{+\infty} (L + Jq) dt \right]$$

$$\left. \frac{\delta Z[J]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \right|_{J=0} = i^n \int \mathcal{D}q q(t_1) \dots q(t_n) \exp \left[ i \int_{-\infty}^{+\infty} L dt \right]$$

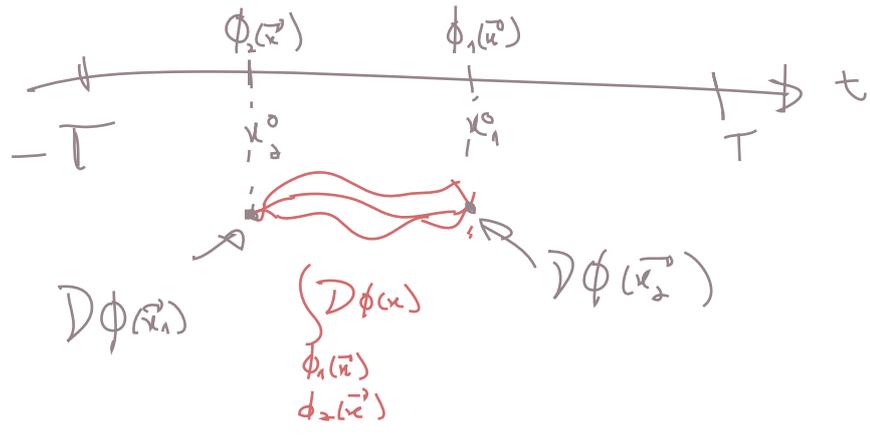
segundo a eq. 12.1, a menos dos limites de int.

$$\langle q_p t_p | T \{ \hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n) \} | q_i t_i \rangle$$

Lembrando que estes limites de integração têm o efeito de separar o estado fundamental:

$$\left. \frac{\delta Z[J]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \right|_{J=0} \propto i^n \langle 0, \infty | T \{ \hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n) \} | 0, -\infty \rangle$$

Obs: No Peskin, pg 283, ele faz essencialmente a mesma coisa, mas já para um campo. Na equação (9.16), por exemplo, ele está dividindo o espaço em três partes:



o que é o mesmo que fizemos com  $t, t', T$  e  $T'$ .

## Quantização Funcional do Campo Escalar

(Peskin 9.2, Ryder 6.1 a 6.5)

Estendemos essa idéias para uma teoria de campo, fazendo as seguintes substituições:

$$MQ \longrightarrow TQC$$

$$q(t) \longrightarrow \phi(x^\mu)$$

discretização do tempo:  $q(t_i) = q_i$   $\longrightarrow$  cubos 4D:  $\phi(x_i, y_i, z_i, t_i) = \phi_n$

$$\delta t \longrightarrow \delta^4 x$$

$$Dq \longrightarrow D\phi$$

$$Z[J] \longrightarrow Z[J] = \int D\phi \exp \left[ i \int (\mathcal{L}(\phi) + J(x)\phi(x) - i\varepsilon V(\phi)) \delta^4 x \right]$$

A Lagrangeana de um campo escalar livre é:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2)$$

$$-i\varepsilon V(\phi) = i\varepsilon \frac{m^2 \phi^2}{2} = \frac{i\varepsilon}{2} \phi^2$$

$$Z_0[J] = \int D\phi \exp \left\{ i \int d^4 x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - (m^2 - i\varepsilon) \phi^2) + \phi J \right] \right\}$$

ÍNDICE INDICA CAMPO LIVRE (NÃO CONFUNDIR COM NOTAÇÃO DO PESKIN:  $Z_0 = Z[J=0]$ )

$$\int \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \, d^4x = \underbrace{\int \partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi) \, d^4x}_{\text{TERMO DE SUPERFÍCIE} \rightarrow 0} - \int \phi \partial_\mu \partial^\mu \phi \, d^4x$$

$$Z_0[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\phi \, \text{EXP} \left\{ i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (-\phi \square \phi - (m^2 - i\varepsilon) \phi^2) + \phi \mathcal{J} \right] \right\} =$$

$$Z_0[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\phi \, \text{EXP} \left\{ -i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \phi (\square + m^2 - i\varepsilon) \phi - \phi \mathcal{J} \right] \right\}$$

(eq. 17.1)

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \phi_0$$

$$\mathcal{D}\phi \rightarrow \mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$$

$$\int d^4x \phi (\square + m^2 - i\varepsilon) \phi \rightarrow \int d^4x (\phi + \phi_0) (\square + m^2 - i\varepsilon) (\phi + \phi_0)$$

$$\int d^4x \phi \square \phi_0 = \underbrace{\int d^4x \partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi_0)}_0 - \int d^4x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi_0 =$$

$$= - \int d^4x \left[ \underbrace{\partial^\mu (\partial_\mu \phi) \phi_0}_0 - \phi_0 \square \phi \right] = \int d^4x \phi_0 \square \phi$$

$$\begin{aligned} \int d^4x (\phi + \phi_0) (\square + m^2 - i\varepsilon) (\phi + \phi_0) &= \int d^4x \phi (\square + m^2 - i\varepsilon) \phi + \\ &+ \int d^4x \phi_0 (\square + m^2 - i\varepsilon) \phi_0 + \\ &+ 2 \int d^4x \phi (\square + m^2 - i\varepsilon) \phi_0 \end{aligned}$$

$$Z_0[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \phi (\square + m^2 - i\varepsilon) \phi - \phi \mathcal{J} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \phi_0 (\square + m^2 - i\varepsilon) \phi_0 + \phi (\square + m^2 - i\varepsilon) \phi_0 - \phi_0 \mathcal{J} \right] \right\}$$

Podemos escolher  $\phi_0$ , tal que:

$$(\square + m^2 - i\varepsilon) \phi_0(x) = \mathcal{J}(x) \quad (\text{eq. 18.1}) \quad (\text{QUERO CANCELAR } \phi \mathcal{J})$$

$$Z_0[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \phi (\square + m^2 - i\varepsilon) \phi - \frac{1}{2} \phi_0 \mathcal{J} \right] \right\} =$$

Note que o que fizemos aqui, por meio da introdução deste campo  $\phi_0$ , foi "completar quadrados". Queríamos uma integração funcional na forma " $\phi \hat{\square} \phi$ " para aplicarmos as fórmulas generalizadas para Gaussianas. O que resta não depende de  $\phi$  e pode ser tirado da integral funcional.

$$Z_0[\mathcal{J}] = e^{\frac{i}{2} \int d^4x \phi_0 \mathcal{J}} \underbrace{\int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x \phi (\square + m^2 - i\varepsilon) \phi \right\}}_{\text{NÚMERO } N} = \\ = N e^{\frac{i}{2} \int d^4x \phi_0 \mathcal{J}}$$

De 18.1 temos: 
$$\phi_0(x) = - \int \underbrace{\Delta_F(x-y)}_{(\square + m^2 - i\varepsilon) \Delta_F(x) = -\delta^4(x-y)} \mathcal{J}(y) dy$$

Propagador de Feynman

$$Z_0[\mathcal{J}] = N \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \mathcal{J}(x) \Delta_F(x-y) \mathcal{J}(y) \right\}$$

↳ irrelevante, lembre-se que usaremos a versão normalizada, ver eq. 14.1 (eq. 18.2)

Poderíamos ter chegado no mesmo resultado usando as generalizações da integral de Gaussiana para a integração funcional:

$$\begin{aligned} x &\in \mathbb{R}^n \\ A &\in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \hookrightarrow A &= A^T \end{aligned} \Rightarrow \int \frac{d^n x}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \vec{x} \cdot A \vec{x}} = (\text{DET } A)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \int \mathcal{D}\phi \text{ EXP} \left[ -\frac{1}{2} \int \phi(x) A \phi(x) dx \right] = (\text{DET } A)^{-1/2}$$

(ver Ryder pgs 186 a 188)

$$\begin{aligned} z &\in \mathbb{C}^n \\ A &\in \mathbb{C}^{n \times n} \\ \hookrightarrow A^\dagger &= A \end{aligned} \Rightarrow \int \frac{d^n z^*}{(2\pi)^{n/2}} \frac{d^n z}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\vec{z}^* \cdot A \vec{z}} = (\text{DET } A)^{-1}$$

$$\Rightarrow \int \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi \text{ EXP} \left[ -\int \phi^*(x) A \phi(x) dx \right] = (\text{DET } A)^{-1}$$

$$\exists A^{-1} \Rightarrow \int \frac{d^n x}{(2\pi)^{n/2}} \text{ EXP} \left\{ -\left[ \frac{1}{2} \vec{x} \cdot A \vec{x} + \vec{Q} \cdot \vec{x} + C \right] \right\} = (\text{DET } A)^{-1/2} \text{ EXP} \left[ \frac{1}{2} \vec{Q} \cdot A^{-1} \vec{Q} - C \right]$$

$$\int \mathcal{D}\phi \text{ EXP} \left\{ -\int \left[ \frac{1}{2} \phi(x) A \phi(x) + \phi(x) B(x) + C \right] dx \right\} = ?$$

$$Q(\phi) = \int \left[ \frac{1}{2} \phi(x) A \phi(x) + \phi(x) B(x) + C \right] d^4 x$$

$$\bar{\phi}(x) = - \int A^{-1}(x, y) B(y) dy$$

$$A\bar{\phi}(x) = - \int \underbrace{A^{-1}(x, y)}_{\delta(x-y)} B(y) dy = -B(x)$$

$$Q(\bar{\phi}) = \int \frac{1}{2} \left[ \int A^{-1}(x, y) D(y) dy \right] A(x) \left[ \int A^{-1}(x, y) D(y) dy \right] dx + B(x)$$

$$- \int \int A^{-1}(x, y) B(y) B(x) dx dy + C =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \int B(x) A^{-1}(x, y) B(y) dy dx + C$$

$$\phi' = \phi - \bar{\phi} \Rightarrow \underbrace{Q(\phi')} = Q(\phi) - Q(\bar{\phi})$$

FAÇA A CONTA PARA VER

$$Q(\phi) = Q(\phi') + Q(\bar{\phi})$$

$$\int D\phi \text{ EXP} \left\{ - \int \left[ \frac{1}{2} \phi(x) A \phi(x) + \phi(x) B(x) + C \right] dx \right\} =$$

MUD. DE VARIÁVEIS  $\phi \rightarrow \phi'$   
 $\downarrow D\phi = D\phi'$

$$= \int D\phi' \text{ EXP} \left\{ - \int dx \frac{1}{2} \phi'(x) A \phi'(x) + Q(\bar{\phi}) \right\} =$$

$$= e^{-Q(\bar{\phi})} \int D\phi' \text{ EXP} \left\{ - \int \frac{1}{2} \phi'(x) A \phi'(x) \right\} = e^{-Q(\bar{\phi})} [\text{DET } A]^{-1/2} =$$

$$\int D\phi \text{ EXP} \left\{ - \int \left[ \frac{1}{2} \phi(x) A \phi(x) + \phi(x) B(x) + C \right] dx \right\} =$$

$$= \text{EXP} \left[ \frac{1}{2} \int B(x) A^{-1}(x, y) B(y) dx dy - C \right] [\text{DET } A]^{-1/2}$$

Voltando ao campo escalar livre vemos que:

$$A = i(\square + m^2 - i\varepsilon) \quad A^{-1} = i\Delta_F(x-y) \quad B = -iJ \quad C = 0$$

$$\int D\phi \text{ EXP} \left\{ -i \int dx \left[ \frac{1}{2} \phi (\square + m^2 - i\varepsilon) \phi - \phi J \right] \right\} =$$

$$= e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)} \left( \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x \phi (\square + m^2 - i\varepsilon) \phi \right\} \right)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{DET} \left[ i (\square + m^2 - i\varepsilon) \right]^{-1/2} = N}$$

Quanto a normalização de  $Z$ , temos que, na ausência de fontes:

$$\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^{J=0} = 1$$

É conveniente então redefinir  $Z$  de forma que  $Z_0[J] = \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J$

Note que na eq. 14.1 o que tínhamos feito era:  $Z_0[J] = N \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J$

Com isto temos  $Z_0[0] = 1$

O que pode ser obtido redefinindo 14.1 para:

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}q \exp \left[ i \int (L + Jq) dt \right]}{\int \mathcal{D}q \exp \left[ i \int L dt \right]}$$

(eq. 21.1)

Ou no caso do campo escalar redefinimos 17.1:

$$Z_0[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \phi (\square + m^2 - i\varepsilon) \phi - \phi J \right] \right\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \phi (\square + m^2 - i\varepsilon) \phi \right] \right\}}$$

(eq. 21.2)

A partir da qual obtemos a versão normalizada de 18.2:

$$\mathcal{Z}_0[\mathcal{J}] = \text{EXP} \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \mathcal{J}(x) \Delta_F(x-y) \mathcal{J}(y) \right\} \quad (\text{eq. 22.1})$$

De novo note a diferença para o Peskin, eq. 9.39

### Interpretação do funcional gerador

O funcional gerador é uma transição vácuo-vácuo, podemos vislumbrar o seu conteúdo físico expandindo a exponencial:

$$\mathcal{Z}_0[\mathcal{J}] = 1 - \frac{i}{2} \int d^4x d^4y \mathcal{J}(x) \Delta_F(x-y) \mathcal{J}(y) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{2}\right)^2 \left[ \int d^4x d^4y \mathcal{J}(x) \Delta_F(x-y) \mathcal{J}(y) \right]^2 + \dots \quad (\text{eq. 22.2})$$

$$\int d^4x d^4y \mathcal{J}(x) \Delta_F(x-y) \mathcal{J}(y) = \int d^4x d^4y \frac{d^4p_1 d^4p_2 d^4k}{(2\pi)^4} e^{-i p_1 x} e^{-i p_2 y} \frac{e^{-i k(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \mathcal{J}(p_1) \mathcal{J}(p_2) =$$

$$\mathcal{J}(x) = \int \mathcal{J}(p) e^{-i p x} d^4p$$

$$\Delta_F(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-i k(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

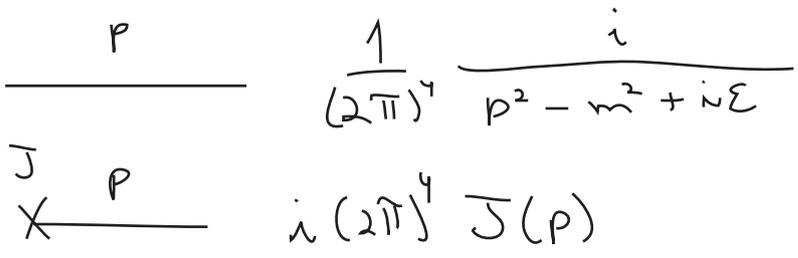
$$\int d^4x \Rightarrow (2\pi)^4 \delta(p_1 + k)$$

$$\int d^4y \Rightarrow (2\pi)^4 \delta(k - p_2)$$

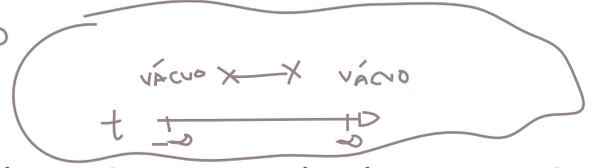
$$= (2\pi)^4 \int d^4k \frac{\mathcal{J}(-k) \mathcal{J}(k)}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\mathcal{Z}_0[\mathcal{J}] = 1 - \frac{i}{2} (2\pi)^4 \int d^4k \frac{\mathcal{J}(-k) \mathcal{J}(k)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{2}\right)^2 \left[ (2\pi)^4 \int d^4k \frac{\mathcal{J}(-k) \mathcal{J}(k)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right]^2 + \dots$$

O que pode ser escrito em diagramas de Feynman se definimos:



$$Z_0 = 1 + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \times \text{---} \times \\ \circ \\ \circ \end{array} + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \begin{array}{c} \times \text{---} \times \\ \times \text{---} \times \end{array} + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \begin{array}{c} \times \text{---} \times \\ \times \text{---} \times \\ \times \text{---} \times \end{array} + \dots$$



Cada propagador destes é o propagador de UMA partícula livre. Obtemos então uma teoria para muitas partículas, exatamente como queríamos. Cada termo nesta expansão é um correlator o que sugere como obter estes correlatores a partir de Z:

Esta expansão em série do funcional pode ser justificada se pensarmos na expansão de uma função e depois tomarmos o limite apropriado:

$$f(y_1, \dots, y_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1=1}^k \dots \sum_{i_n=1}^k \frac{1}{n!} T_n(i_1, \dots, i_n) y_{i_1} \dots y_{i_n}$$

$$T_n(i_1, \dots, i_n) = \frac{\delta^n R}{\delta y_{i_1} \dots \delta y_{i_n}} \Big|_{\vec{y}=0}$$

Definindo:  $y_i = y(x_i)$   $\hookrightarrow$   $i$ -ésima CÉLULA DE UM ESPAÇO DISCRETIZADO

podemos fazer o limite do contínuo:  $\sum_i \rightarrow \int dx$

$$F[y] = \sum_{n=0}^{\infty} \int dx_1 \dots dx_n \frac{1}{n!} T_n(x_1, \dots, x_n) y(x_1) \dots y(x_n)$$

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta y(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta y(x_n)} F[y] \Big|_{y=0}$$

F[y] é o funcional gerador da função  $T_n(x_1, \dots, x_n)$

De fato, se olharmos a expressão (22.2):

$$\begin{aligned}
 Z_0[J] &= 1 - \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \\
 &+ \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{2}\right)^2 \left[ \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right]^2 + \dots = \\
 &\frac{i^2}{2!} \left[ \frac{1}{4} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \Delta_F(x_1-x_2) \Delta_F(x_3-x_4) J(x_1) \dots J(x_4) \right]
 \end{aligned}$$

Vemos que estes produtos de propagadores (os correlatores) desempenham o mesmo papel da função T acima. Isso justifica o nome que já vínhamos usando para Z (funcional gerador) e permite reescrever a equação 15.1 em sua versão normalizada (e para campos):

$$\left. \frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} = i^n \langle 0 | T [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | T [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | 0 \rangle = \frac{1}{i^n} \left. \frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0}$$

Aqui as definições nossa e do Peskin "convergem", nós normalizamos antes, ele normaliza aqui (veja eq. 9.35) (eq. 24.1)

Isto nos dá uma forma prática de obter não só o propagador de uma partícula, mas todos os correlatores (funções de Green) da teoria.

### Correlatores da Teoria

Vejamos primeiro o correlator de dois pontos:

$$\langle 0 | T [\phi(x_1) \phi(x_2)] | 0 \rangle = - \left. \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0}$$

$$\frac{\delta Z_0}{\delta J(x)} = \frac{\delta}{\delta J(x)} \text{EXP} \left[ -\frac{i}{2} \int J(x') \Delta_F(x'-y) J(y) d^4x' d^4y' \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\delta}{\delta J(x)} \left\{ 1 - \frac{i}{2} \int \overbrace{J(x') \Delta_F(x'-y') J(y')}^{\mathbb{I}} dx' dy' + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{2}\right)^2 \left[ \int J(x') \Delta_F(x'-y') J(y') dx' dy' \right]^2 + \dots \right\} = \\
&= \left\{ 0 - \frac{i}{2} \left[ \int \Delta_F(x-y') J(y') dy' + \int J(x') \Delta_F(x'-x) dx' \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{2}\right)^2 \left[ \left( \int \Delta_F(x-y') J(y') dy' \right) \cdot \mathbb{I} + \left( \int J(x') \Delta_F(x'-x) dx' \right) \cdot \mathbb{I} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbb{I} \cdot \left( \int \Delta_F(x-y') J(y') dy' \right) + \mathbb{I} \cdot \left( \int J(x') \Delta_F(x'-x) dx' \right) \right] + \dots \right\} = \\
&= - \int \Delta_F(x-x_1) J(x_1) dx_1 \left\{ i + \frac{1}{2} \mathbb{I} + \dots \right\} \\
\frac{1}{i} \frac{\delta Z_0}{\delta J(x)} &= - \int \Delta_F(x-x_1) J(x_1) dx_1 \left\{ 1 - \frac{i}{2} \mathbb{I} + \dots \right\} = \\
&= - \int \Delta_F(x-x_1) J(x_1) dx_1 \exp \left[ -\frac{i}{2} \mathbb{I} \right] \quad (\text{eq. 25.1})
\end{aligned}$$

Obviamente isso fica mais fácil se usarmos a regra da cadeia para derivadas funcionais (não provamos, mas ela vale):

$$Z_0 = \bar{\text{Exp}} \left[ -\frac{i}{2} \mathbb{I} \right] \quad \frac{\delta Z_0}{\delta J(x)} = -\frac{i}{2} \frac{\delta \mathbb{I}}{\delta J(x)} \bar{\text{Exp}} \left[ -\frac{i}{2} \mathbb{I} \right]$$

$$\frac{\delta \mathbb{I}}{\delta J(x)} = 2 \int \Delta_F(x-x_1) J(x_1) dx_1$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{1}{i} \frac{\delta Z_0}{\delta J(y)} = \\
& = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \left\{ - \int \Delta_F(y-x_1) \bar{J}(x_1) dx_1 \text{Exp} \left[ -\frac{i}{2} \bar{J} J \right] \right\} = \\
& = \frac{1}{i} \left\{ - \Delta_F(y-x) - \int \Delta_F(y-x_1) \bar{J}(x_1) dx_1 \left( -\frac{i}{2} \frac{\delta \bar{J} J}{\delta J(x)} \right) \right\} \text{Exp} \left[ -\frac{i}{2} \bar{J} J \right] = \\
& = \frac{1}{i} \left\{ - \Delta_F(y-x) + i \int \Delta_F(y-x_1) \bar{J}(x_1) dx_1 \int \Delta_F(x-x_2) \bar{J}(x_2) dx_2 \right\} \text{Exp} \left[ -\frac{i}{2} \bar{J} J \right] \\
& \left. \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{1}{i} \frac{\delta Z_0}{\delta J(y)} \right|_{\bar{J}=0} = i \Delta_F(y-x)
\end{aligned}$$

$$\langle 0 | T [\phi(x_1) \phi(x_2)] | 0 \rangle = i \Delta_F(x_2 - x_1)$$

De 25.1 fica óbvio que:

$$\langle 0 | T [\phi(x)] | 0 \rangle = \frac{1}{i} \frac{\delta Z_0}{\delta J(x)} \Big|_{\bar{J}=0} = 0$$

Se aplicamos uma terceira derivação (função de 3 pontos) também obteremos zero:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{1}{i} \frac{\delta Z_0}{\delta J(y)} = - \left\{ i \Delta_F(y-x) \int \Delta_F(z-x_1) \bar{J}(x_1) dx_1 + \right. \\
& \left. + i \Delta_F(y-z) \int \Delta_F(x-x_2) \bar{J}(x_2) dx_2 + i \Delta_F(x-z) \int \Delta_F(y-x_1) \bar{J}(x_1) dx_1 + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \left\{ \int \Delta_F(y-x_1) \mathcal{J}(x_1) dx_1 \int \Delta_F(x-x_2) \mathcal{J}(x_2) dx_2 \int \Delta_F(x-x_3) \mathcal{J}(x_3) dx_3 \right\} \text{EXP} \left[ -\frac{i}{2} \mathcal{I} \right]$$

Que dá zero quando  $J = 0$

Na função de 4 pontos recuperamos termos que sobrevivem a  $J = 0$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(w)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(z)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x)} \frac{1}{i} \frac{\delta \mathcal{Z}_0}{\delta \mathcal{J}(y)} = \\ & = -\frac{1}{i} \left\{ i \Delta_F(y-x) \Delta_F(z-w) + i \Delta_F(y-z) \Delta_F(x-w) + \right. \\ & \quad \left. i \Delta_F(x-z) \Delta_F(y-w) \right\} \text{EXP} \left[ -\frac{i}{2} \mathcal{I} \right] + \dots \\ & \qquad \qquad \qquad \underbrace{\qquad \qquad \qquad}_{=0 \text{ QUANDO } J=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T [\phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4)] | 0 \rangle = \\ & = - \left[ \Delta_F(x_1-x_2) \Delta_F(x_3-x_4) + \Delta_F(x_1-x_3) \Delta_F(x_2-x_4) + \Delta_F(x_1-x_4) \Delta_F(x_2-x_3) \right] \end{aligned}$$

(eq. 27.1)

Estamos no caminho de provar o teorema de Wick (basta continuar calculando funções de mais pontos):

$$\langle 0 | T [\phi(x_1) \dots \phi(x_{2n})] | 0 \rangle = \sum_{\text{PERMUTS.}} \langle 0 | T [\phi(x_{r_1}) \phi(x_{r_2})] | 0 \rangle \dots \langle 0 | T [\phi(x_{r_{n-1}}) \phi(x_{r_n})] | 0 \rangle$$

### Campo escalar interagente ( $\lambda\phi^4$ )

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

Para o campo livre, fizemos a transição de 21.2 para 22.1 :

$$Z_0[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi (\square + m^2 - i\epsilon) \phi - \phi J\right]\right\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi (\square + m^2 - i\epsilon) \phi\right]\right\}} \Rightarrow Z_0[J] = \exp\left\{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)\right\}$$

A expressão da direita é mais conveniente para fazermos a derivação funcional em J. Gostaríamos de conseguir algo equivalente para a lagrangeana com interação.

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp\left\{i \int d^4x [\mathcal{L} + J\phi]\right\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp\left\{i \int d^4x \mathcal{L}\right\}} \Rightarrow ??$$

(essencialmente precisamos separar  $\phi$  de J)

$Z_0[J] \equiv$  func. gerador p/ campos livres

$Z[J] \equiv$  func. gerador p/ campos com interação

Vamos encontrar e resolver (em função de  $Z_0$ ) uma equação diferencial para Z:

$$\frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x) \exp\left\{i \int d^4x [\mathcal{L} + J\phi]\right\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp\left\{i \int d^4x \mathcal{L}\right\}} \quad (\text{eq. 28.1})$$

$\frac{\delta}{\delta J(x)} i \int d^4x' J(x') \phi(x) = i \phi(x)$

$$\hat{Z}[\phi] \equiv \frac{e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi)}}{\int \mathcal{D}\phi' e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi')}} \quad \leftarrow \frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \int \mathcal{D}\phi \phi(x) \hat{Z}[\phi] \exp\left[i \int d^4x J\phi\right]$$

(eq. 28.2)

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \hat{Z}[\phi] \exp\left[i \int d^4x J(x) \phi(x)\right]$$

(isto é basicamente a transformada de Fourier para funcionais)

$$i \frac{\delta \hat{Z}[\phi]}{\delta \phi(x)} = i \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \exp \left[ -i \int d^4x \left( \frac{1}{2} \phi (\square + m^2) \phi - \mathcal{L}_{\text{int}} \right) \right] \left[ \int \mathcal{D}\phi' e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi')} \right]^{-1}$$

(reescrevemos a lagrangeana como no começo da pag 17)

$$= \hat{Z}[\phi] \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left[ \int d^4x \left( \frac{1}{2} \phi (\square + m^2) \phi - \mathcal{L}_{\text{int}} \right) \right]$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi(y)} \int \frac{1}{2} \phi(x) (\square + m^2) \phi(x) d^4x =$$

$$= \frac{\delta}{\delta \phi(y)} \int \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) d^4x + \frac{\delta}{\delta \phi(y)} \int \frac{1}{2} \phi(x) \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) d^4x =$$

(usamos a propriedade do ex5, pag 10)

$$= m^2 \phi(y) + \int \frac{1}{2} \delta(x-y) \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) d^4x + \int \frac{1}{2} \phi(x) \frac{\delta}{\delta \phi(y)} \left[ \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) \right] d^4x =$$

$$= m^2 \phi(y) + \frac{1}{2} \square \phi(y) + \frac{1}{2} \int \phi(x) \partial_\mu \partial^\mu \left[ \frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} \right] d^4x =$$

podemos usar integração por partes (duas vezes) para transferir as derivadas para  $\phi(x)$

$$= (\square + m^2) \phi(y)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \phi(y)} \left[ - \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi(x)) \right] &= -i \int d^4x \delta(x-y) \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi)}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi(x)} = \\ &= -i \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi)}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi(y)} = \mathcal{L}'_{\text{int}}(\phi(y)) \end{aligned}$$

$$i \frac{\delta \hat{Z}[\phi]}{\delta \phi(x)} = \hat{Z}[\phi] \left[ (\square + m^2) \phi(x) - \mathcal{L}'_{\text{int}}(\phi(x)) \right]$$

Multiplicando os dois lados desta equação por:  $\exp \left[ i \int J(x) \phi(x) d^4x \right]$

e integrando em  $\phi$ :

$$\underbrace{\int \mathcal{D}\phi \frac{1}{i} \frac{\delta \hat{Z}[\phi]}{\delta \phi(x)} \text{EXP} \left[ i \int \mathcal{J}(x) \phi(x) d^4x \right]}_{\text{LHS}} =$$

$$= \underbrace{\int \mathcal{D}\phi \hat{Z}[\phi] \left[ (\square + m^2) \phi(x) - \mathcal{L}'_{\text{INT}}(\phi(x)) \right] \text{EXP} \left[ i \int \mathcal{J}(x) \phi(x) d^4x \right]}_{\text{RHS}}$$

$$\text{RHS} =$$

$$= (\square + m^2) \underbrace{\int \mathcal{D}\phi \hat{Z}[\phi] \phi(x) \text{EXP}[\ ]}_{\frac{1}{i} \frac{\delta \hat{Z}[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x)} \text{ (conforme eq. 28.2)}} - \underbrace{\int \mathcal{D}\phi \hat{Z}[\phi] \mathcal{L}'_{\text{INT}}(\phi(x)) \text{EXP}[\ ]}_{\text{NÃO TEM } \mathcal{J}}$$

$\frac{1}{i} \frac{\delta \hat{Z}[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x)} = \int \mathcal{D}\phi \phi(x) \hat{Z}[\phi] \text{EXP} [i \int \mathcal{J}(x) \phi(x) d^4x]$

Aqui aparece o passo fundamental

$$* \int \mathcal{L}'_{\text{INT}}(\phi(x)) \text{EXP} \left[ i \int \mathcal{J}(x) \phi(x) d^4x \right] = \int \mathcal{L}'_{\text{INT}} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}} \right) \text{EXP} \left[ i \int \mathcal{J}(x) \phi(x) d^4x \right]$$

$$\text{Ex: } \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x) \longrightarrow \frac{\lambda}{4!} \left( \frac{1}{i} \right)^4 \frac{\delta^4}{\delta \mathcal{J}(x)^4}$$

$$\frac{\lambda}{4!} \left( \frac{1}{i} \right)^4 \frac{\delta^4}{\delta \mathcal{J}(x)^4} \text{EXP} \left[ i \int \mathcal{J}(x) \phi(x) d^4x \right] = \frac{\lambda}{4!} i^4 \phi(x) \frac{\delta^3}{\delta \mathcal{J}(x)^3} \text{EXP} \left[ i \int \mathcal{J}(x) \phi(x) d^4x \right] =$$

$$= - \frac{\lambda}{4!} \phi^2(x) \frac{\delta^2}{\delta \mathcal{J}(x)^2} \text{EXP} \left[ i \int \mathcal{J}(x) \phi(x) d^4x \right] = - \frac{i \lambda}{4!} \phi^3(x) \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x)} \text{EXP} \left[ i \int \mathcal{J}(x) \phi(x) d^4x \right] =$$

$$= \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x) \text{EXP} \left[ i \int \mathcal{J}(x) \phi(x) d^4x \right]$$

... voltando à conta:

$$\text{RHS} = (\square + m^2) \frac{1}{i} \frac{\delta \hat{Z}[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x)} - \int \mathcal{L}'_{\text{INT}} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}} \right) \underbrace{\int \mathcal{D}\phi \hat{Z}[\phi] \text{EXP}[\ ]}_{\hat{Z}[\mathcal{J}]} =$$

$$= (\square + m^2) \frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} - \int_{\text{INT}} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) Z[J]$$

$$\text{LHS} = \int \mathcal{D}\phi \ i \frac{\delta \hat{Z}[\phi]}{\delta \phi(x)} \text{EXP} \left[ i \int J(x) \phi(x) d^4x \right] =$$

INTEGRAL POR PARTES

$$= i \hat{Z}[\phi] \text{EXP} \left[ i \int J(x) \phi(x) d^4x \right] - i \int \mathcal{D}\phi \ i J(x) \hat{Z}[\phi] \text{EXP} \left[ i \int J(x) \phi(x) d^4x \right]$$

0

Z[J]

Este é um termo de superfície no espaço dos campos (não no espaço de Minkowsky) pensando que estamos sempre fazendo a conta com  $\mathcal{F} \rightarrow (1+\epsilon)\mathcal{F}$  e este termo desaparecerá na "borda" ( $\phi \rightarrow \infty$ )

$$= J(x) Z[J]$$

Finalmente:

$$(\square + m^2) \frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} - \int_{\text{INT}} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) Z[J] = J(x) Z[J] \quad (\text{eq. 31.1})$$

↓  $\int_{\text{INT}} = 0$

$$(\square + m^2) \frac{1}{i} \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} = J(x) Z_0[J] \quad (\text{eq. 31.2})$$

Queremos resolver 31.1. Provaremos que a solução é:

$$Z[J] = N \text{EXP} \left\{ i \int \mathcal{L}_{\text{INT}} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) d^4x \right\} Z_0[J]$$

(eq. 31.3)

$$J(x) Z[J] = N J(x) \text{EXP} \left[ i \int \mathcal{L}_{\text{int}} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) dy \right] Z_0[J] =$$

$$\text{exp} \left[ -i \int \mathcal{L}_{\text{int}} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) dy \right] J(x) \text{exp} \left[ +i \int \mathcal{L}_{\text{int}} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) dy \right]$$

$$= J(x) - \mathcal{L}'_{\text{int}} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)$$

(provado na pag 199 do Ryder)

$$= N \text{EXP} \left[ i \int \mathcal{L}_{\text{int}} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) dy \right] \left[ J(x) - \mathcal{L}'_{\text{int}} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] Z_0[J] =$$

eq. 31.2  $(\square+m^2) \frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = J(x) Z[J]$

$$= N \text{EXP} \left[ i \int \mathcal{L}_{\text{int}} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) dy \right] \left[ (\square+m^2) \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} - \mathcal{L}'_{\text{int}} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] Z_0[J] =$$

$$Z[J] = N \text{EXP} \left\{ i \int \mathcal{L}_{\text{int}} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) dx \right\} Z_0[J]$$

$$= (\square+m^2) \frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} - \mathcal{L}'_{\text{int}} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) Z[J]$$

Em suma, para teorias interagentes, usaremos o funcional gerador (normalizado segundo o mesmo critério usado para o caso livre):

$$Z[J] = \frac{\text{EXP} \left[ i \int \mathcal{L}_{\text{int}} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) dy \right] \text{EXP} \left[ -\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right]}{\left\{ \text{EXP} \left[ i \int \mathcal{L}_{\text{int}} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) dy \right] \text{EXP} \left[ -\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right] \right\} \Big|_{J=0}}$$

(eq. 32.1)

Expansão perturbativa para  $\lambda\phi^4$ :

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

Só conseguimos tratar a exponencial de  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  que aparece na eq 32.1 por meio de uma série (que podemos truncar se  $\lambda$  é pequeno). Essa é a expansão perturbativa no formalismo funcional:

$$\text{EXP} \left[ i \int \mathcal{L}_{\text{int}} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) dz \right] =$$

$$= \text{EXP} \left[ -\frac{i\lambda}{4!} \int \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 dz \right] \approx 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 dz + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \text{EXP} \left[ -\frac{i}{2} \underbrace{\int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy}_{\mathcal{I}} \right] = - \int \Delta_F(z-x) J(x) dx e^{-\frac{i}{2} \mathcal{I}}$$

$$\left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^2 e^{-\frac{i}{2} \mathcal{I}} = \left( i \underbrace{\Delta_F(z-z)}_{?!} + \int \Delta_F(z-x) J(x) dx \int \Delta_F(z-x_2) J(x_2) dx_2 \right) e^{-\frac{i}{2} \mathcal{I}}$$

$$= \left[ i \Delta_F(0) + \left( \int \Delta_F(z-x) J(x) dx \right)^2 \right] e^{-\frac{i}{2} \mathcal{I}}$$

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \left( \int \Delta_F(z-x) J(x) dx \right)^n e^{-\frac{i}{2} \mathcal{I}} = \left\{ -n i \Delta_F(0) \left( \int \Delta_F(z-x) J(x) dx \right)^{n-1} - \left( \int \Delta_F(z-x) J(x) dx \right)^{n+1} \right\} e^{-\frac{i}{2} \mathcal{I}}$$

$$\left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^3 e^{-\frac{i}{2} \mathcal{I}} = \left[ -i \Delta_F(0) \int \Delta_F(z-x) J(x) dx + \right.$$

$$-2 i \Delta_F(0) \left( \int \Delta_F(z-u) J(u) du \right) - \left( \Delta_F(z-u) J(u) \right)^3 \Big] e^{-\frac{i}{2} I} =$$

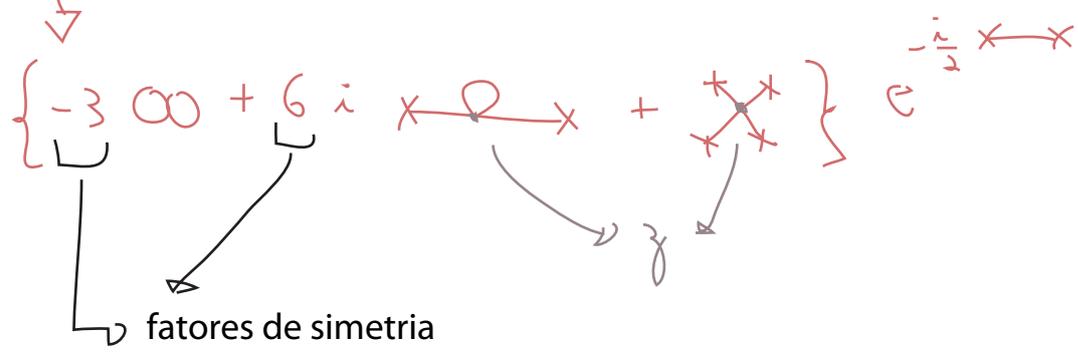
$$= \left\{ -3 i \Delta_F(0) \int \Delta_F(z-u) J(u) du - \left( \Delta_F(z-u) J(u) \right)^3 \right\} e^{-\frac{i}{2} I}$$

$$\left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 e^{-\frac{i}{2} I} = \left\{ -3 i \Delta_F(0) \left[ i \Delta_F(0) - \left( \Delta_F(z-u) J(u) \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. - \left[ -3 i \Delta_F(0) \left( \int \Delta_F(z-u) J(u) du \right)^2 - \left( \int \Delta_F(z-u) J(u) du \right)^4 \right] \right\} =$$

$$= \left\{ -3 \Delta_F^2(0) + 6 i \Delta_F(0) \left( \int \Delta_F(z-u) J(u) du \right)^2 + \left( \int \Delta_F(z-u) J(u) du \right)^4 \right\} e^{-\frac{i}{2} I}$$

DIAGRAMATICAMENTE:  $\Delta_F(x-y) \Rightarrow x \text{ --- } y$   
 $\Delta_F(0) \Rightarrow \bigcirc$   
 $J(x) \Rightarrow *$



É fácil obter Z em ordem  $\lambda$ , já que o denominador é obtido fazendo  $J = 0$ :

$$Z[J] = \frac{\left[ 1 - \frac{i \lambda}{4!} \int \left[ -3 \infty + 6 i x \bigcirc x + x x x x \right] dz \right]}{\left[ 1 - \frac{i \lambda}{4!} \int (-3 \infty) dz \right]} e^{-\frac{i}{2} I}$$

$$\left[ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int (-3 \infty) dz \right] \left[ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int (6i \cancel{x} \cancel{D_x} + \cancel{x} \cancel{x} \cancel{x} \cancel{x}) dz \right] =$$

$$= 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int (-3 \infty) dz - \frac{i\lambda}{4!} \int (6i \cancel{x} \cancel{D_x} + \cancel{x} \cancel{x} \cancel{x} \cancel{x}) dz + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$Z[J]_{\mathcal{O}(\lambda)} = \frac{\left[ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int (-3 \infty) dz \right] \left[ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int (6i \cancel{x} \cancel{D_x} + \cancel{x} \cancel{x} \cancel{x} \cancel{x}) dz \right]}{\left[ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int (-3 \infty) dz \right]} e^{-\frac{i}{2} I}$$

$$Z[J]_{\mathcal{O}(\lambda)} = \left[ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int (6i \cancel{x} \cancel{D_x} + \cancel{x} \cancel{x} \cancel{x} \cancel{x}) dz \right] e^{-\frac{i}{2} \int J \Delta_F J}$$

(eq. 35.1)

A partir desta, podemos obter os correlatores (em ordem  $\lambda$ )

Correlator de 2 pontos:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | 0 \rangle = - \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_2) \delta J(x_1)} \Big|_{J=0}$$

O termo com 4 Js  $\left( \begin{matrix} \cancel{x} \cancel{x} \\ \cancel{x} \cancel{x} \end{matrix} \right)$  não vai contribuir quando  $J = 0$ , o outro termo nos dá:

$$Z[J]_{\mathcal{O}(\lambda)} = - \frac{i\lambda}{4!} \int 6i \Delta_F(0) \left( \int \Delta_F(z-x) J(x) dx \right)^2 dz e^{-\frac{i}{2} I}$$

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)} = \frac{\lambda}{4i} \Delta_F(0) \left\{ 2 \Delta_F(z-x_1) \int \Delta_F(z-x) J(x) dx + \dots \right\} dz e^{-\frac{i}{2} I} =$$

nesse termo a potência de J aumentou

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} e^{-iI} = -i \int \Delta_F(x-x_1) J(x_1) dx_1 e^{-iI}$$

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)} = -\frac{\lambda}{2} \Delta_F(0) \int \Delta_F(z-x_1) \left\{ \Delta_F(z-x_2) + \dots \right\} dz e^{-\frac{i}{2} J^2}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathcal{O}(J^2)}$

$J=0$   
↓

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\}|0\rangle_{\mathcal{O}(J)} = -\frac{\lambda}{2} \Delta_F(0) \int dz \Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_2)$$

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\}|0\rangle = i \Delta_F(x_1-x_2) - \frac{\lambda}{2} \Delta_F(0) \int dz \Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_2) + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$= i \underbrace{\hspace{10em}} - \frac{\lambda}{2} \underbrace{\hspace{10em}} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$\Delta_F(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} d^4k$$

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{2} \Delta_F(0) \int \Delta_F(x_1-z)\Delta_F(x_2-z) dz &= \\ &= -\frac{\lambda}{2} \frac{\Delta_F(0)}{(2\pi)^8} \int \frac{e^{-ip(x_1-z)} e^{-iq(x_2-z)}}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)(q^2 - m^2 + i\epsilon)} d^4p d^4q d^4z = \\ &= -\frac{\lambda}{2} \frac{\Delta_F(0)}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)^2} d^4p \end{aligned}$$

$\int dz \rightarrow \delta(p+q)$

$$\langle 0|T[\phi(x_1), \phi(x_2)]|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \left[ i - \frac{\lambda}{2} \frac{\Delta_F(0)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right] d^4k$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \left[ 1 + \frac{i\lambda}{2} \frac{\Delta_F(0)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right] d^4k$$

$$\left[ 1 - \frac{\frac{1}{2} i \lambda \Delta_F(0)}{k^2 - m^2 + i \epsilon} \right]^{-1} \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} 1 + \frac{\frac{1}{2} i \lambda \Delta_F(0)}{k^2 - m^2 + i \epsilon} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$\langle 0 | T[\phi(x_1), \phi(x_2)] | 0 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i \epsilon} \cdot \frac{1}{\left[ 1 - \frac{\frac{1}{2} i \lambda \Delta_F(0)}{k^2 - m^2 + i \epsilon} \right]} d^4k =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i \epsilon - \frac{1}{2} i \lambda \Delta_F(0)}$$

$$m_{\mathcal{R}}^2 = m^2 + \frac{1}{2} i \lambda \Delta_F(0)$$

De fato isso também valeria para ordens superiores, já que teríamos uma série geométrica:

$$\frac{i}{k^2 - m^2 + i \epsilon} + \frac{i}{k^2 - m^2 + i \epsilon} (-i \lambda \Delta_F(0)) \frac{i}{k^2 - m^2 + i \epsilon} + \frac{i}{k^2 - m^2 + i \epsilon} \left[ (-i \lambda \Delta_F(0)) \frac{i}{k^2 - m^2 + i \epsilon} \right]^2 + \dots$$

$$= \frac{i}{k^2 - m^2 + i \epsilon} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda \Delta_F(0)}{k^2 - m^2 + i \epsilon}} = \frac{i}{k^2 - m^2 - \lambda \Delta_F(0) + i \epsilon}$$

$$\langle 0 | T[\phi(x_1), \phi(x_2)] | 0 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m_{\mathcal{R}}^2 + i \epsilon}$$

Isto é exatamente o que esperaríamos como o propagador de uma partícula livre de massa  $m_{\mathcal{R}}$ . O efeito das correções introduzidas pelos loops têm o efeito de modificar a massa da partícula.

A massa  $m_{\mathcal{R}}$  é chamada de massa física ou massa renormalizada, voltaremos a ela em breve, basta no momento notar que a contribuição:

$$\Delta_F(0) = \Delta_F(x-x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{k^2 - m^2 + i \epsilon} d^4k$$

é claramente divergente para  $k \rightarrow \pm \infty$

Correlator de 4 pontos:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \} | 0 \rangle = \left. \frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \right|_{J=0}$$

$$\lambda^0 = D - \left[ \Delta_F(x_1-x_2) \Delta_F(x_3-x_4) + \Delta_F(x_1-x_3) \Delta_F(x_2-x_4) + \Delta_F(x_1-x_4) \Delta_F(x_2-x_3) \right]$$

(veja eq. 27.1)

$$\lambda^1 = D - \frac{i\lambda}{4!} \int dz \left( \underbrace{6i \phi^2(x)}_A + \underbrace{\phi^4(x)}_B \right) e^{-\frac{i}{\hbar} I}$$

$$\lambda^1 = D - \frac{\delta^4}{\delta J_1 \dots \delta J_4} \left\{ \frac{\lambda}{4} \Delta_F(0) \int dz \left[ \int dx \Delta_F(z-x) J(x) \right]^2 \right\} e^{-\frac{i}{\hbar} I}$$

$I_J(z)$

$$= \frac{\delta^3}{i \delta J_1 i \delta J_2 i \delta J_3} \left\{ \frac{\lambda}{4} \Delta_F(0) \int dz \left[ \frac{1}{i} \partial \Delta_F(z-x_1) I_J(z) - I_J^2(z) I_J(x_4) \right] e^{-\frac{i}{\hbar} I} \right\} =$$

$$= \frac{\delta^2}{i \delta J_1 i \delta J_2} \left\{ \frac{\lambda}{4} \Delta_F(0) \int dz \left[ -2 \Delta_F(z-x_4) \Delta_F(z-x_3) + \right. \right.$$

$$\left. + 2i \Delta_F(z-x_4) I_J(z) I_J(x_3) - \frac{1}{i} 2 \Delta_F(z-x_3) I_J(z) I_J(x_4) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{i} I_J^2(z) \Delta_F(x_1-x_3) + \dots \right\} e^{-\frac{i}{\hbar} I} =$$

termos com potência maior que 2 em J (como só restam duas derivadas estes termos vão dar 0 quando J = 0)

$$= \frac{\int d^3x}{i \int d^3x_1} \left\{ \frac{\lambda}{4} \Delta_F(0) \int d^3y \left[ 2 \Delta_F(z-x_4) \Delta_F(z-x_3) \underline{I}_J(x_2) + \right. \right.$$

$$+ 2 \Delta_F(z-x_4) \left( \Delta_F(z-x_2) \underline{I}_J(x_3) + \Delta_F(x_3-x_2) \underline{I}_J(z) \right) +$$

$$+ 2 \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(z-x_2) \underline{I}_J(x_1) + 2 \Delta_F(z-x_3) \underline{I}_J(z) \Delta_F(x_4-x_2) +$$

$$\left. \left. + 2 \Delta_F(z-x_2) \underline{I}_J(z) \Delta_F(x_4-x_3) + \dots \right] e^{-\frac{i}{4} I} \right\} =$$

termos com potência maior que 1 em J

$$= \frac{\lambda}{4} \Delta_F(0) \int d^3x \left[ \frac{2}{i} \Delta_F(z-x_4) \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(x_2-x_1) + \right.$$

$$+ \frac{2}{i} \Delta_F(z-x_4) \left( \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(x_3-x_1) + \Delta_F(x_3-x_2) \Delta_F(z-x_1) \right) +$$

$$+ \frac{2}{i} \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(x_1-x_1) + \frac{2}{i} \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(x_4-x_2) +$$

$$\left. + \frac{2}{i} \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(x_4-x_3) + \dots \right] e^{-\frac{i}{4} I} =$$

termos com J

$J=0$

$$\Downarrow$$

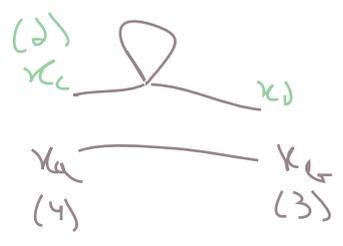
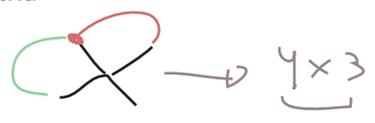
$$= -\frac{i\lambda}{4} \cdot 2 \Delta_F(0) \int d^3x \left[ \underbrace{\sum_{\text{PERMUT}} \Delta_F(z-x_a) \Delta_F(z-x_b) \Delta_F(x_c-x_d)} \right] =$$

São seis termos com todas as combinações de a,b,c,d=1,2,3,4

$$= -\frac{i\lambda}{4} 12 \left[ \begin{array}{c} x_a \text{---} \text{---} x_c \\ \text{---} \text{---} \\ x_b \text{---} \text{---} x_d \end{array} \right] = -\frac{i\lambda}{4!} (12 \times 6) \left[ \begin{array}{c} x_a \text{---} \text{---} x_c \\ \text{---} \text{---} \\ x_b \text{---} \text{---} x_d \end{array} \right] =$$

↳ Fator de Simetria

Fator de Simetria



$$\frac{4 \times 3}{2} \cdot \frac{2}{2} = 6$$

$$\Delta_F(\kappa_1 - \kappa_2) = \Delta_F(\kappa_3 - \kappa_4)$$

Temos ainda a contribuição do termo (batizado de "B" na pag 38):



$$- \frac{i\lambda}{4!} \int \left( \underbrace{6i \text{ (loop)}}_A + \underbrace{\text{ (vertex)}}_B \right) dz \quad \leftarrow -\frac{i}{2} I$$

$$B \rightarrow \frac{\delta^4}{\delta \bar{\psi} \delta \psi} \left\{ -\frac{i\lambda}{4!} \int dz \text{I}_3^4(z) e^{-\frac{i}{2} I} \right\} =$$

Não vou fazer esta conta, mas vale a pena fazer uma delas na vida, então vou colocar isso em uma lista

$$= -\frac{i\lambda}{4!} 24 \int \Delta_F(z - \kappa_1) \Delta_F(z - \kappa_2) \Delta_F(z - \kappa_3) \Delta_F(z - \kappa_4) dz =$$

$$= -\frac{i\lambda}{4!} \underbrace{24}_{\text{Fator de Simetria}} \left[ \text{ (vertex diagram)} \right]$$

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \} | 0 \rangle =$$

$$= -3 \left[ \text{ (loop diagram)} \right] - \frac{i\lambda}{4!} \left[ 72 \left( \text{ (loop diagram)} \right) + 24 \left( \text{ (vertex diagram)} \right) \right] + O(\lambda^2)$$

(eq. 40.1)

Com isso em mãos já conseguimos ver as regras de Feynman da teoria (no espaço das coordenadas):

$x \text{ --- } y \Rightarrow \Delta_F(x - y)$

$\text{ (vertex diagram)} \Rightarrow -i\lambda$

Fator de simetria  $\Rightarrow \frac{S}{4!}$

Notem que temos em 40.1, diagramas conexos e desconexos:

$$-3 \left[ \text{Diagrama 1} \right] - \frac{i\lambda}{4!} \left[ 7\lambda \left( \text{Diagrama 2} \right) + 2\lambda \left( \text{Diagrama 3} \right) \right]$$

Só contribuem para a parte trivial de um espalhamento (não há interação entre as partículas, apenas a propagação de duas partículas independentes)

É neste que estamos interessados

Podemos definir um funcional gerador que produz apenas os termos conexos:

$$Z[J] = e^{iW[J]} \quad W[J] = -i \ln Z[J]$$

correlator de 2-pontos:

$$\frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} = -i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left\{ \left[ \frac{1}{Z[J]} \right] \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)} \right\} = -i \left\{ \left[ \frac{-1}{Z[J]} \right] \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)} + \left[ \frac{1}{Z[J]} \right] \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right\}$$

$$\left. \frac{\delta Z}{\delta J(x)} \right|_{J=0} = 0 \quad Z[J=0] = 1 \quad \text{normalização}$$

$\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle$

$$\left. \frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = -i \left. \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = i \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | 0 \rangle$$

No caso da função de 2-pontos, W e Z são equivalentes (o que queríamos, já que não havia diagramas desconexos na função de 2 pontos)

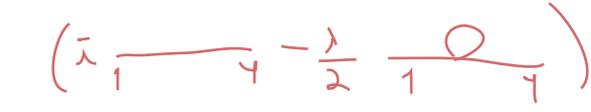
$$\frac{\delta^4 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \Big|_{J=0} = \frac{\delta^2}{\delta J(x_3) \delta J(x_4)} \left\{ \left[ \frac{i}{z[J]} \right] \frac{\delta z[J]}{\delta J(x_3)} + \left[ \frac{-i}{z[J]} \right] \frac{\delta^2 z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right\} = (\dots) =$$

(derivadas de ordem 1 e 3 desaparecem quando J = 0)

$$= \frac{1}{z^2} \left[ \frac{\delta^2 z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \frac{\delta^2 z}{\delta J(x_3) \delta J(x_4)} + \frac{\delta^2 z}{\delta J(x_1) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 z}{\delta J(x_2) \delta J(x_4)} + \dots \right]$$

$$\left[ \frac{1}{z^2} \frac{\delta^2 z}{\delta J(x_1) \delta J(x_4)} \frac{\delta^2 z}{\delta J(x_2) \delta J(x_3)} - \frac{1}{z} \frac{\delta^4 z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \right]_{J=0} =$$

$-\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_4) \} | 0 \rangle - \langle 0 | T \{ \phi(x_3) \phi(x_2) \} | 0 \rangle - \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \} | 0 \rangle$   
 (aqui estão contidos os diagramas conexos e desconexos)



$$\rightarrow A \rightarrow \left( \bar{1} \text{---} 4 \text{---} -\frac{\lambda}{2} \text{---} 1 \text{---} 4 \right) \left( \bar{2} \text{---} 3 \text{---} -\frac{\lambda}{2} \text{---} 2 \text{---} 3 \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{3} - \frac{i\lambda}{2} \frac{2}{1} \frac{3}{4} - \frac{i\lambda}{2} \frac{1}{2} \frac{4}{3} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

A + B Cancelamentos:

$$B \rightarrow \left[ -\frac{1}{3} \frac{2}{4} - \frac{1}{2} \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \frac{4}{3} - \frac{i\lambda}{4!} \left( \frac{1}{3} \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \right) \right]$$

$$\left( \frac{1}{2} \frac{4}{3} + \frac{3}{1} \frac{4}{2} + \frac{2}{1} \frac{4}{3} + \frac{2}{1} \frac{3}{4} \right) - \frac{i\lambda}{4!} \left( \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right)$$

4! TERMOS

Fica claro que os termos dentro de   também serão cancelados (pelos dois termos de derivadas de segunda ordem que ainda não consideramos em 42.1)

Podemos então definir um correlator de n-pontos **conexa** ou **irredutível**:

(não confundir com *one particle irreducible*, 1 PI, que é outra coisa que veremos mais a frente)

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}$$

No caso da função de quatro pontos:

$$i \phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \} | 0 \rangle +$$

$$- \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | 0 \rangle \langle 0 | T \{ \phi(x_3) \phi(x_4) \} | 0 \rangle$$

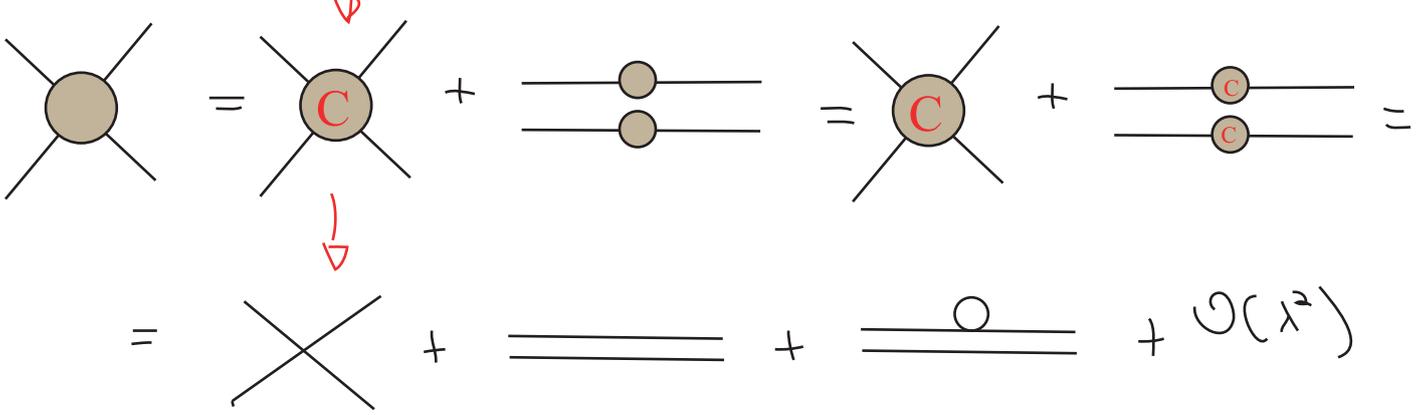
$$- \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_3) \} | 0 \rangle \langle 0 | T \{ \phi(x_2) \phi(x_4) \} | 0 \rangle$$

$$- \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_4) \} | 0 \rangle \langle 0 | T \{ \phi(x_2) \phi(x_3) \} | 0 \rangle$$

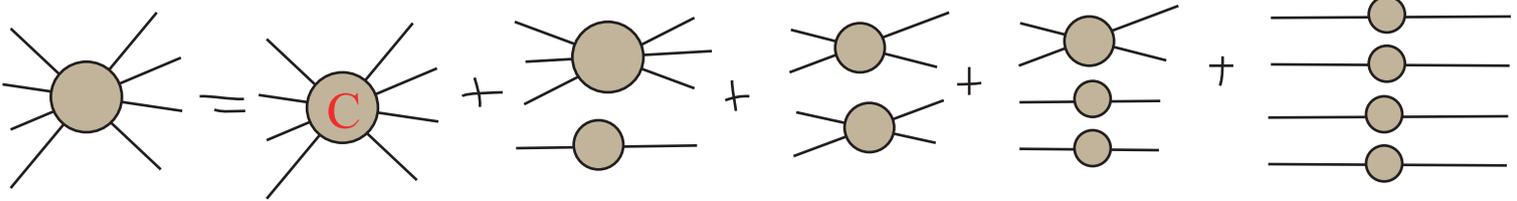
$i \phi(x_1, x_2)$

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \} | 0 \rangle = i \phi(x_1, \dots, x_4) - \sum_{\text{PERMUT}} \phi(x_a, x_b) \phi(x_c, x_d)$$

parte conexa parte desconexa



Para funções com n pontos, vale a mesma lógica:



## Paralelos entre Mecânica Estatística e Mec. Quântica

Interlúdio: um pouco de Quântica Estatística

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q)$$

$$\langle q_f | U(t) | q_i \rangle = \int \mathcal{D}q \, e^{\frac{i}{\hbar} S[q]}$$

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$$

$$S[q] = \int_0^t dt' \left[ \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q) \right]$$

Vamos supor que esta partícula está em contato com um banho térmico em temperatura  $T$ . As propriedades do sistema serão dadas pela matriz densidade:

(Não é essencial saber exatamente de onde vem isso para o que vamos ver, mas se você estiver interessado: em Mecânica Estatística Quântica: K. Huang, Statistical Mechanics, caps. 8.1 a 8.3)

para um sistema em equilíbrio:  $\hat{\rho}_\beta = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}}$

$\beta = \frac{1}{k_B T}$  fator de Boltzman  
 normalização

Esta é uma probabilidade e diz que, se o SISTEMA está em um dado autoestado de energia  $E$ , a probabilidade de encontrar a PARTÍCULA neste estado é

$$\frac{1}{Z} e^{-\beta E}$$

$$\text{Tr}[\hat{\rho}_\beta] = 1 \iff Z = \text{Tr}[\text{EXP}(-\beta \hat{H})] \quad \text{função de partição}$$

O valor esperado de qualquer observável  $\hat{O}$  é dado por:

$$\langle \hat{O} \rangle_\beta = \text{Tr}(\hat{\rho}_\beta \cdot \hat{O})$$

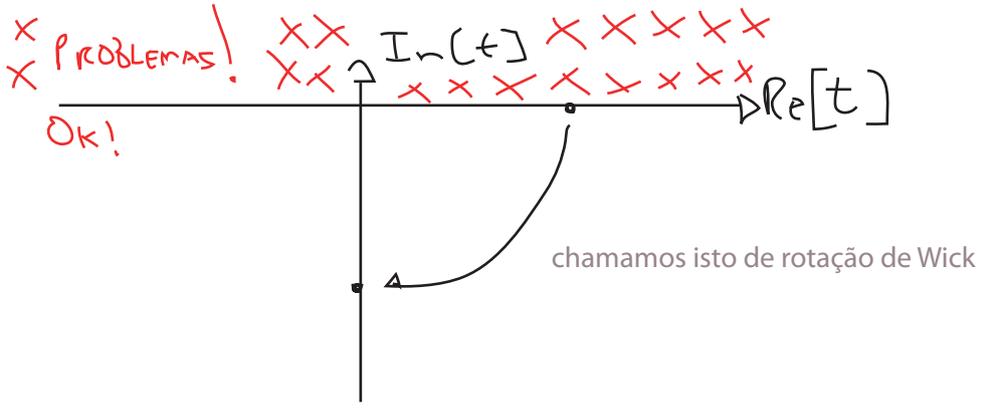
(fim do interlúdio)

Consideremos o operador de evolução:

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} = e^{-\frac{i}{\hbar} H \text{Re}[t]} e^{\frac{H \text{Im}[t]}{\hbar}}$$

$\left. \begin{matrix} > 1 \\ < 1 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{Im}[t] > 0 \\ \text{Im}[t] < 0 \end{matrix}$

O que acontece se fizermos a continuação analítica para o plano complexo em t? - U só é limitado para valores negativos de Im[t]:



$$\langle \Psi | U^\dagger U | \Psi \rangle \leq C \langle \Psi | \Psi \rangle$$

Olhemos o eixo imaginário:  $t = -i\tau$        $\tau > 0$

$$U(-i\tau) = e^{-\frac{\tau}{\hbar} H}$$

Obtemos uma exponencial do tipo que aparece na matriz densidade, então se fizermos:

$$\tau = \beta = \frac{\hbar}{k_B T} \quad \begin{cases} \rightarrow \rho = \frac{1}{Z} U(-i\tau) \\ \rightarrow Z = \text{Tr} [U(-i\tau)] \end{cases}$$

Vemos que a "evolução" de um sistema neste "tempo imaginário" serve para descrever as propriedades deste mesmo sistema em equilíbrio com um banho térmico.

Vejamos o que acontece com o elemento de matriz de U, definido por um integral de trajetória

$$\left. \begin{aligned} q(t) &\rightarrow q_E(\tau) \\ \frac{dq(t)}{dt} &\rightarrow \frac{dq_E(\tau)}{-i d\tau} = i \dot{q}_E(\tau) \\ \int dt &\rightarrow -i \int d\tau \end{aligned} \right\} S[q] \rightarrow -i \int_0^\tau d\tau' \left[ -\frac{m \dot{q}_E^2}{2} - V(q_E) \right] =$$

$$= \int_0^\tau d\tau' \left[ \frac{m \dot{q}_E^2}{2} + V(q_E) \right] = S_E[q]$$

(poderíamos refazer todo o processo de discretização para o tempo complexo, mas o procedimento "inocente" de fazer isto direto na integral de trajetória funciona)

$$Z_\beta = \int dq_a \langle q_a | U(-i\tau) | q_a \rangle =$$

TRAÇO

notem que estamos interessados na evolução que leva de um ponto a ele mesmo

$$= \int Dq_E \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S_E[q]\right)$$

$$q(\tau + \tau) = q(\tau)$$

A ação agora é a soma K + V (é uma hamiltoniana clássica)

Temos uma condição periódica cujo período  $\tau$  está relacionado com a temperatura:

$$\tau = \frac{\hbar}{k_B T}$$

Recapitulando:

Partícula (quântica) em temperatura T  $\rightarrow \int_\beta (e^{-\beta H})$ ,  $Z = \text{Tr} [e^{-\beta H}]$

↕

Partícula (quântica) em tempo imaginário  $\rightarrow U(-i\tau)$

isto é tudo que preciso saber, e posso obtê-lo daqui

... mas vai além. Pensemos num sistema relativístico (clássico):

$$ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2 \quad (- + + +)$$

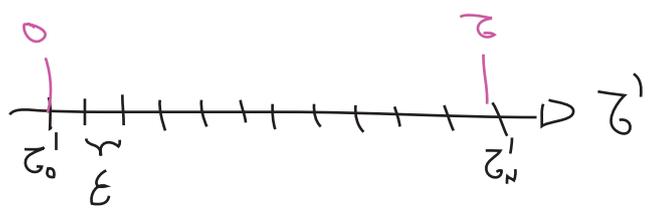
$$\downarrow t = -i\tau \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$ds_e^2 = d\tau^2 + d\vec{x}^2 \Rightarrow \text{distância Euclideana em } \mathbb{R}^{n+1}$$

Voltando ao sistema anterior, estávamos descrevendo uma partícula (não relativística) em 1 dimensão (espacial). Vejamos o que acontece se pensamos no parâmetro  $\tau'$  como uma distância, além disso, consideraremos um sistema simples (oscilador harmônico):

$$V(q) = \frac{m}{2} \omega^2 q^2$$

Discretizando o "tempo Euclideano":



$$\tau'_i = i \epsilon$$

$$q(\tau'_i) = q_i$$

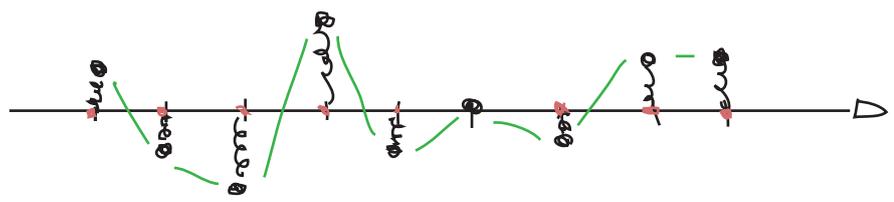
$$\int \mathcal{D}q_E \text{EXP} \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta} dt \left[ \frac{m \dot{q}_E^2}{2} + \frac{m}{2} \omega^2 q_E^2 \right] \right\}$$



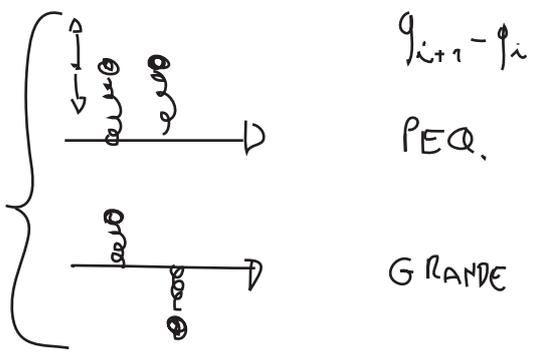
$$\int \prod dq_i \text{EXP} \left\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_i \mathcal{E} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{q_{i+1} - q_i}{\mathcal{E}} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q_i^2 \right] \right\}$$

$$Z = \underbrace{\int \prod dq_i}_{\text{"soma" todas as configurações } \{q_i\}} \underbrace{\text{EXP}}_{\frac{1}{\hbar}} \left\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_i \mathcal{E} \left[ \underbrace{\frac{m}{2} \left( \frac{q_{i+1} - q_i}{\mathcal{E}} \right)^2}_{\text{energia acoplamento entre vizinhos}} + \underbrace{\frac{m}{2} \omega^2 q_i^2}_{\text{energia}} \right] \right\}$$

Na prática temos um sistema de osciladores:



O termo de acoplamento entre vizinhos favorece "sincronização"



1 Oscilador Quântico  
(em Temp finita ou tempo imaginário)



Cadeia de osciladores clássicos acoplados

Futuações quânticas



Futuações térmicas

$$\hbar$$



$$k_B T$$

1 grau de liberdade



número grande graus de liberdade clássicos

Temperatura

$$T = \frac{\hbar}{k_B \tau}$$

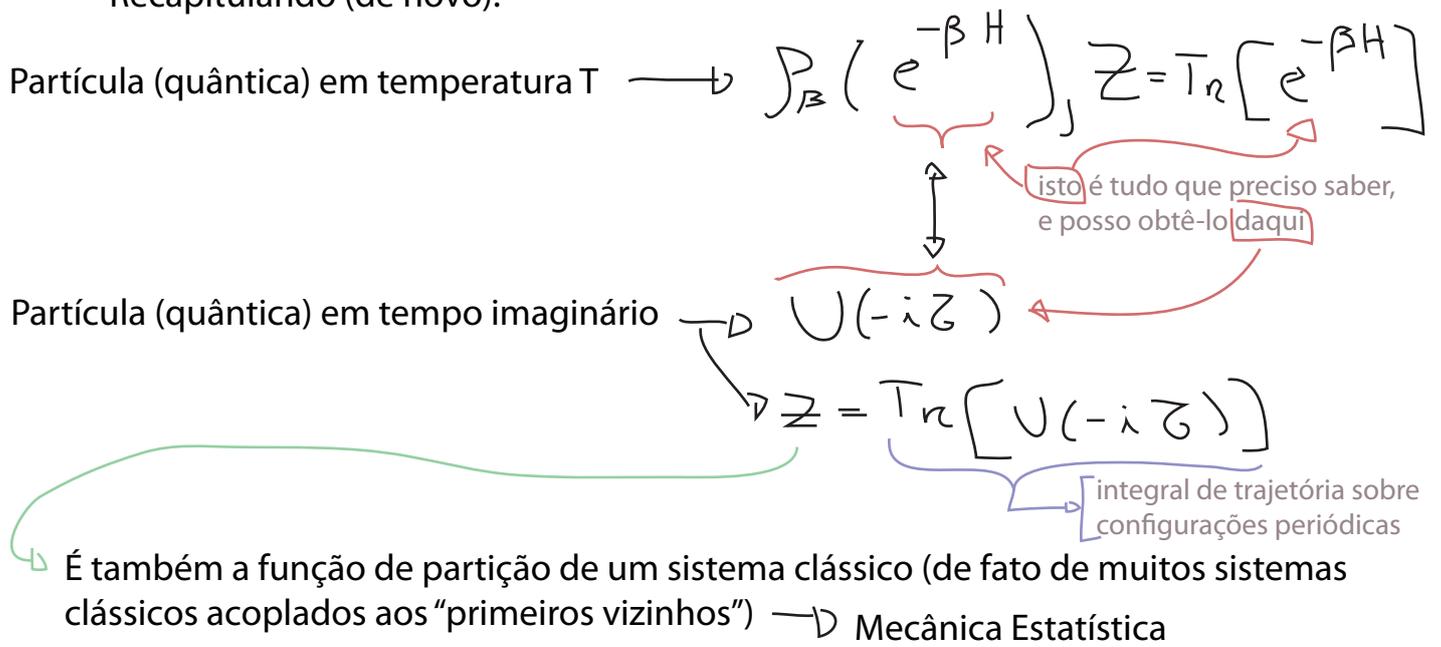
período



(Comprimento da Cadeia)<sup>-1</sup>

$$\tau^{-1}$$

Recapitulando (de novo):



Até agora vimos a relação entre o operador de evolução e a função de partição. E os observáveis?

$$\hat{A}(q) \xrightarrow{\text{quântica em } T}$$

$$\langle \hat{A}(q_{\epsilon}) \rangle_{\beta} = \text{Tr} [ \rho_{\beta} \cdot A(q_{\epsilon}) ] =$$

$$\beta = \frac{1}{k_B T_Q}$$

$$= \frac{\text{Tr} [ U_{\epsilon}(\tau) A(q_{\epsilon}) ]}{\text{Tr} [ U_{\epsilon}(\tau) ]}$$

$$\int \mathcal{D}q_{\epsilon} e^{-\frac{1}{\hbar} S_{\epsilon}[q_{\epsilon}]}$$

(em caminhos periódicos)

$$\text{Tr} [ \hat{U}_{\epsilon}(\tau) \hat{A}(q_{\epsilon}) ] = \int \mathcal{D}q_{\epsilon} e^{-\frac{1}{\hbar} S_{\epsilon}[q_{\epsilon}]} A(q_{\epsilon}(\tau_1))$$

período  $\frac{\tau}{\hbar} = \frac{1}{k_B T_Q}$

Notem que, pensando em  $\int \mathcal{D}q_{\epsilon}$  como a soma sobre as configurações de uma cadeia clássica, esta mesma definição dá o valor esperado em Mecânica Estatística para observáveis de um sistema de temperatura  $T_s = \frac{\hbar}{k_B}$

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}q_{\epsilon} e^{-\frac{1}{\hbar} S_{\epsilon}[q_{\epsilon}]} A(q_{\epsilon}(\tau_1))}{\int \mathcal{D}q_{\epsilon} e^{-\frac{1}{\hbar} S_{\epsilon}[q_{\epsilon}]}}$$

$$T_Q \rightarrow 0 \begin{cases} \beta \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau)] = \sum_n e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_n}$$

$$\tau \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_0} \gg e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_1} \gg e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_2}$$

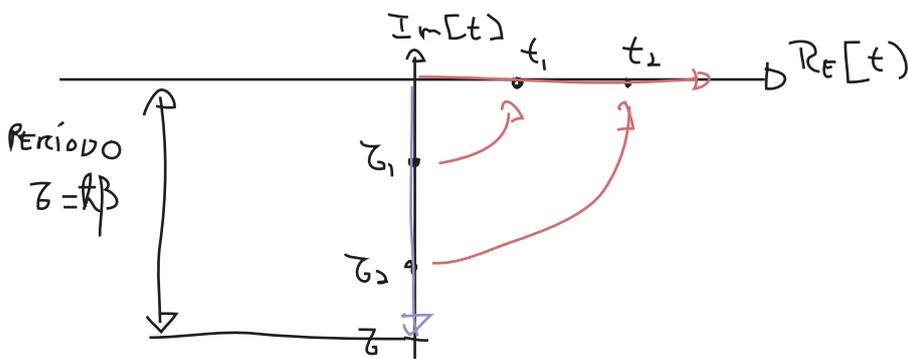
$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau \rightarrow \infty)] = \langle 0 | e^{-\frac{\tau}{\hbar} H} | 0 \rangle$$

$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau) \hat{A}(q_E)] = \langle 0 | \hat{A}(q_E) | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | \hat{A}(q_E) | 0 \rangle = \langle \hat{A} \rangle_{\beta \rightarrow \infty}$$

Mandar a temperatura para zero projeta os operadores no vácuo (estado fundamental) da teoria. Com isso podemos entender outra forma de obter os propagadores de Feynman:

$$\langle 0 | T [q(t_1) q(t_2)] | 0 \rangle$$



Podemos obter primeiro o valor

$$\langle q_E(z_1) q_E(z_2) \rangle_{\tau/\hbar} = \int_{\text{PERÍODO}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E} q_E(z_1) q_E(z_2)$$

$$(\tau_1 < \tau_2) \Rightarrow (t_1 < t_2)$$

e então voltar ao tempo real fazendo:

$$\tau_1 \rightarrow i t_1$$

$$\tau_2 \rightarrow i t_2$$

$$\Rightarrow \langle q(t_1) q(t_2) \rangle_{\tau/\hbar}$$

Se tivéssemos calculado a mesma coisa com  $\tau_2 < \tau_1$  (note que na integral de trajetória não há diferença, teríamos voltado para:

$$\langle q(t_2) q(t_1) \rangle_{\tau/\hbar}$$

ou seja, voltamos sempre no produto temporalmente ordenado:

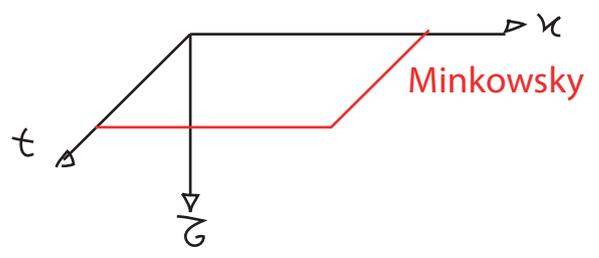
$$\langle T \{ \varphi(t_1) \varphi(t_2) \} \rangle_{z/\mu}$$

Para projetar no vácuo basta tomar temperatura zero

$$\left. \begin{matrix} \beta \rightarrow \infty \\ T \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \langle 0 | T \{ \varphi(t_1) \varphi(t_2) \} | 0 \rangle$$

Paralelos no caso do campo escalar

$$\phi(x^\mu) \quad x^\mu = (t, \vec{x}) \quad ds^2 = -dt^2 + |\vec{x}|^2$$



$$S[\phi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \right)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + J\phi \right] \right\}$$

$$\downarrow \tau = \lambda t$$

$$S[\phi] = \int -i d^4x_E \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \right)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + J\phi \right] \right\} =$$

$$= i \int d^4x_E \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \right)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 - J\phi \right\}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{S_E}$

Que é análogo a um sistema clássico (só que em 4 dimensões):

$$G = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{s})^2 + Q(T - T_c) s^2 + c s^4 - H s \right]$$

$G$  → energia livre de Gibbs

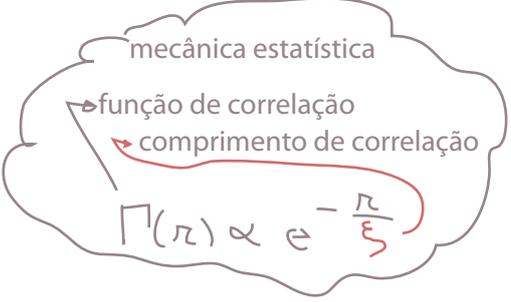
$S(x)$  → densidade de spin

$H$  → campo magnético

$T, T_c$  → temperatura, temp. crítica

$Q, c$  → constantes

$$\langle \phi(x_{E_1}) \phi(x_{E_2}) \rangle = \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{i k_E (x_{E_1} - x_{E_2})}}{k_E^2 + m^2} \underset{\substack{\sim e^{-m|x_{E_1} - x_{E_2}|} \\ |x_{E_1} - x_{E_2}| \rightarrow \infty}}{\approx}$$



Vemos que o comprimento de onda Compton dos quanta do campo ( $m^{-1}$ ) faz o papel do comprimento de correlação do sistema clássico análogo.

Finalmente, notamos que uma das formas em que podemos escrever os correlatores é:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) e^{i \int d^4x \phi(x) \hat{A} \phi(x)}}{\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \phi(x) \hat{A} \phi(x)}} = i \Delta_F(x_1 - x_2)$$

$$(\hat{D} + m^2 - i\epsilon) \Delta_F(x_1 - x_2) = -\delta^4(x_1 - x_2)$$

"integral kernel" de  $A^{-1}$

$A^{-1} \phi(x) = \int \Delta_F(x-y) \phi(y) dy$

ROTAÇÃO

$$\langle \phi(x_{E_1}) \phi(x_{E_2}) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_{E_1}) \phi(x_{E_2}) e^{-\int d^4x_E \phi(x_E) \hat{A} \phi(x_E)}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^4x_E \phi(x_E) \hat{A} \phi(x_E)}}$$

Isto é análogo ao cálculo de uma média de uma variável aleatória, variando conforme uma distribuição gaussiana Z:

$$\vec{\phi} = (\phi^a; a=1 \dots N) \quad \text{aleatório}$$

$$\langle \phi^a \phi^b \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\vec{\phi} \exp\left(-\frac{\phi^a A_{ab} \phi^b}{2}\right) = (A^{-1})_{ab}$$

A matriz N x N simétrica

$$Z = \int \mathcal{D}\vec{\phi} \exp\left\{-\frac{\phi^a A_{ab} \phi^b}{2}\right\}$$

*EM ALGUM SENTIDO GRANDE*

$$A \gg 1 \quad \text{[sharp peak]} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \ll 1 \Rightarrow \langle \phi_A \phi_B \rangle \text{ CURTO}$$

$$A \ll 1 \quad \text{[broad peak]} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \gg 1 \Rightarrow \langle \phi_A \phi_B \rangle \text{ LONGO}$$

Voltando para o espaço de Minkowsky isto nos permite entender porque a parte "on-shell" do propagador é responsável por partículas se propagando por longas distâncias:

$$\Delta_F(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$


---

## Quantização do Campo Eletromagnético

(Peskin 9.4, Ryder 7.1)

Começemos tentando o caminho ingênuo, análogo ao que fizemos no campo escalar:

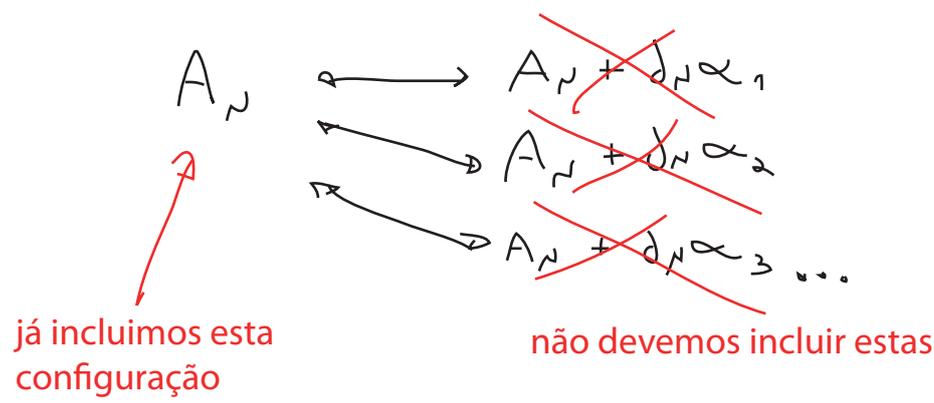
$$\begin{aligned} Z[J] &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi \ e^{i \int (\mathcal{L} + J\phi) dx} = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi \ e^{-i \int d^4x \left[ \underbrace{\frac{1}{2} \phi (\square + m^2 + i\epsilon) \phi}_{\hat{A}} - \phi J \right]} = \\ &= \text{EXP} \left[ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \ J(x) \underbrace{\Delta_F(x-y)}_{\text{KER}[\hat{A}^{-1}]} J(y) \right] \end{aligned}$$

No caso do campo eletromagnético (sem interação com a matéria):

$$\begin{aligned} Z[J] &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A_\mu \ e^{i \int (\mathcal{L} + J^\mu A_\mu) dx} \\ \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \end{aligned}$$



A raiz do problema está na invariância de gauge. Quando somamos sobre diversas configurações de  $A_\mu$ , somamos inclusive aquelas equivalentes (ligadas por uma transformação de gauge) o que é uma forma de "múltipla contagem".



Temos que forçar a nossa integral de trajetória a considerar somente estados inequivalentes por uma transformação de gauge. Uma forma óbvia de fazê-lo é **fixar o gauge**, mas como fazemos isto em uma integral de trajetória?

O truque que resolve foi proposto por Faddeev e Popov. Suponha que queiramos fazer nossa integral de trajetória com um **vínculo** qualquer, uma função do campo que queremos que seja zero:

Vínculo:  $G(A_\mu) = 0$

Podemos usar isso como fixação de gauge, ex:  $G(A_\mu) = \partial_\mu A^\mu = 0$   
Gauge de Lorenz

Podemos forçar a integral de trajetória a só considerar "caminhos" em que  $G = 0$ , fazendo:

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{iS} \rightarrow \int \mathcal{D}A_\mu \delta(G(A)) e^{iS}$$

$\prod_i \delta[G(A_\mu(x_i))]$

É claro que não podemos simplesmente inserir esta delta, mas:

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha \delta(G(A_\mu^\alpha)) \text{DET} \left[ \frac{\delta G(A_\mu^\alpha)}{\delta \alpha} \right]$$

$A_\mu^\alpha = A_\mu + d_\mu \alpha$

(!!!) para entender porque isso é verdade e como proceder, vamos pensar num caso mais simples:

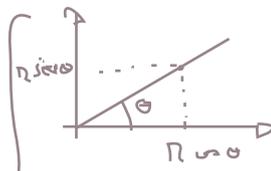
$$I = \iint dx dy e^{-(x^2 + y^2)} = \int d\theta \int dr r e^{-r^2} =$$

queremos uma expressão geral para fazer separações deste tipo

$$= \int d\theta \iint r d\theta' \pi e^{-\lambda^2} \underbrace{\delta(\theta')}_{\text{força a integral ao eixo x}} =$$

$$1 = \int d\theta' \delta(\theta')$$

Como escrever a identidade se escolhermos outro eixo?

$\delta(p(\theta'))$  

$$y \cos \theta = x \sin \theta$$

$$p(\theta) = y \cos \theta - x \sin \theta$$

$$\delta(p(\theta)) = \sum_i \frac{1}{\left| \frac{dp(\theta_i)}{d\theta'} \right|} \delta(\theta' - \theta_i) \quad p(\theta_i) = 0$$

$$y \cos \theta - x \sin \theta = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \theta_1 &= \text{ARCTAN}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta_2 &= \pi + \text{ARCTAN}\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{dp}{d\theta} \right|_{\theta_1, \theta_2} = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\delta(p(\theta')) = \frac{1}{r} [\delta(\theta - \theta_1) + \delta(\theta - \theta_2)]$$

$$\int d\theta \delta(p(\theta)) = \frac{2}{r} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow 1 = \Delta(r) \int \delta(p(\theta)) d\theta$$

$$\Delta(r) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}$$

Fazendo a rotação dos eixos: 
$$\begin{cases} y' = y \cos \theta - x \sin \theta \\ x' = x \cos \theta + y \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x'^2 + y'^2 \\ p(\theta) &= y' \end{aligned}$$

$$1 = \Delta(\sqrt{x^2 + y^2}) \int \delta(y) d\theta$$

voltando na integral original:

$$I = \iint dx' dy' e^{-(x'^2 + y'^2)} = \int d\theta \iint dx' dy' e^{-(x'^2 + y'^2)} \underbrace{\Delta(\sqrt{x'^2 + y'^2}) \delta(y')}_{\text{separação}}$$

aí está a separação que queríamos, possível por conta da invariância rotacional da integral inicial. Aprimorando um pouco a identidade:

$$\Delta(r)^{-1} = \int \delta(\rho(\theta)) d\theta = \int \delta(\rho(\theta)) \text{DET} \left| \frac{d\theta}{d\rho} \right| d\rho = \text{DET} \left| \frac{d\theta}{d\rho} \right|_{\rho=0}$$

$$\Delta(r) = \text{DET} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right|_{\rho=0}$$

$$1 = \int d\theta \delta(\rho(\theta)) \text{DET} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right|_{\rho=0}$$

podemos generalizar este procedimento para integrais em mais variáveis. Com infinitas delas obtemos:

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha \delta(G(A_N^\alpha)) \underbrace{\text{DET} \left[ \frac{\delta G(A_N^\alpha)}{\delta \alpha} \right]}_{\Delta_G[A_N]}$$

$$\Delta_G^{-1}[A_N] = \int \mathcal{D}\alpha \delta(G(A_N^\alpha))$$

$$A_N^\alpha = A_N + \delta_N \alpha$$

$$A_N^{\alpha + \alpha'} = A_N + \delta_N (\alpha + \alpha') \quad \alpha''$$

$$\Delta_G^{-1}[A_N^{\alpha'}] = \int \mathcal{D}\alpha \delta(G(A_N^{\alpha + \alpha'}))$$

$$\alpha'' = \alpha + \alpha' \quad \alpha \rightarrow \alpha'' \quad \mathcal{D}\alpha = \mathcal{D}\alpha''$$

$$\Delta_G^{-1}[A_N^{\alpha'}] = \int \mathcal{D}\alpha'' \delta(G(A_N^{\alpha''})) \leftarrow \Delta_G^{-1}$$

é inv. de Gauge, logo não depende de  $\alpha$

$$\Delta_G^{-1}[A_N^{\sim}] = \Delta_G^{-1}[A_N]$$

Notem que todo o "truque" só se aplica se pudermos aproveitar alguma simetria (a rotacional no exemplo simples, aqui a de Gauge), então temos que fazê-lo antes de introduzir as fontes:

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{i\int \mathcal{L} d^4x} = \int \mathcal{D}\alpha \underbrace{\int \mathcal{D}A_\mu e^{i\int \mathcal{L} d^4x} \delta(G(A_\mu^{\sim})) \Delta_G[A_N]} =$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu' - \partial_\mu \alpha \Rightarrow A_\mu^{\sim} = A_\mu + \partial_\mu \alpha$$

$$\mathcal{D}A_\mu = \mathcal{D}A_\mu'$$

$$\mathcal{L}(A_\mu) = \mathcal{L}(A_\mu')$$

$$= \left( \int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}A_\mu' e^{i\int \mathcal{L} d^4x} \delta(G(A_\mu')) \Delta_G[A_N]$$

note que nada aqui depende de  $\alpha$

→ infinito multiplicativo que queríamos separar do resto (vai embora na normalização)

Ainda falta entender como calcular:  $\Delta_G[A_N]$

Não precisamos (POR ENQUANTO\*) nos preocupar com este determinante, basta notar que além de invariante de Gauge ele é (PARA TEORIAS ABELIANAS\*) independente de  $A_\mu$ . Por exemplo, no Gauge de Lorentz:

Gauge de Lorentz

$$G(A_\mu) = \partial^\mu A_\mu \quad G(A_\mu^{\sim}) = \partial^\mu A_\mu + \partial^2 \alpha$$

$$\frac{\delta G(A_\mu^{\sim})}{\delta \alpha} = \frac{\delta}{\delta \alpha} (\partial^\mu A_\mu + \partial^2 \alpha) = \frac{\delta}{\delta \alpha} (\partial^2 \alpha)$$

\*se você ficou curioso, dê uma olhada na sessão 7.2 do Ryder, entre as eqs. 7.35 e 7.46. Quantizaremos teorias não-abelianas mais a frente

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{i\int \mathcal{L} d^4x} = \left( \int \mathcal{D}\alpha \right) (\Delta_G) \int \mathcal{D}A_\mu e^{i\int \mathcal{L} d^4x} \delta(G(A_\mu))$$

Tomando uma função de fixação de Gauge genérica:

$$G(A) = \int A_\mu(x) - \omega(x)$$

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{i\int \mathcal{L} d^4x} = \left( \int \mathcal{D}\alpha \right) (\Delta_G) \int \mathcal{D}A_\mu e^{i\int \mathcal{L} d^4x} \delta(\int A_\mu - \omega)$$

A expressão vale para qualquer  $\omega$ . Posso inclusive integrar em  $\omega$  de ambos os lados, usando uma função que escolherei gaussiana para a distribuição dos  $\omega(x)$

$$N(\xi) \int \mathcal{D}\omega e^{-i\int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi}} \int \mathcal{D}A_\mu e^{i\int \mathcal{L} d^4x} =$$

$$= N(\xi) \int \mathcal{D}\omega e^{-i\int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi}} \left( \int \mathcal{D}\alpha \right) (\Delta_G) \int \mathcal{D}A_\mu e^{i\int \mathcal{L} d^4x} \delta(\int A_\mu - \omega)$$

$$N(\xi) \text{ é uma normalização, que garante que } N(\xi) \int \mathcal{D}\omega e^{-i\int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi}} = 1$$

Nada muda no lado esquerdo da equação a cima, mas posso integrar em  $\omega$  do lado direito, usando a função  $\delta$

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{i\int \mathcal{L} d^4x} = N(\xi) \left( \int \mathcal{D}\alpha \right) (\Delta_G) \int \mathcal{D}A_\mu e^{i\int \mathcal{L} d^4x} e^{-i\int d^4x \frac{1}{2\xi} (\int A_\mu)^2}$$

O resultado final é equivalente a simplesmente modificar a Lagrangeana:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{EFF}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{GF}}$$

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi} (\partial^\nu A_\nu)^2 \quad \text{Termo de fixação de gauge (gauge fixing)}$$

Obs.: para lembrar como o problema (e a solução) aparecem no contexto da quantização canônica, veja o Ryder (pgs 146-147)

Então temos agora:

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{i\int \mathcal{L} d^4x} = N(\xi) \left( \int \mathcal{D}\alpha \right) \left( \Delta_G \right) \int \mathcal{D}A_\mu e^{i\int \mathcal{L}_{EFF} d^4x}$$

Para esta nova lagrangeana introduzimos a fonte e obtemos o funcional gerador devidamente normalizado:

$$\mathcal{Z}[\mathcal{J}] = \frac{1}{N_z} N(\xi) \left( \int \mathcal{D}\alpha \right) \left( \Delta_G \right) \int \mathcal{D}A_\mu e^{i\int (\mathcal{L}_{EFF} + \mathcal{J}^\mu A_\mu) d^4x}$$

$$N_z = N(\xi) \left( \int \mathcal{D}\alpha \right) \left( \Delta_G \right) \int \mathcal{D}A_\mu e^{i\int \mathcal{L}_{EFF} d^4x}$$

$$\mathcal{Z}[\mathcal{J}] = \frac{\int \mathcal{D}A_\mu e^{i\int (\mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{J}^\mu A_\mu) d^4x}}{\int \mathcal{D}A_\mu e^{i\int (\mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF}) d^4x}}$$

Podemos então tentar novamente o procedimento de completar quadrados e separar a parte da fonte. A parte quadrática nos campos agora fica:

$$\int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} A^\mu (g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu) A^\nu - \frac{1}{2\xi} (\partial_\nu A^\nu)^2 \right] =$$

$$= \int d^4x \left[ \frac{1}{2} A^\mu (g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu) A^\nu + \frac{1}{2\xi} A^\mu (\partial_\mu \partial_\nu) A^\nu \right]$$

$$= \int d^4x \frac{1}{2} A^\mu \left[ g_{\mu\nu} \square + \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu =$$

temos que inverter este operador

No espaço dos momentos temos:

$$= \int d^4x \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{A}^\mu(k_1) e^{-ik_1x} \left[ g_{\mu\nu} \square + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \partial_\mu \partial_\nu \right] \tilde{A}^\nu(k_2) e^{-ik_2x} =$$

$$= \int d^4x \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{A}^\mu(k_1) e^{-ik_1x} \left[ -\partial_{\mu\nu}(k_2)^2 - \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) k_{2\mu} k_{2\nu} \right] \tilde{A}^\nu(k_2) e^{-ik_2x} =$$

$$= \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \delta^4(k_1 + k_2) \frac{1}{2} \tilde{A}^\mu(k_1) \left[ \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k_{2\mu} k_{2\nu} - g_{\mu\nu}(k_2)^2 \right] \tilde{A}^\nu(k_2) =$$

$$k \equiv k_1$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{A}^\mu(k) \left[ \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2 \right] \tilde{A}^\nu(-k)$$

atenção: aqui segui a notação do Peskin - incluindo um fator "i" na definição do propagador. No caso do escalar, usei a do Ryder, de forma que

$$\Delta_F(p) = \frac{1}{p^2 - m^2} \quad \langle T\{\phi\phi\} \rangle = i \Delta_F(x-y)$$

No Peskin é definido:

$$D_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} \quad \langle T\{\phi\phi\} \rangle = D_F(x-y)$$

No caso do fóton o Ryder faz:

$$\left[ \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2 \right] D(k)^{\nu\mu} = -\delta_\mu^\nu$$

$$\tilde{D}(k)_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[ g_{\mu\nu} + \left(\xi - 1\right) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]$$

Este operador tem inverso e podemos mostrar que este é:

$$\tilde{D}(k)_{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left[ g_{\mu\nu} + \left(\xi - 1\right) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]$$

$$\hat{A}_{\mu\nu} \tilde{D}(k_2)^{\nu\mu} = \left[ \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2 \right] \frac{-i}{k^2} \left[ g^{\mu\nu} + \left(\xi - 1\right) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] =$$

$$= -\frac{i}{k^2} \left[ \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k_\nu - \delta_{\nu}^\mu k^2 + \left(\xi - 1 + \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k_\nu + \left(-\xi + 1\right) k_\nu k^\mu \right] = i \delta_{\nu}^\mu$$

Assim temos o propagador em alguns Gauges conhecidos:

$$\xi = 1 \Rightarrow \tilde{D}(k)_{\mu\nu} = \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

(Gauge de Feynman)

$$\xi = 0 \Rightarrow \tilde{D}(k)_{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left[ g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]$$

(Gauge de Landau)

Como estamos falando de uma teoria livre, a única regra de Feynman que podemos obter é mesmo a do propagador

# Quantização de Campos Espinoriais

(Peskin 9.5, Ryder 6.7)

No caso da quantização canônica, era necessário (para evitarmos estados de energia negativa) exigir que os campos de férmions satisfizessem relações de anti-comutação:

$$\{ \psi(x), \psi(y) \} = 0$$

Isto é simples quando estes campos são operadores, mas agora queremos fazer a troca:

$$\langle \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(y) \rangle = \int \mathcal{D}\psi \underbrace{\psi(x)} \underbrace{\psi(y)} e^{iS}$$

não são operadores, mas precisamos que anti-comutem

$$\langle \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(y) \rangle = - \langle \hat{\psi}(y) \hat{\psi}(x) \rangle$$

Precisamos de funções definidas em um espaço de **números complexos que anti-comutem**, o que já havia sido proposto antes por Grassmann. Os números de Grassmann satisfazem a seguinte propriedade:

$$\{ \theta, \eta \} = \theta \eta + \eta \theta = 0$$

um par de números de Grassmann se comporta como um número usual

O que tem diversas consequências:

$$\theta^2 = 0$$

$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 = -\eta_1 \eta_3 \eta_2 = \eta_3 \eta_1 \eta_2$$

$$f(\theta, \eta) = a_0 + a_1 \theta + a_2 \eta + a_3 \theta \eta + a_4 \theta^2 \eta + a_5 \theta \eta^2$$

$\in \mathbb{C}$

Há uma ambiguidade na definição de derivada (temos que decidir se ela age pela direita ou esquerda):

$$\frac{\partial^L}{\partial \theta} f(\theta, \eta) = a_1 + a_3 \eta$$

$$\frac{\partial^R}{\partial \theta} f(\theta, \eta) = a_1 - a_3 \eta$$

$$\frac{\partial^L}{\partial \eta} f(\theta, \eta) = a_2 - a_3 \theta$$

$$\frac{\partial^R}{\partial \eta} f(\theta, \eta) = a_2 + a_3 \theta$$

Definiremos:  $\frac{\delta}{\delta \eta} = \frac{\delta^L}{\delta \eta}$

$$\eta \frac{\delta f}{\delta \eta} = a_2 \eta - a_3 \eta \theta = \underbrace{a_2 \eta + a_3 \theta \eta}_f$$

$$\eta f = a_0 \eta + a_1 \eta \theta \Rightarrow \frac{\delta}{\delta \eta} (\eta f) = \underbrace{a_0 + a_1 \theta}_f$$

$$\left( \eta \frac{\delta}{\delta \eta} + \frac{\delta}{\delta \eta} \eta \right) f = f \rightarrow \left\{ \eta_i, \frac{\delta}{\delta \eta_j} \right\} = \delta_{ij}$$

$$\left\{ \frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{\delta \theta} \right\} = 0$$

Para definir integrais é natural assumir que os infinitesimais de Grassmann também anti-comutam:

$$\{\theta, d\eta\} = 0$$

$$\{d\theta, d\eta\} = 0$$

que resolve outra ambiguidade de sinal (se fizemos primeiro a integral de fora o sinal fica invertido)

$$\int d\theta d\eta f(\theta, \eta) \equiv \int d\theta \left[ \int d\eta f(\theta, \eta) \right]$$

$$f(\theta, \eta) = 1 \Rightarrow \left( \int d\theta \right)^2 = \int d\theta \int d\eta = \int d\theta d\eta = - \int d\eta d\theta = - \left( \int d\theta \right)^2$$

$$\int d\theta = 0$$

$F(\theta) = \int d\theta f(\theta)$   
 $F(\theta)$  tem que ser linear, já que todas expansões aqui só vão até ordem 1

$$\int d\theta f(\theta) = \int d\theta (a_1 + a_2 \theta) = a_2 \int d\theta \theta \Rightarrow \int d\theta \theta = ?$$

Adicionalmente, queremos que:

$$\Theta \rightarrow \Theta + \eta \Rightarrow \int d\Theta f(\Theta) = \int d\Theta f(\Theta + \eta)$$

$$F(\Theta) = F(\Theta + \eta)$$

$$A + B\Theta = A + B(\Theta + \eta)$$

$$\forall \Theta, \eta \Rightarrow B = 0$$

para satisfazer essa propriedade  $\int d\Theta \Theta$  tem que ser uma constante

$$\int d\Theta \Theta = 1$$

$$\begin{aligned} \int d\Theta f(\Theta, \eta) &= \int d\Theta (a_0 + a_1\Theta + a_2\eta + a_3\Theta\eta) = \\ &= a_1 + a_3\eta = \frac{d}{d\Theta} f(\Theta, \eta) \end{aligned}$$

Para números de Grassmann complexos:

$$(\Theta \eta)^* \equiv \eta^* \Theta^* = -\Theta^* \eta^* \left\{ \begin{array}{l} \int d\eta = \int d\eta^* = 0 \\ \int d\eta \eta = \int d\eta^* \eta^* = 1 \end{array} \right.$$

$$e^{-\eta^* \Theta \eta} = 1 - \eta^* \Theta \eta$$

$$\int d\eta^* d\eta e^{-\eta^* \Theta \eta} = \int d\eta^* d\eta (1 - \eta^* \Theta \eta) = \int d\eta^* d\eta (1 + \eta \eta^* \Theta) = \Theta$$

$$\int d\eta^* d\eta e^{-\eta^* \eta} = \mathcal{L}$$

$$\int d\eta^* d\eta \eta \eta^* e^{-\eta^* \eta} = \frac{1}{\mathcal{L}} \cdot \mathcal{L}$$

compare com (pg 19):

$$\int \frac{d\bar{z}^\top}{(2\pi i)^2} \frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}} e^{-z^* \cdot \mathcal{L} z} = \frac{1}{\mathcal{L}}$$

$$\int \frac{d\bar{z}^\top}{(2\pi i)^2} \frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}} z z^* e^{-z^* \cdot \mathcal{L} z} = \frac{1}{\mathcal{L}} \cdot \frac{1}{\mathcal{L}}$$

Suponha um caso bidimensional:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad \bar{\eta} = (\eta_1^* \quad \eta_2^*)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\eta} \eta)^2 &= (\eta_1^* \eta_1 + \eta_2^* \eta_2)^2 = \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2 + \eta_2^* \eta_2 \eta_1^* \eta_1 = \\ &= 2 \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2 \end{aligned}$$

$$e^{-\bar{\eta} \eta} = 1 - \eta_1^* \eta_1 + \eta_2^* \eta_2 + \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2$$

$$d\bar{\eta} d\eta \equiv d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2$$

$$\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta} \eta} = \int d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2 \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2 = 1$$

$$\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta} \eta} = 1$$

Fazendo uma mudança de variáveis, obtemos:

$$\eta = M \alpha \quad M, N \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

$$\bar{\eta} = \bar{\alpha} N$$

$$\eta_1 \eta_2 = (M_{11} \alpha_1 + M_{12} \alpha_2) (M_{21} \alpha_1 + M_{22} \alpha_2) =$$

$$= (M_{11} M_{22} + M_{12} M_{21}) \alpha_1 \alpha_2 = \text{DET}[M] \alpha_1 \alpha_2$$

Então, se queremos que:  $\int d\eta_1 d\eta_2 \eta_1 \eta_2 = \int d\alpha_1 d\alpha_2 \alpha_1 \alpha_2$

temos que exigir:  $d\eta_1 d\eta_2 = (\text{DET}[M])^{-1} d\alpha_1 d\alpha_2$   
o contrário do que temos normalmente

da mesma forma:  $d\eta_1^* d\eta_2^* = (\text{DET}[N])^{-1} d\alpha_1^* d\alpha_2^*$

então:

$$1 = \int d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2 e^{-\bar{\eta} \cdot \eta} = \int \frac{d\alpha_1^* d\alpha_2^*}{\text{DET}[N]} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{\text{DET}[M]} e^{-\bar{\alpha} N M \alpha} = \frac{1}{\text{DET}[NM]} \int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 e^{-\bar{\alpha} \underbrace{NM}_{A} \alpha}$$

$$\int d\bar{\alpha} d\alpha e^{-\bar{\alpha} \cdot A \alpha} = \text{DET}[A]$$

Provamos isso para 2D, mas a mesma coisa poderia ter sido feita para mais dimensões.

compare novamente com a pg 19:  $\int \frac{d^n \bar{z}^*}{(2\pi i)^n} \frac{d^n z}{(2\pi i)^n} e^{-\bar{z}^* \cdot A z} = (\text{DET} A)^{-1}$

Usando derivadas em a, podemos também mostrar que:

$$\int d\bar{\alpha} d\alpha \alpha_i \bar{\alpha}_j e^{-\bar{\alpha} \cdot A \alpha} = (A^{-1})_{ij} \text{DET}[A]$$

Podemos definir uma "função de Grassmann" como:

$$\psi(x) = \sum_i \psi_i \phi_i(x)$$

$\{\phi_i\}$  base de funções usuais  
 coeficientes são números de Grassmann

E generalizar as integrais funcionais Gaussianas para funções deste tipo:

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\int \bar{\psi} \cdot A \psi} = \mathcal{D} \epsilon_T [A]$$

Com isso podemos voltar aos campos de Dirac.

$\phi_i(x) \rightarrow$  espinores

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta$$

Fontes  
 (Grassmann)

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right] \right\}$$

$$\mathcal{N} = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \bar{\psi} \underbrace{(i \gamma^\mu \partial_\mu - m)}_{\hat{A}} \psi \right] \right\}$$

Podemos seguir o mesmo procedimento de completar quadrados usado anteriormente para separar as fontes dos campos. Neste caso obtemos:

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi + \psi_0 \qquad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} + \bar{\psi}_0$$

$$\Psi_0 = -(A^{-1})\eta \quad \bar{\Psi}_0 = -\bar{\eta} (A^{-1})$$

$$D\Psi' = D\Psi \quad D\bar{\Psi}' = D\bar{\Psi}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \hat{A} \Psi + \bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta &\rightarrow \left\{ (\bar{\Psi} - \bar{\eta} A^{-1}) \hat{A} (\Psi - A^{-1} \eta) + \bar{\eta} \Psi + \right. \\ &\quad \left. - \bar{\eta} A^{-1} \eta + \bar{\Psi} \eta - \bar{\eta} A^{-1} \eta \right\} = \bar{\Psi} A \Psi - \bar{\eta} A^{-1} \eta \end{aligned}$$

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta] = \frac{1}{N} \int D\bar{\Psi} D\Psi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \bar{\Psi} (i \gamma^\mu d_\mu - m) \Psi - \int d^4y (\bar{\eta} A^{-1} \eta) \right] \right\} =$$

$$= \exp \left\{ -i \int d^4x d^4y \bar{\eta} A^{-1} \eta \right\} \cdot \frac{1}{N} \int D\bar{\Psi} D\Psi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \bar{\Psi} (i \gamma^\mu d_\mu - m) \Psi \right] \right\}$$

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta] = \exp \left\{ -i \int d^4x d^4y \bar{\eta} A^{-1} \eta \right\}$$

(eq. 67.1)

Resta apenas obter  $A^{-1}$ :

$$A A^{-1} = (i \gamma^\mu d_\mu - m) A^{-1}(x-y) = S^\gamma(x-y)$$

$$A^{-1}(x-y) \equiv S(x-y) = (\gamma_\mu d^\mu + m) \Delta_F(x-y)$$

o mesmo do campo escalar

$$\begin{aligned} (i \gamma^\mu d_\mu - m) (\gamma_\mu d^\mu + m) \Delta_F(x-y) &= \\ = (-\square - m^2) \Delta_F(x-y) &= S^\gamma(x-y) \end{aligned}$$

pg 18

$$\gamma^\mu d_\mu \gamma_\mu d^\mu = (\gamma^\mu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma^\mu) d_\mu d^\mu = 2 \square - \gamma^\mu \gamma^\mu d_\mu d^\mu$$

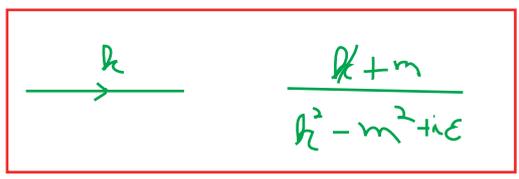
$$\square = \gamma^\mu d_\mu \gamma_\mu d^\mu$$

$$S(x-y) = (\not{x} \not{y} + m) \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} d^4k =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\not{x} \not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ikx} d^4k$$

novamente é preciso atentar para notação, segui aqui o Ryder, no Peskin está definido como:  
 $S(k) = \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i}{k - m + i\epsilon}$   
 $\langle T\{\psi\bar{\psi}\} \rangle = S(x-y)$

$$S(k) = \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{k - m + i\epsilon}$$



O procedimento para encontrar os correladores é então o mesmo de antes (tomando apenas o cuidado de não comutar os números de Grassmann, lembre-se que definimos a derivada agindo pela esquerda)

$$\langle 0 | T \{ \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \} | 0 \rangle = \frac{-\delta^2}{\delta \eta(x_1) \delta \bar{\eta}(x_2)} Z_0[\bar{\eta}, \eta] \Big|_{\eta = \bar{\eta} = 0}$$

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_2)} \text{Exp} \left\{ -i \int d^4x \bar{\eta} S \eta \right\} = - \left[ \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_2)} \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) \right] e^{-iI} =$$

$$= - \left[ \int d^4y S(x_2-y) \eta(y) \right] e^{-iI}$$

este sinal vem da comutação

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_1)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x_2)} e^{-iI} = i S(x_2-x_1) e^{-iI} + i \left[ \int d^4y S(x_2-y) \eta(y) \right] \left( \frac{-\delta}{\delta \bar{\eta}(x_1)} \right) e^{-iI}$$

$$\langle 0 | T \{ \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \} | 0 \rangle = i S(x_2-x_1)$$

0 /  $\eta = \bar{\eta} = 0$

# Simetrias no formalismo funcional

(Peskin 9.6)

Considere a função de três pontos:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \} | \Omega \rangle = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3)$$

(eq. 69.1)

Pensemos em uma pequena mudança de variáveis (exigir que a ação fosse estacionária perante tal mudança nos levaria as equações de movimento clássicas):

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \underbrace{\epsilon(x)}_{\text{PEQUENO}}$$

$$\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$$

$$\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi)} \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi')} \phi'(x_1) \phi'(x_2) \phi'(x_3)$$

Espandindo o lado direito para  $\epsilon(x)$  pequeno, temos:

$$\mathcal{L}'(\phi(x)) = \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \int d^4y \mathcal{L}(\phi(y))$$

$$\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x [\mathcal{L}(\phi) + \epsilon(x) \mathcal{L}'(\phi) + \mathcal{O}(\epsilon^2)]} (\phi(x_1) + \epsilon(x_1)) (\phi(x_2) + \epsilon(x_2)) (\phi(x_3) + \epsilon(x_3)) =$$

$$= \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi)} \left( 1 + i \int d^4x \epsilon(x) \mathcal{L}'(\phi) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \left[ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) + \epsilon(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) + \phi(x_1) \epsilon(x_2) \phi(x_3) + \phi(x_1) \phi(x_2) \epsilon(x_3) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] =$$

$$= \underbrace{\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi)} \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3)}_{\text{é o mesmo que temos do lado esquerdo de 69.1}} + \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi)} \left\{ i \int d^4x (\epsilon(x) \mathcal{L}'(\phi) \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3)) + \epsilon(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) + \phi(x_1) \epsilon(x_2) \phi(x_3) + \phi(x_1) \phi(x_2) \epsilon(x_3) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right\}$$

é o mesmo que temos do lado esquerdo de 69.1

$$0 = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi)} \left\{ i \int d^4x [\varepsilon(x) \mathcal{L}'(\phi) \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3)] + \varepsilon(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) + \phi(x_1) \varepsilon(x_2) \phi(x_3) + \phi(x_1) \phi(x_2) \varepsilon(x_3) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\}$$

$$\varepsilon(x_1) = \int d^4x \delta(x-x_1) \varepsilon(x)$$

$$0 = -i \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi)} \int d^4x \varepsilon(x) \left[ -\mathcal{L}'(\phi) \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) + i \delta(x-x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) + i \phi(x_1) \delta(x-x_2) \phi(x_3) + i \phi(x_1) \phi(x_2) \delta(x-x_3) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right]$$

Como esta expressão tem que valer para qualquer  $\varepsilon(x)$ , temos (em ordem  $\varepsilon$ ):

$$0 = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi)} \left[ -\mathcal{L}'(\phi) \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) + i \delta(x-x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) + i \phi(x_1) \delta(x-x_2) \phi(x_3) + i \phi(x_1) \phi(x_2) \delta(x-x_3) \right]$$

No caso em que  $\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$  (eq. 70.1)

$$\mathcal{L}'(\phi) = -\square \phi - m^2 \phi$$

temos:

$$0 = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi)} \left[ (\square + m^2) \phi(x) \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) + i \delta(x-x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) + i \phi(x_1) \delta(x-x_2) \phi(x_3) + i \phi(x_1) \phi(x_2) \delta(x-x_3) \right]$$

$$(\square + m^2) \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi)} \phi(x) \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) = -i \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi)} \left[ \delta(x-x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) + \phi(x_1) \delta(x-x_2) \phi(x_3) + \phi(x_1) \phi(x_2) \delta(x-x_3) \right]$$

que, dividido pela normalização, nos dá:

$$(\square + m^2) \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \} | \Omega \rangle = -i \langle \Omega | T \{ \delta(x-x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \} | \Omega \rangle +$$

$$-i \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \delta(x-x_2) \phi(x_3) \} | \Omega \rangle = -i \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \delta(x-x_3) \} | \Omega \rangle$$

o que também vale para um número arbitrário de campos:

$$(\square + m^2) \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = -i \sum_{i=1}^n \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \delta(x-x_i) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle$$

(eq. 71.1)

O que nos diz que  $\phi(x)$  (lembrando que o operador age em  $x$  e não  $x_i$ ) satisfaz a equação de Klein Gordon dentro de qualquer valor esperado a menos de termos onde  $x$  é igual a um dos  $x_i$ . Estes termos são chamados de **termos de contato**. A versão desta igualdade para  $n = 1$  nos dá um resultado já conhecido:

$$(\square + m^2) \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(x_1) \} | \Omega \rangle = -i \delta^4(x-x_1) \underbrace{\langle \Omega | \Omega \rangle}_1$$

$i \Delta_F(x-x_1)$

Para obter o que ocorre no caso de uma lagrangeana qualquer, com um campo genérico  $\phi$ , voltamos na eq. 70.1 (substituindo  $\phi$  por  $\varphi$ ) e notamos que:

$$\mathcal{L}'(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) = \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \left[ \int d^4y \mathcal{L}(\varphi(y), \partial_\mu \varphi(y)) \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right)$$

$\varphi = \varphi(x)$

Que é justamente o que seria zero nas equações de Euler-Lagrange para  $\varphi$ . A equação obtida é:

$$\left\langle \left( \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \int d^4y \mathcal{L}(\varphi(y)) \right) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle \varphi(x_1) \dots (i \delta(x-x_i)) \dots \varphi(x_n) \right\rangle$$

Estas equações de movimento quânticas para os correlatores são conhecidas como **Equações de Schwinger-Dyson**.

PS:  $\langle \hat{O} \rangle = \langle \Omega | T \{ \hat{O} \} | \Omega \rangle$

### Leis de Conservação

Novamente, vamos usar uma pequena mudança de variáveis na integral funcional, só que agora o faremos na direção de uma simetria da lagrangeana, para obter o análogo quântico do teorema de Noether. Vejamos um caso simples:

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2 \quad \phi(x) \in \mathbb{C}$$

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \phi(x)$$

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$$

Faremos a seguinte mudança de variáveis nas integrais:  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + i\alpha(x)\phi(x)$

$$\mathcal{D}\phi = \mathcal{D}\phi' \quad (\text{a transformação é unitária e } \text{Det}[U] = 1)$$

Pensando na função de dois pontos:

$$\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}[\phi]} \phi(x_1) \phi^*(x_2) = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}[\phi']} \phi'(x_1) \phi'^*(x_2) \Bigg|_{\phi' = (1+i\alpha)\phi}$$

Expandindo para  $\alpha(x)$  pequeno e considerando apenas os termos lineares em  $\alpha(x)$  (análogo ao que fizemos nas pags 69-70):

$$0 = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}[\phi]} \left\{ i \int d^4x \left[ \underbrace{(\partial_\mu \alpha)}_{\tilde{j}^\mu(x)} \left( \phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi \right) \right] \phi(x_1) \phi^*(x_2) \delta^4x + \right. \\ \left. + \left[ i \alpha(x_1) \phi(x_1) \right] \phi^*(x_2) + \phi(x_1) \left[ -i \alpha(x_2) \phi^*(x_2) \right] \right\}$$

$$\int d^4x (\partial_\mu \alpha) \tilde{j}^\mu(x) = - \int d^4x \alpha(x) \partial_\mu \tilde{j}^\mu$$

$$0 = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}[\phi]} \left\{ -i \int d^4x \left[ \alpha(x) (\partial_\mu \tilde{j}^\mu) \right] \phi(x_1) \phi^*(x_2) + \right. \\ \left. + \left[ i \alpha(x_1) \phi(x_1) \right] \phi^*(x_2) + \phi(x_1) \left[ -i \alpha(x_2) \phi^*(x_2) \right] \right\}$$

$$0 = i \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}[\phi]} \int d^4x \alpha(x) \left[ -(\partial_\nu \gamma^\nu) \phi(x_1) \phi^*(x_2) + \delta(x-x_1) \phi(x_1) \phi^*(x_2) + \delta(x-x_2) \phi^*(x_2) \right]$$

Como isto vale para qualquer  $\alpha(x)$ :

$$0 = i \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}[\phi]} \left[ -(\partial_\nu \gamma^\nu) \phi(x_1) \phi^*(x_2) + \delta(x-x_1) \phi(x_1) \phi^*(x_2) - \delta(x-x_2) \phi^*(x_2) \right]$$

$$\langle \partial_\nu \gamma^\nu \phi(x_1) \phi^*(x_2) \rangle = \langle \delta(x-x_1) \phi(x_1) \phi^*(x_2) \rangle - \langle \phi(x_1) \delta(x-x_2) \phi^*(x_2) \rangle$$

O que novamente nos dá a conservação clássica mais os termos de contato. Esta é a equação de Schwinger-Dyson para conservação de correntes.

Os assuntos que seguem abaixo foram abordados na segunda edição deste curso. A versão de 2013 recebeu diversas correções e algumas derivações foram mudadas para ficarem mais claras, portanto recomendo continuar a leitura usando aquela versão.

## Correções Radiativas

(Peskin 7.1, S. Weinberg QTF - Vol1 - 10.7)

Vamos agora olhar mais profundamente o que acontece com as funções de Green da teoria quando "ligamos" a interação. Começemos com o seguinte objeto:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle$$

↪ estado fundamental (vácuo) da teoria interagente

Como interpretamos este objeto? Tomemos auto-estados de  $\hat{H}$  e  $\hat{\vec{P}}$ :

Definamos:  $|\lambda_0\rangle \rightarrow \hat{\vec{P}} |\lambda_0\rangle = 0$

$$|\lambda_0\rangle \xrightarrow{\text{Boost } \vec{P}} |\lambda_p\rangle$$

A invariância de Lorentz de  $\hat{H}$  me diz que  $|\lambda_p\rangle$  é auto-estado de  $\hat{H}$

$$\hat{H} |\lambda_p\rangle = E_p(\lambda) |\lambda_p\rangle$$

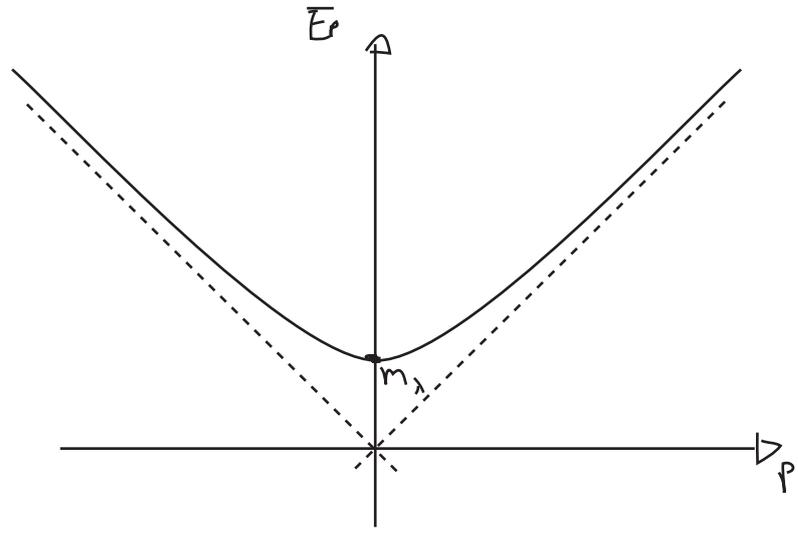
$$|\lambda_p\rangle$$



podem ter uma ou mais partículas

$$E_r(\lambda) \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_\lambda^2}$$

Estou definindo como "massa", a energia do estado em seu referencial de repouso (o que faz todo sentido para estados de 1 partícula ou mesmo estados ligados)



$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} |\lambda_p\rangle\langle\lambda_p|$$

$$x^0 > y^0$$

$$\langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle = \langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle\langle\Omega|\phi(y)|\Omega\rangle}_0 + \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \langle\Omega|\phi(x)|\lambda_p\rangle\langle\lambda_p|\phi(y)|\Omega\rangle$$

$$\langle\Omega|\phi(x)|\lambda_p\rangle = \langle\Omega| \underbrace{e^{i\hat{p}x}}_{\text{translação}} \phi(0) e^{-i\hat{p}x} |\lambda_p\rangle = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_p\rangle e^{-i p x}$$

$$= \langle\Omega|U^{-1}U\phi(0)U^{-1}U|\lambda_p\rangle e^{-i p x} = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle e^{-i p x}$$

boost de  $\vec{p}$  para 0  
 $U|\lambda_p\rangle = |\lambda_0\rangle$

$$U\phi(0)U^{-1} = \phi(0) \quad \langle\Omega|U^{-1} = \langle\Omega|$$

↳ para campos de spin maior teríamos que ter mais cuidado aqui (vai para a lista)

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-iE_p(x-y)} =$$

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-iE_p(x-y)}}{2E_p(\lambda)} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \quad x_0 > y_0$$

Se você vem seguindo as ambiguidades de notação (pgs 60 e 68), aqui virtualmente acaba a diferença entre os livros pois o Ryder, na pag 255 define um propagador "conectado" que tem um fator "i". Manipulando as equações 7.66 e 7.68 dá para mostrar que:

$$i G_c^{(\lambda)}(x_1, x_2) = i G^{(\lambda)}(x_1, x_2)$$

$$i G_c^{(\lambda)}(x_1, x_2) = i (i \Delta_F(x_1, x_2))$$

$$G_c^{(\lambda)}(x_1, x_2) = i \Delta_F(x_1, x_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ik(x_2 - x_1)}$$

Como é este o propagador usado para as discussões que se seguem, acaba a ambiguidade

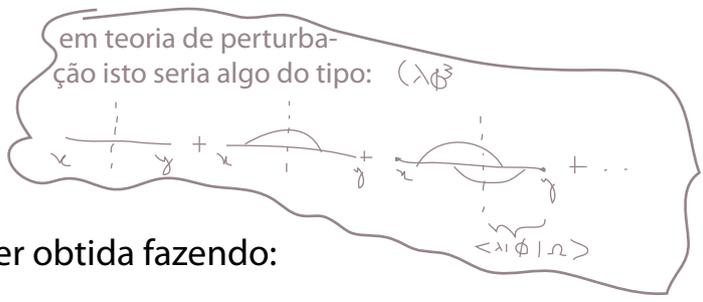
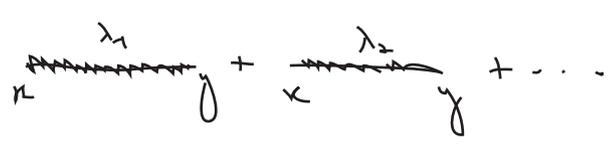
$$= \sum_{\lambda} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2$$

$$D_F(k) = \frac{i}{p^2 - m^2}$$

Poderíamos fazer o mesmo para o caso  $y_0 > x_0$  e obter:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 D_F(x-y, m_\lambda^2)$$

Note que obtemos o propagador de Feynman com a massa substituída por  $m_\lambda$ . Para cada estado  $\lambda$  contribuindo para a função de 2 pontos temos também um "peso" dado pela amplitude de criação daquele estado a partir do vácuo.



Uma forma útil de escrever esta soma pode ser obtida fazendo:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_\lambda^2) |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 D_F(x-y, M^2) =$$

$$\rho(M^2) = \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_\lambda^2) |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2$$

Densidade espectral

$$= \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x-y, M^2)$$

(representação espectral de Källén-Lehmann)

É importante notar que, para um estado intermediário de uma partícula:



teremos  $m_\lambda = m$ , onde  $m$  é o autovalor de energia no referencial de repouso da partícula. Esse estado contribui com uma função  $\delta(M^2 - m^2)$  para a densidade espectral

$$\rho(M^2) = 2\pi \delta(M^2 - m^2) \cdot \underbrace{Z}_{|\langle \Omega | \phi(0) | 1_0 \rangle|^2} + \underbrace{\sigma(M^2)}_{\text{contribuições de estados de 2 ou mais partículas.}}$$

↑ estado de 1 partícula com momento zero

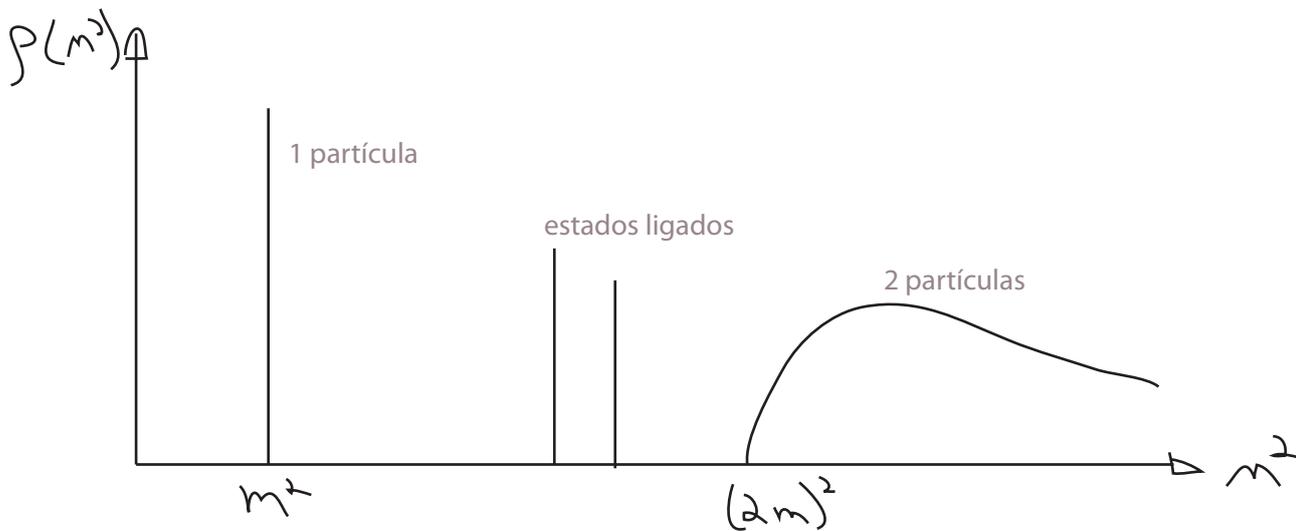
$Z \rightarrow$  Field Strength Renormalization

Como já vimos, esta massa "m" é a massa observável da partícula interagente e vai, em geral, diferir daquela que aparece na lagrangeana, que chamaremos de  $m_0$

$m \rightarrow$  Massa física

$m_0 \rightarrow$  Massa nua (bare mass)

Em relação às contribuições de mais partículas,  $\sigma(M^2)$ , temos essencialmente duas possibilidades: a partir da energia em que possamos produzir duas ou mais partículas reais "livres" temos um espectro contínuo da massa  $m_\lambda$ . Mas abaixo desta energia podemos, dependendo da interação específica, ter estados ligados de duas ou mais partículas. Neste caso teremos polos adicionais em massas entre  $m$  e  $2m$ . Isto nos leva a uma forma tipicamente do tipo:

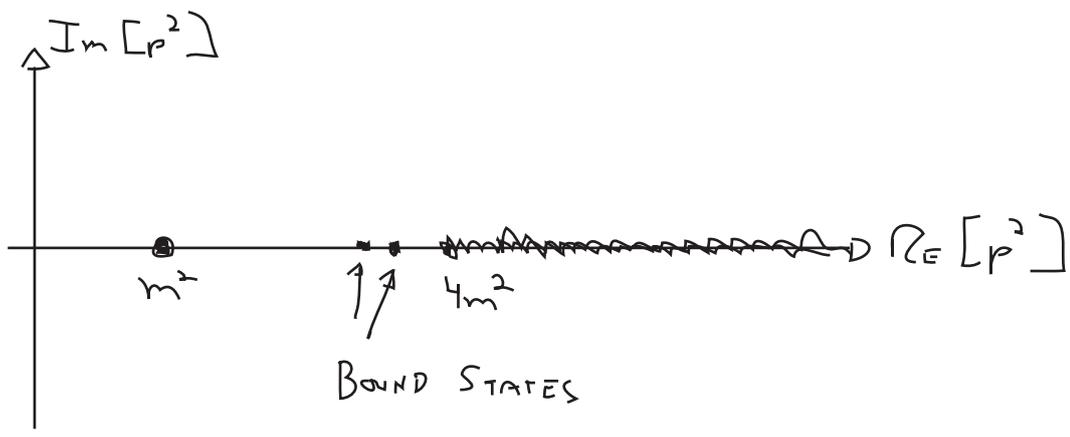


Passando para o espaço dos momentos:

$$\int d^4x e^{i p x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | \Omega \rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi i} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

$$= \frac{i Z}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + (\text{BOUND STATES}) + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

Que tem a seguinte estrutura analítica no plano complexo:



Comparemos este resultado com o caso de um campo livre:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | 0 \rangle = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

Os dois são semelhantes e fica claro que temos que levar Z para 1 quando “desligamos” a interação. De fato, é possível mostrar que (veja Weinberg, 10.7) :

$$\int_0^{\infty} \rho(M^2) dM^2 = 1$$

&

$$1 = Z + \int_0^{\infty} \sigma(M^2) dM^2$$

O que também nos garante que a contribuição de estados de muitas partículas desaparece na teoria livre.

PS: no caso de espinores de Dirac, o mesmo raciocínio nos levaria a:

$$\int d^4k e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle = \frac{i Z_2 \sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots = \frac{i Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

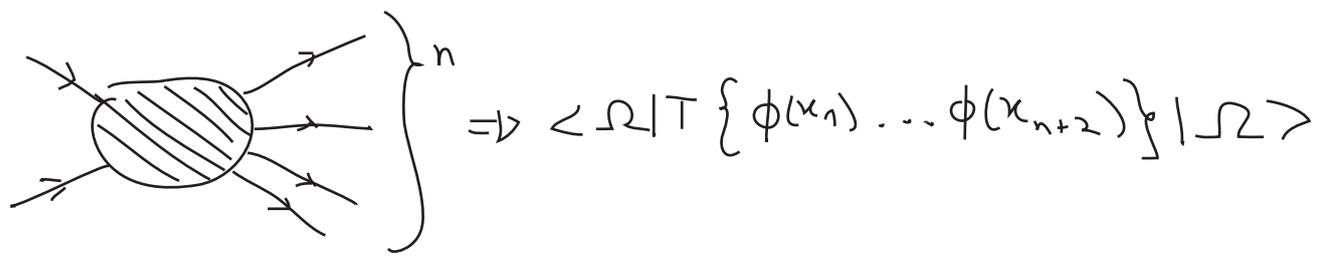
$$\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2} u^s(p)$$

PS2: obter de fato a forma da densidade espectral é uma tarefa árdua por se tratar de um cálculo não-perturbativo. Um método envolve a utilização de relações de dispersão. Quem estiver interessado pode ler: Weinberg, sec 10.8 ou Peskin, sec 18.4

**A matriz S e a fórmula de redução LSZ (Lehmann, Symanzik, Zimmerman)**

(Peskin 7.2, Ryder 6.8 e 7.3)

Vamos ver o que acontece quando generalizamos estas idéias para correlatores maiores



Vamos escolher um dos pontos acima (que chamaremos de x) e fazer a transformada de Fourier nele:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\int d^4x = \underbrace{\int_{T_+}^{\infty} dx^0}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{T_-}^{T_+} dx^0}_{\text{II}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{T_-} dx^0}_{\text{III}}$$

$$T_+ > \forall z_i^0 > T_-$$

A integral na região II é uma função analítica de  $p^0$  (não contribui para os polos)

Na região I o tempo  $x^0$  é maior que os outros, portanto:

$$\int_{T_+}^{\infty} d^4x \int d^3k e^{iP^0 x^0} e^{-i\vec{P} \cdot \vec{x}} \langle \Omega | \phi(x) T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{k}}(\lambda)} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\vec{k}} \rangle \langle \lambda_{\vec{k}} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\langle \Omega | \phi(x) | \lambda_k \rangle = \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle e^{-i k x} \quad \left. \begin{array}{l} \text{v} \text{ p} \text{ q} \text{ z} \text{ y} \\ k^0 = E_k(\lambda) \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{\lambda} \int_{T_+}^{\infty} dx^0 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \underbrace{\int d^3 x e^{+i \vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x}}}_{(2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{p})} \frac{1}{2E_p(\lambda)} e^{i p^0 x^0} e^{-i E_k x^0} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \times \langle \lambda_k | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

$$= \sum_{\lambda} \int_{T_+}^{\infty} dx^0 \frac{1}{2E_p(\lambda)} e^{-i(E_p - p^0)x^0 - \epsilon x^0} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \times \langle \lambda_p | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

Para garantir convergência

$$x^0 \rightarrow x^0 - T_+ \quad \begin{cases} dx^0 \rightarrow dx^0 \\ x^0 = T_+ \rightarrow x^0 = 0 \\ x^0 = \infty \rightarrow x^0 = \infty \end{cases} \Rightarrow e^{-i(E_p - p^0)x^0 - \epsilon x^0} \rightarrow e^{-i(E_p - p^0)x^0 - \epsilon x^0} e^{i(E_p - p^0)T_+ + \epsilon T_+}$$

$$= \sum_{\lambda} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \frac{i}{[p^0 - E_p(\lambda) + i\epsilon]} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_p | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

Esta é uma função de  $p_0$  com singularidades em todos os pontos  $E_p(\lambda)$ . Se estas singularidades são polos isolados ou cortes vai depender da teoria específica. Vamos nos interessar com o que ocorre próximo ao polo que equivale a uma partícula de massa (física)  $m$ .

$$p^2 - m^2 = p_0^2 - |\vec{p}|^2 - m^2 = p_0^2 - \underbrace{(|\vec{p}|^2 + m^2)}_{E_p^2} = (p_0 + E_p)(p_0 - E_p)$$

$$\lim_{p_0 \rightarrow +E_p} p^2 - m^2 = 2E_p(p_0 - E_p)$$

$$\int d^4 x e^{i p x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{p_0 \rightarrow E_p}_{\text{estado de 1 partícula com momento } \vec{p}} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \vec{p} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$\langle \Omega | \phi_0 | \Omega \rangle$  estado de 1 partícula com momento zero

este símbolo quer dizer "tem polos iguais a" (estamos desprezando os termos finitos)

Se fizermos o mesmo para a região III, veremos que

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{p_0 \rightarrow -E_p}_{\sim} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \Omega | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | -\vec{p} \rangle$$

Gostaríamos de continuar fazendo isso para todos os outros campos dentro do produto temporalmente ordenado, mas temos que ter cuidado com o isolamento das partículas externas. A forma de fazer isso é voltar na página 78 e, ao invés da transformada de Fourier, usamos um pacote de onda estreito:

$$\int d^4x e^{i p^0 x_0} e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x}} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^4x e^{i p^0 x_0} e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}} \psi(\vec{k})$$

$\psi(\vec{k})$ : distribuição estreita centrada em  $\vec{p}$  (voltamos a transformada de Fourier se fizemos esta distribuição virar uma delta de Dirac)

Esta pequena indeterminação no momento da partícula associada faz com que ela fique com a posição contida em uma região do tamanho deste pacote. Retraçando todo o raciocínio acima teremos agora:

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi(\vec{k}) \frac{1}{2E_k(\lambda)} \frac{i}{p^0 - E_k(\lambda) + i\epsilon} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_k | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

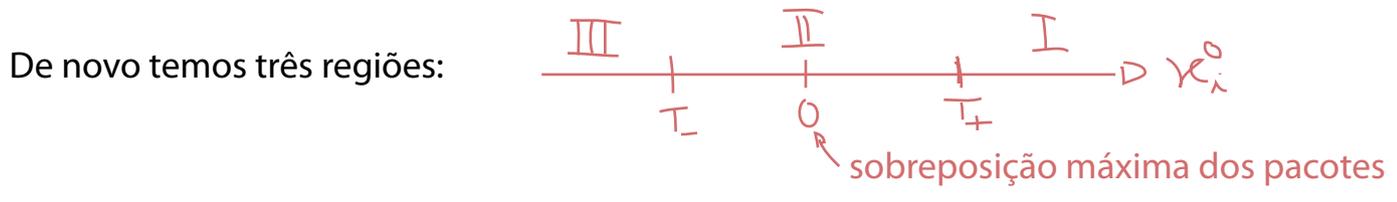
$$\underbrace{\sim}_{\vec{p} \rightarrow E_p} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i \psi(\vec{k})}{\vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \vec{k} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\vec{p} = (p_0, \vec{k})$$

Na prática agora o polo "anda" conforme variamos  $\vec{k}$ , ou seja, o polo de uma partícula virou um pequeno corte cujo comprimento é a largura de  $\psi(\vec{k})$ . A volta ao caso anterior é bem definida conforme estreitamos  $\psi(\vec{k})$  até que vire uma delta e o corte volta a ser um polo.

Se fizermos o mesmo para todos os pontos na função de n+2 pontos da página 78, obteremos:

$$\int \prod_{i=1}^{n+2} \left( \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} d^4 x_i e^{i \tilde{P}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$



Se tomarmos os tempos que dividem as regiões suficientemente grandes (para o passado ou futuro) podemos assumir que nestas regiões já não há mais sobreposição alguma dos pacotes e dividir cada uma das integrais anteriores em três regiões, assim como fizemos antes. Mais uma vez, não precisamos nos preocupar com a região II, pois as integrais nessa região resultam em funções analíticas. Pensemos nas regiões I e III, e no caso em que só "empacotamos" dois campos:

$$k_1^0, k_2^0 \in I$$

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \int \prod_{i=1,2} \left( \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} d^4 x_i e^{i \tilde{P}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right)$$

$$\times \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_k \rangle \langle \lambda_k | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

É aqui os pacotes de onda se tornam importantes. Como este estado tem que ser aniquilado por campo que sofrem a restrição de só serem diferentes de zero em locais isolados do espaço ele tem que ser composto de duas excitações distintas e isoladas espacialmente. Neste caso podemos fazer a aproximação:

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_k \rangle \langle \lambda_k | =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_1}} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_2}} \langle \Omega | \phi(x_1) | \lambda_{k_1} \rangle \langle \Omega | \phi(x_2) | \lambda_{k_2} \rangle \langle \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} |$$

Agora podemos separar a contribuição dos "polos" de uma partícula (que na verdade agora são pequenos cortes):

$$\int \prod_{\lambda=1}^2 \left( \frac{\int d^3k_i}{(2\pi)^3} \int d^4x_i e^{i\tilde{p}_i x_i} \varphi_i(k_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle \sim$$

$$\underbrace{\left( \begin{matrix} \tilde{p}_1 \rightarrow E_{k_1} \\ \tilde{p}_2 \rightarrow E_{k_2} \end{matrix} \right)} \int \prod_{\lambda=1}^2 \left( \frac{\int d^3k_i}{(2\pi)^3} \varphi_i(k_i) \frac{i\sqrt{z^1}}{\tilde{p}_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

Para voltarmos em estados assintóticos de momento bem definido, basta tomar o limite em que os pacotes viram funções delta. A expressão acima se torna:

$$\prod_{\lambda=1}^2 \left( \frac{i\sqrt{z^1}}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

Finalmente, podemos fazer o mesmo para as funções que restam (colocando-as na região III - passado) e vemos que o termo mais singular de:

$$\int \prod_{\lambda=1}^{n+2} \left( \frac{\int d^3k_i}{(2\pi)^3} \int d^4x_i e^{i\tilde{p}_i x_i} \varphi_i(k_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

$$\sim \prod_{\lambda=1}^{n+2} \left( \frac{i\sqrt{z^1}}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | (-\vec{p}_3) (-\vec{p}_4) \dots \rangle_{IN}$$

contém em si elementos de matriz de S

**Resumindo**

$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$   
 ↓ pacotes de onda

$\prod (\text{propagadores completos}) \langle S \rangle$   
 ↑ volta ao pacote estreito

$\int \prod \frac{\int d^3k_i}{(2\pi)^3} \varphi_i(\vec{k}_i) \langle \phi_1 \dots \phi_{n+2} \rangle$ 

 polos  
 termo mais singular
 
 $\rightarrow$ 
 $\int \prod \int d^3k_i \frac{\varphi_i(\vec{k}_i) \sqrt{z^1}}{p_i^2 - \vec{k}_i^2 - m^2} \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | \vec{k}_3 \dots \rangle$

\* se pudermos inverter a ordem das duas operações indicadas, fica bem fácil obter os elementos da matriz S. Na prática esquecemos todo o caminho que envolve os pacotes e calculamos o correlator da teoria interagente no espaço dos momentos:

$$\prod_{i=1}^n \int d^4x_i e^{i p_i x_i} \prod_{j=1}^m \int d^4y_j e^{-i k_j y_j} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(y_1) \dots \phi(y_m) \} | \Omega \rangle$$

$$\underset{\substack{p_i^0 \rightarrow E_{p_i} \\ q_j^0 \rightarrow E_{q_j}}}{\sim} \left( \prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{Z}^i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left( \prod_{j=1}^m \frac{\sqrt{Z}^i}{k_j^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | S | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_m \rangle$$

(eq. 83.1)

ai basta olhar a função resultante na região em que todas as partículas externas estão "on-shell", perto de seus polos. O coeficiente do produto de todos os polos é o elemento de matriz S.

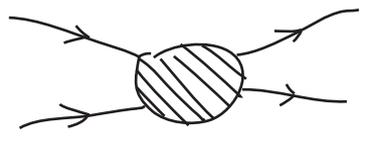
ps: no caso de partículas com spin, teremos fatores tais como  $u^s(p)$  acompanhando os propagadores, neste caso temos também que separar estes fatores da matriz S, multiplicando por polarizações que projetem nos estados de spin finais e iniciais do espalhamento que queremos calcular

ps2: também temos que lidar com o fator  $\sqrt{Z}$ , podemos identificar quanto ele vale na função de dois pontos de cada partícula e "separá-lo" junto com os propagadores para obter a matriz S

**Importante:** note que o fator Z e a massa física apareceram neste desenvolvimento geral, mesmo sem termos identificado qualquer divergência nas correções radiativas. Suponha que estivessemos trabalhando em poucas dimensões e as integrais de loop convergissem. Teríamos que introduzir Z e uma massa m diferente daquela na lagrangeana ( $m_0$ )?

De fato, a possibilidade de fazer esta inversão foi provada por Lehmann, Symanzik, and Zimmermann e a equação 83.1 acima é conhecida como **Fórmula de Redução de LSZ**

Vamos tentar expressar esta fórmula por meio de diagramas de Feynman. Consideremos um caso simples:



Consideramos apenas os diagramas conectados, já que os desconectados não possuem a multiplicação de 4 polos que procuramos.

lembre-se, por exemplo, da teoria  $\lambda\phi^4$  -

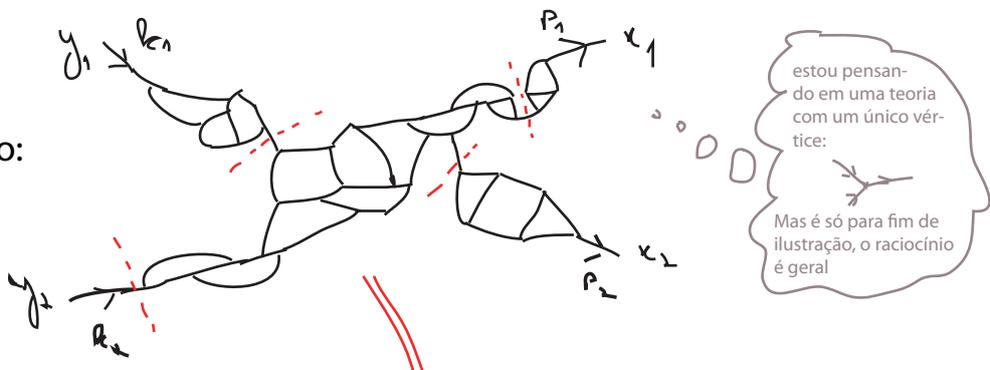
$$\text{X} = \Delta_F(x_1-z) \Delta_F(x_2-z) \Delta_F(x_3-z) \Delta_F(x_4-z) \quad (\text{pg 38-40})$$

$$\text{---} + \text{---} \sim \Delta_F \Delta_F$$

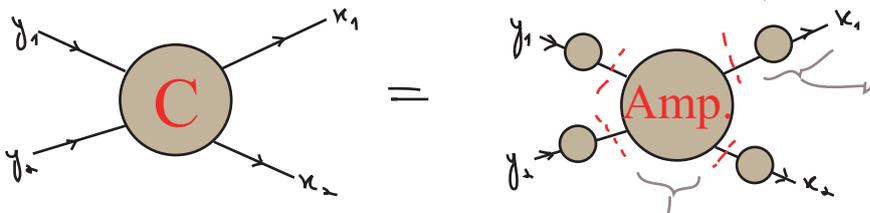
A função de quatro pontos no espaço dos momentos é:

$$\left( \prod_1^2 \int d^4 k_i e^{i P_\mu x_\mu} \right) \left( \prod_1^2 \int d^4 y_i e^{-i k_i y_i} \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle$$

Isso pode ser bem complicado:



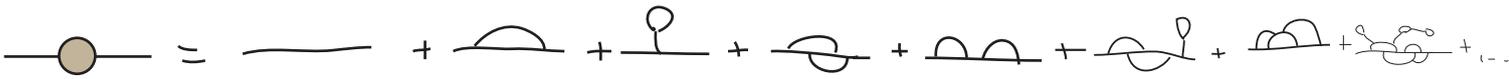
Mas podemos agrupar as correções da seguinte forma



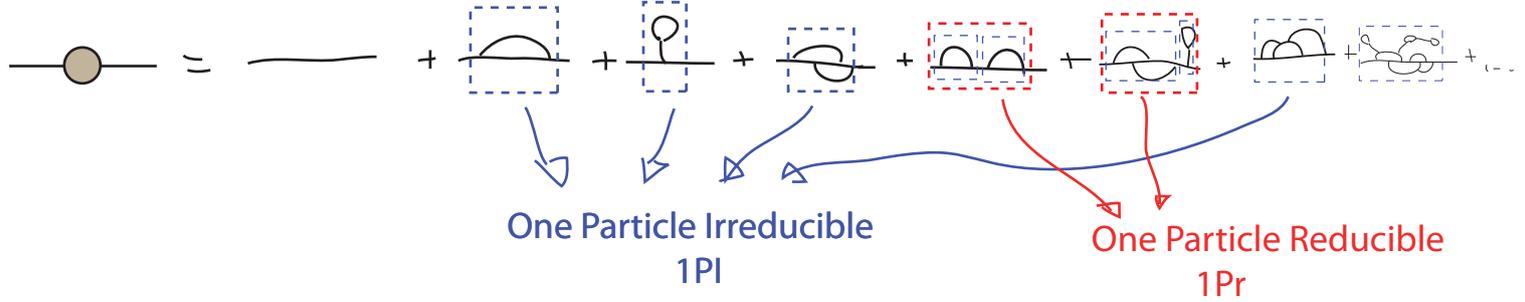
com isso agrupamos todas correções que só modificam o propagador nestas "pernas" - os **Propagadores Vestidos ou Completos**

Resta a parte que modifica o vértice da interação que chamamos de diagrama **Amputado**

Pensemos primeiro na estrutura dos propagadores:



Podemos dividir as correções em dois grupos:



Se definirmos um objeto que coleciona todas as correções 1PI:

$$-i M^2(p^2) = \rightarrow \text{1PI} \rightarrow$$

fica claro que as correções 1Pr serão dadas por:  $\text{1PI} + \text{1PI} \text{1PI} + \text{1PI} \text{1PI} \text{1PI} + \dots$

De forma que a função de dois pontos completa pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \text{Diagrama} = \\
 & = \text{Diagrama} + \text{Diagrama com 1PI} + \text{Diagrama com 2PI} + \text{Diagrama com 3PI} + \dots = \\
 & = \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots = \\
 & = \frac{i}{p^2 - m_0^2} \left( 1 + (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots \right) = \\
 & = \frac{i}{p^2 - m_0^2} \left( 1 - \frac{M^2}{p^2 - m_0^2} \right)^{-1} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M(p^2)^2}
 \end{aligned}$$

O propagador completo é dado por uma função complicada, que envolve a **auto energia M**. Conforme a discussão das pags 76-77, sabemos que perto de  $p^0 = E_p$  o único polo presente é o da massa física:

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2 - M(p^2)^2} \underset{p^0 \rightarrow E_p}{\sim} \frac{i Z}{p^2 - m^2} + (\text{função sem polos})$$

Isso quer dizer que se formos para a região:  $\left. \begin{array}{l} p_1^0 \rightarrow E_{p_1} \\ p_2^0 \rightarrow E_{p_2} \\ k_1^0 \rightarrow E_{k_1} \\ k_2^0 \rightarrow E_{k_2} \end{array} \right\}$

A função de quatro pontos terá o seu termo mais singular na forma:

$$\text{Diagrama de 4 pontos} = \frac{i Z}{p_1^2 - m^2} \frac{i Z}{p_2^2 - m^2} \frac{i Z}{k_1^2 - m^2} \frac{i Z}{k_2^2 - m^2} \text{Diagrama Amp.} + \dots$$

termos regulares

onde, do lado direito, resta apenas o vértice e suas correções (diagramas Amputados)

Comparando isto com o lado direito da fórmula de LSZ (eq. 83.1), reconhecemos os produtos dos polos e vemos que a matriz S deve ser:

$$\langle P_1 P_2 | S | k_1 k_2 \rangle = Z^2 \text{ Amp.}$$

Para fins de ilustração, no caso  $\lambda\phi^4$ , (em teoria de perturbação) tínhamos (pg 40):

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle = \\ = -3 \left[ \text{diagrama desconectado} \right] - \frac{i\lambda}{4!} \left[ \text{diagrama com 2 propagadores} \right] + 27 \left[ \text{diagrama com 4 propagadores} \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned}$$

desconectados  $(\Delta_F \Delta_F)$   $\Delta_F \Delta_F \Delta_F \Delta_F$

$$\begin{aligned} -i\lambda \int \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(z-x_4) dz \\ = -i\lambda \int dz \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4}{(2\pi)^{16}} \frac{i e^{-ik_1(z-x_1)}}{k_1^2 - m_0^2} \dots \frac{i e^{-ik_4(z-x_4)}}{k_4^2 - m_0^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int dz e^{-iz(\dots)} \rightarrow (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ = -i\lambda \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4}{(2\pi)^{16}} \frac{i}{k_1^2 - m_0^2} \dots \frac{i}{k_4^2 - m_0^2} \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) e^{ik_1 x_1} \dots e^{ik_4 y_4} \end{aligned}$$

que é a função no espaço das posições. Passando para o espaço dos momentos:

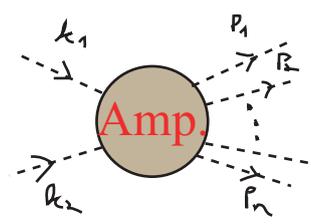
$$\begin{aligned} \int d^4k_1 e^{iP_1 x_1} \int d^4k_2 e^{iP_2 x_2} \int d^4k_3 e^{-ik_3 y_3} \int d^4k_4 e^{-ik_4 y_4} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle = \\ = -i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(-P_1 - P_2 + k_1 + k_2) \frac{i}{P_1^2 - m_0^2} \frac{i}{P_2^2 - m_0^2} \frac{i}{k_1^2 - m_0^2} \frac{i}{k_2^2 - m_0^2} \end{aligned}$$

↑ amputação

notem que nessa caso não temos o Z (pois estamos em Leading Order)

Uma análise equivalente para funções de mais pontos nos leva a:

$$\langle p_1 \dots p_n | S | k_1, k_2 \rangle = (\sqrt{Z})^{n+2}$$



Note que para campos com spin teríamos fatores de polarização no lado direito, tal como \$u\_s(k)\$ ou \$\epsilon\_\mu(k)\$

### Funções de Vértice

(Ryder 7.3)

Da mesma forma que fizemos para o propagador, podemos também definir uma soma para todas as correções do vértice (por exemplo em \$\lambda\phi^4\$):

$$-i\lambda\Gamma = \text{tree} + \text{loop} + \text{loop} + \text{loop} + \dots$$

$$-i\lambda\Gamma(p_1, p_2, p_3, p_4) = -i\lambda + \dots$$

$$\Gamma(p_1, p_2, p_3, p_4) = 1 + \dots$$

No caso da QED:  $-ie\Gamma^\mu(p', p) = -ie\gamma^\mu + \dots$

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu + \dots$$

Note que no caso da teoria \$\lambda\phi^4\$ temos um vértice com 4 pernas externas e na QED com três. Podemos também (em ambas as teorias) definir uma função de vértice para duas pernas externas.

$$\Pi^{(2)}(p) = \text{tree} + \text{loop} + \dots$$

$$\Pi^{(2)}(p) = \text{tree} + \text{loop} + \text{loop} + \dots$$

Vamos ver como podemos definir estas funções para qualquer ordem o obter um funcional gerador para elas. Primeiro definimos:

$$\phi_{cl}(J(x)) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} = -i \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}$$

$\frac{\delta Z[J]}{\delta J} = \langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0$   
 $Z[J] = 1$

mas estamos pensando em \$J \neq 0\$

$$\phi_{ce}(\bar{J}(x)) = -i \frac{\langle \Omega | \phi | \Omega \rangle_{\bar{J}}}{\langle \Omega | \Omega \rangle_{\bar{J}}}$$

Pensemos neste objeto em uma teoria escalar livre:

$$Z = \int d^4x \left( -\frac{1}{2} \phi (\square + m^2) \phi + \phi \bar{J} \right) \rightarrow Z_0[\bar{J}] = e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \bar{J}(x) \Delta_F(x-y) \bar{J}(y)}$$

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{p^2 - m^2}$$

$$W_0 = -i \ln Z_0 = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \bar{J}(x) \Delta_F(x-y) \bar{J}(y)$$

$$\phi_{ce}[\bar{J}(x)] = -\int d^4y \Delta_F(x-y) \bar{J}(y) \quad \xrightarrow{\text{DIAGRAMA}} \quad \begin{array}{c} \text{---} \times \\ \color{red}{\kappa} \qquad \color{red}{\gamma} \end{array}$$

↳ que é a solução clássica do sistema

$$d_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \phi \bar{J}$$

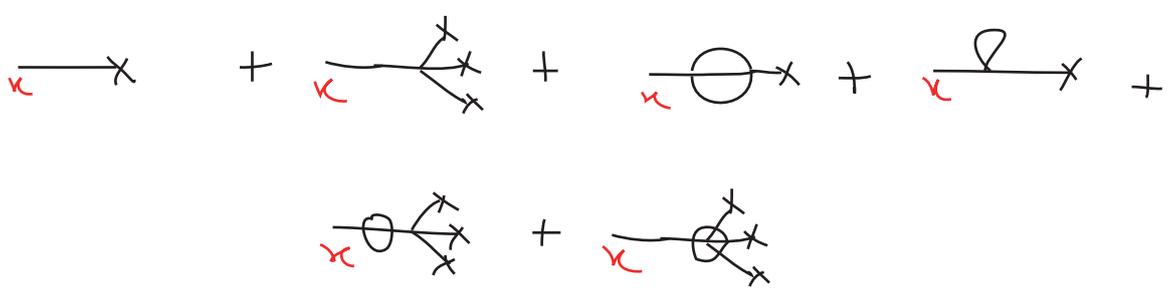
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi + \bar{J}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$$

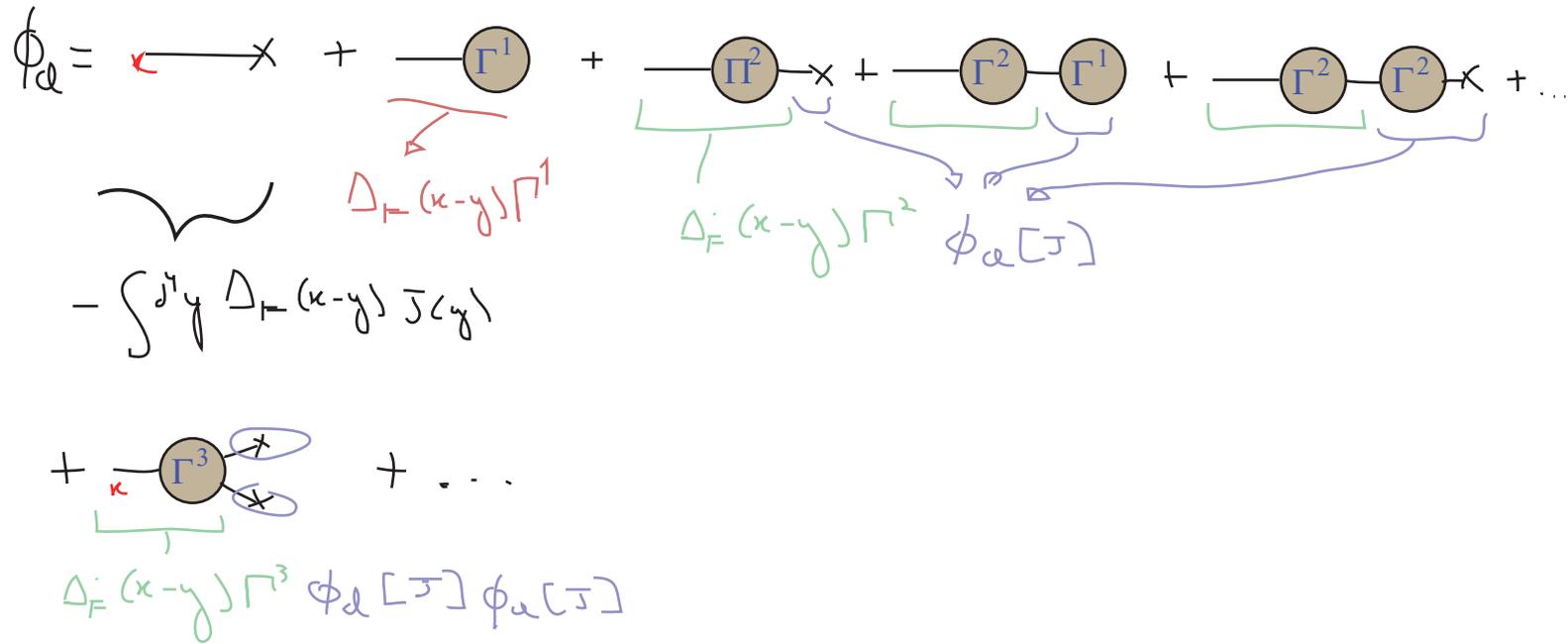
$$\square \phi - m^2 \phi + \bar{J} = 0 \Rightarrow (\square - m^2) \phi = -\bar{J}$$

$$\phi_{ce} = -(\square - m^2)^{-1} \bar{J}$$

Supondo agora que eu "ligasse" a interação, as contribuições para esta função de um ponto seriam (pensando em  $\lambda \phi^4$ ):



Pensando em termos de diagramas 1PI (e em uma teoria mais geral):



$$\phi_\alpha(x) = - \int d^4y \Delta_F(x-y) \left\{ J(y) + \left( \Gamma^{(1)}(y) + \int d^4z \Pi^{(2)}(y,z) \phi_\alpha(z) + \frac{1}{2} \int d^4z d^4z' \Pi^{(3)}(y,z,z') \phi_\alpha(z) \phi_\alpha(z') + \dots \right) \right\}$$

(eq. 89.1)

Vamos definir o funcional gerador para estas funções de vértice:

$$\hat{\Gamma}[\phi_\alpha] \equiv \int d^4x \Gamma^{(1)}(x) \phi_\alpha(x) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Pi^{(2)}(x,y) \phi_\alpha(x) \phi_\alpha(y) + \dots$$

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta \phi_\alpha(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_\alpha(x_n)} \hat{\Gamma}[\phi_\alpha] \Big|_{\phi_\alpha=0}$$

Comparando isto com 89.1, temos:

$$\frac{\delta W}{\delta J(x)} = \phi_\alpha(J(x)) = - \int d^4y \Delta_F(x-y) \left( J(y) + \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_\alpha]}{\delta \phi_\alpha(y)} \right)$$

$$(\square + m^2) \phi_a(\mathcal{J}(x)) = - \int d^4y \underbrace{(\square + m^2) \Delta_F(x-y)}_{-\delta(x-y)} \left( \mathcal{J}(y) + \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_a]}{\delta \phi_a(y)} \right)$$

$$(\square + m^2) \phi_a(\mathcal{J}(x)) - \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_a]}{\delta \phi_a(x)} = \mathcal{J}(x)$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \left( \underbrace{\hat{\Gamma}[\phi_a] - \frac{1}{i} \int d^4y \phi_a(\mathcal{J}(y)) (\square + m^2) \phi_a(\mathcal{J}(y))}_{\Gamma[\phi_a]} \right) = -\mathcal{J}(x) \quad (\text{eq. 90.1})$$

$$\left. \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_a(x)} \right|_{\phi_a=0} = -\mathcal{J}(x)$$

(eq. 90.1)

$$\left. \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_a(y)} \right|_{\phi_a=0} = \underbrace{\Pi^{(2)}(x,y) - (\square + m^2) \delta(x-y)}_{\Gamma^{(2)}(x,y)}$$

$$n \geq 2 \Rightarrow \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta \phi_a(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_a(x_n)} \hat{\Gamma}[\phi_a] \Big|_{\phi_a=0}$$

Suponha que definamos  $\Gamma[\phi_a]$  com a expressão:

$$W[\mathcal{J}] = \Gamma[\phi_a] + \int d^4x \mathcal{J}(x) \phi_a(x)$$

(eq. 90.2)

$$\Rightarrow \frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x)} = \phi_a(x)$$

(eq. 90.3)

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(y)} \left( \Gamma[\phi_a] = W[\mathcal{J}] - \int d^4x \mathcal{J}(x) \phi_a(x) \right)$$

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_a]}{\delta \phi_a(y)} = \underbrace{\frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \phi_a(y)}}_{\frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(y)} \frac{\delta \mathcal{J}(y)}{\delta \phi_a(y)}} - \frac{\delta \mathcal{J}(y)}{\delta \phi_a(y)} \phi_a(y) - \mathcal{J}(y)$$



$$\underbrace{\frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(y)}}_{\phi_a(y)} \frac{\delta \mathcal{J}(y)}{\delta \phi_a(y)} \Big|_{\phi_a=\phi_a(y)}$$

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_a]}{\delta \phi_a(y)} = -J(y)$$

que é justamente como o definimos antes (eq. 90.1)

Note que a função 1PI de dois pontos é  $\Pi^{(2)}(x,y)$  e não  $\Gamma^{(2)}(x,y)$

Temos uma interpretação para  $\Gamma^{(2)}$  ?

TEORIA LIVRE  
 $\Delta_F^C(x-y) = i \Delta_F(x-y) = \frac{-i}{p^2 - m_0^2}$

$$\phi_a(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} \quad \Delta_F^C(x-y) \quad \text{Propagador completo}$$

$$\frac{\delta \phi_a(x)}{\delta J(y)} = \frac{\delta^2 W}{\delta J(y) \delta J(x)} = i \langle n | T \{ \phi_a(x) \phi(y) \} | n \rangle$$

EQ 89.1

$$- \Delta_F(x-y) \left( 1 + \int d^4z \Pi^{(2)}(y,z) \frac{\delta \phi_a(z)}{\delta J(y)} + \dots \right) = i \Delta_F^C(x-y)$$

$i \Delta_F^C(z-y) \rightarrow 0 \quad J = \phi_a = 0$

Quando faço  $J=0 \rightarrow \phi_a = 0$  (eq 88)

$$- \Delta_F(x-y) - i \Delta_F(x-y) \int d^4z \Pi^{(2)}(y,z) \Delta_F^C(z-y) = i \Delta_F^C(x-y)$$

$$- (\square + m)^2_x \left( \int d^4z \left( \delta^4(z-x) + \Delta_F(x-y) \Pi^{(2)}(y,z) \right) \Delta_F^C(z-y) = i \Delta_F^C(x-y) \right)$$

$$\int d^4z \left( -(\square + m)^2_x \delta^4(z-x) + \delta(x,y) \Pi^{(2)}(y,z) \right) \Delta_F^C(z-y) = i \delta(x-y)$$

$\Gamma^{(2)}(x,y)$  (eq 90)

$$\int d^4y \Gamma^{(2)}(x,y) \Delta_F^C(y-y) = i \delta(x-y)$$

(eq. 92.1)

$\Gamma^{(2)}(x,y)$  é a inversa do propagador completo! No espaço dos momentos:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^{(2)}(x,y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} \Gamma^{(2)}(p) \\ \Delta_F^C(y,y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} \Delta_F^C(p) \end{aligned} \right\} \begin{cases} \int d^4y \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} \Gamma^{(2)}(p) \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{-i p'(y-y)} \Delta_F^C(p') = i \delta(x-y) \\ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \delta^4(p-p') \Gamma^{(2)}(p) \Delta_F^C(p') e^{-i p x} e^{i p' y} = i \delta(x-y) \\ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Gamma^{(2)}(p) \Delta_F^C(p) e^{-i p(x-y)} = i \delta(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} i e^{-i p(x-y)} \end{cases}$$

$$\Gamma^{(2)}(p) \Delta_F^C(p) = i$$

(eq. 92.2)

$$\Delta_F^C(p) = \frac{i}{p^2 - \underbrace{m^2}_{m^2 = m_0^2 + M^2(p^2)}}$$

massa física  $\rightarrow$   $m^2 = m_0^2 + M^2(p^2)$   $\rightarrow$  correções 1PI ao propagador (pg 85)

massa livre  $\rightarrow$   $m_0^2$

função de Green de 2-pontos completa

$$\Gamma^{(2)}(p) = -i (p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)) = i (M^2(p^2) - (p^2 - m_0^2))$$

$$\Gamma^{(2)}(x,y) = \Gamma^{(2)}(x,y) - (0 + m_0^2) \delta(x-y)$$

Queremos achar relações análogas a 92.1 e 92.2 para vértices de mais pontos. Notando que:

$$\Delta_F^C(y-y) = \left( -i \frac{\delta^2 W}{\delta J(y) \delta J(y)} \right) \stackrel{90.3}{=} -i \frac{\delta \phi_a(y)}{\delta J(y)}$$

Podemos escrever a seguinte derivada

$$\frac{\delta}{\delta J(x'')} = \int d^4z'' \frac{\delta \phi_a(z'')}{\delta J(x'')} \frac{\delta}{\delta \phi_a(z'')} = i \int d^4z'' \Delta_F^C(z'', x'') \frac{\delta}{\delta \phi_a(z'')}$$

(eq. 92.3)

$$\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x'')} \int dz \Delta_F^c(x, z) \Gamma^{(2)}(z, y) = 0$$

$$\int dz \left( \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x'')} \Delta_F^c(x, z) \right) \Gamma^{(2)}(z, y) + \int dz \Delta_F^c(x, z) \left( \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x'')} \Gamma^{(2)}(z, y) \right) = 0$$

92.3

$$\int dz \left( -i \frac{\delta^3 W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x'') \delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(y)} \right) \Gamma^{(2)}(z, y) + i \int dz d z'' \Delta_F^c(x, z) \times \Delta_F^c(z'', x'') \left( \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_\alpha(z'') \delta \phi_\alpha(z) \delta \phi_\alpha(y)} \right) = 0$$

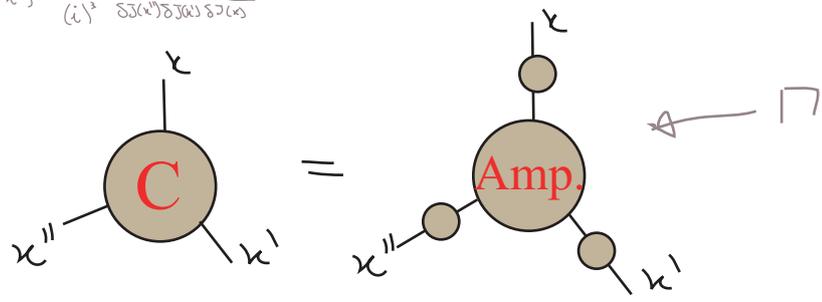
$\times i \Delta_F^c(x', y)$   
 $\int dy$

$$\int dz \frac{\delta^3 W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x'') \delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(y)} \int dy \underbrace{(\Delta_F^c(x', y) \Gamma^{(2)}(z, y))}_{i \delta(x' - y)} + \int dz d z'' dy \Delta_F^c(x, z) \Delta_F^c(z'', x'') \Delta_F^c(x', y) \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_\alpha(z'') \delta \phi_\alpha(z) \delta \phi_\alpha(y)} = 0$$

$y \rightarrow z'$

$$i \frac{\delta^3 W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x'') \delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(z')} = \int dz d z'' dz' \Delta_F^c(x, z) \Delta_F^c(z'', x'') \Delta_F^c(x', z') \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_\alpha(z'') \delta \phi_\alpha(z) \delta \phi_\alpha(z')}$$

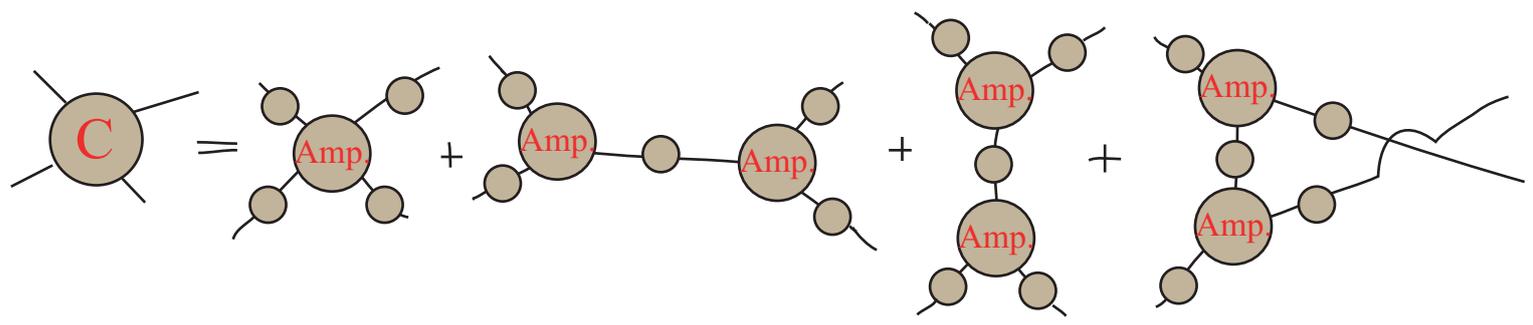
$$\phi(x, x', x'') = \frac{1}{(i)^3} \frac{\delta^3 W}{\delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(x') \delta \mathcal{J}(x')}$$



O que nos mostra que a função de vértice de fato contém os diagramas amputados que queríamos. Outra forma de ver isso é invertendo a expressão acima:

$$\frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta\phi(z'') \delta\phi(z) \delta\phi(z')} = - \int dx dx' dx'' \underbrace{\Gamma^{(A)}(x, z) \Gamma^{(A)}(x', z') \Gamma^{(A)}(x'', z'')}_{\text{como estes são os inversos dos propagadores completos, o efeito deles sobre o correlator será o de "amputar" os propagadores.}} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x'') \delta J(x) \delta J(x')} \quad (\text{eq. 94.1})$$

Podemos continuar derivando para obter expressões para as funções de ordem superior. Em termos de diagramas, a expressão para a função de 4 pontos seria:



Obs: note que na pg 90, trocamos a definição de  $\Gamma[\phi_c]$  dada por 90.1 por:

$$W[J] = \Gamma[\phi_c] + \int dx J(x) \phi_c(x)$$

com  $\boxed{\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \phi_c(x)} \quad \boxed{\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_c(x)} = -J(x)}$

$f(x) \rightarrow g(u) \quad u = \frac{df}{dx}$   
 $g(u) = f(x) - ux$

o que é uma generalização da transformada de Legendre

### Identidades de Ward-Takahashi na QED

(Ryder 7.4, Peskin 7.4)

Com as definições feitas nas últimas páginas podemos agora provar uma generalização das identidades de Ward para os propagadores e vértices completos, as identidades de Ward-Takahashi. Começemos notando que quando quantizamos o campo eletromagnético fomos obrigado a fixar o gauge, pensando na Lagrangeana da QED:

$$\mathcal{L}_{\text{EFF}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \bar{\Psi} \not{\partial} (\not{\partial} + ie A_\mu) \Psi - m \bar{\Psi} \Psi - \underbrace{\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2}_{\mathcal{L}_{\text{GF}}} \quad (\text{eq. 94.2})$$

A Lagrangeana fixada, no entanto, não é invariante de gauge - mas precisamos que os observáveis da teoria - que vêm das funções de Green - o sejam. Portanto o funcional gerador deve ser invariante. Assim, dada uma transformação de gauge infinitesimal:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha \quad \alpha = \alpha(x)$$

$$\psi \rightarrow \psi - i e \alpha \psi$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} + i e \alpha \bar{\psi}$$

vamos ver o que acontece com Z. Lembrando que no funcional gerador aparece:

$$S = \int d^4x \left( \mathcal{L}_{\text{EFF}} + \bar{J}^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\Psi} \eta \right)$$

Quase toda a lagrangeana efetiva é invariante de gauge, com exceção do termo de gauge-fixing:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 &\rightarrow -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu + \square \alpha) (\partial^\nu A_\nu + \square \alpha) = \\
 &= -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{\xi} \underbrace{(\partial^\mu A_\mu)(\square \alpha)}_{\text{integração por partes:}} + \mathcal{O}(\alpha^2) \\
 &\quad \int d^4x (\partial^\mu A_\mu)(\square \alpha) = \int d^4x (\square \partial^\mu A_\mu) \alpha(x)
 \end{aligned}$$

As fontes também contribuem para a variação:

$$\underbrace{\bar{J}^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\Psi} \eta}_{\mathcal{L}_F} \rightarrow \mathcal{L}_F + \underbrace{\bar{J}^\mu \partial_\mu \alpha}_{\text{integração por partes:}} - i e \alpha \bar{\eta} \psi + i e \alpha \bar{\Psi} \eta$$

$$\int d^4x \bar{J}^\mu \partial_\mu \alpha = - \int d^4x (\partial_\mu \bar{J}^\mu) \alpha(x)$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iS} &\rightarrow N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ -\frac{1}{2\xi} (\square \partial^\mu A_\mu) - \partial_\mu \bar{J}^\mu + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - i e \bar{\eta} \psi + i e \bar{\Psi} \eta \right] \alpha(x) \right\} e^{iS}
 \end{aligned}$$

Considerando que  $\alpha(x)$  é pequeno, podemos expandir a exponencial e obter:

$$Z \rightarrow Z + N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \left\{ \int d^4x \underbrace{\left[ -\frac{1}{\xi} (\square \partial^\nu A_\nu) - \partial_\mu J^\mu - i e (\bar{\eta} \Psi - \bar{\Psi} \eta) \right]}_{\mathcal{O}[A_\mu, \bar{\Psi}, \Psi]} \right\} e^{iS}$$

Uma forma simples de tratar  $\mathcal{O}$  é usar o mesmo método que usamos para tratar interações anteriormente - transformamos ele em um operador diferencial agindo na exponencial da ação, fazendo as substituições:

$$\Psi \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \quad \bar{\Psi} \rightarrow -\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta} \quad A_\mu \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\mu}$$

$Z = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{iS_{\text{eff}} + i \int d^4x (J^\mu A_\mu + \bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta)}$

Então:

$$\hat{\mathcal{O}}[A_\mu, \bar{\Psi}, \Psi] = \left[ +\frac{i}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta}{\delta J^\nu} - \partial^\mu J_\mu - e \left( \bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right]$$

$$Z \rightarrow \left( 1 + \int d^4x \alpha(x) \hat{\mathcal{O}} \right) Z$$

Para garantir a invariância de  $Z$ , qualquer que seja  $\alpha$ , precisamos que:  $\hat{\mathcal{O}} Z = 0$  ↖ zero!

$$\left[ +\frac{i}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta}{\delta J^\nu} - \partial^\mu J_\mu - e \left( \bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right] Z = 0$$

$$Z = e^{iW}$$

$$\left[ -\frac{1}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta W}{\delta J^\nu} - \partial^\mu J_\mu - i e \left( \bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta W}{\delta \eta} \right) \right] e^{iW} = 0$$

$$-\frac{1}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta W}{\delta J^\nu} - \partial^\mu J_\mu - i e \left( \bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} + \frac{\delta W}{\delta \eta} \eta \right) = 0$$

Fazemos então uma generalização da definição para as funções de vértice, usando a transformação de Legendre mas três variáveis:

$$\Gamma[\Psi_\mu, \bar{\Psi}_\mu, A_\mu^0] = W[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] - \int d^4x (\bar{\eta} \Psi_\mu + \bar{\Psi}_\mu \eta + J^\mu A_\mu^0)$$

\* parece errado no Ryder

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} = -J^\mu \quad \frac{\delta W}{\delta \bar{J}_\mu} = A_\mu^a$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a} = +\bar{\eta} \quad \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} = \psi_a$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a} = -\eta \quad \frac{\delta W}{\delta \eta} = -\bar{\psi}_a$$

\* parece errado no Ryder

\* tem um i na derivada em A e um sinal errado entre os fermiônicos

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu^a} \left( \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} + \int d^4x \left( \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a} \psi_a + \bar{\psi}_a \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a} \right) \right) = 0$$

alguns autores se referem a esta equação como Ward Takahashi ou W-T Generalizada

(eq. 97.1)

Esta relação entre os geradores das funções de vértice garante a invariância de gauge de Z em todas as ordens de perturbação. A partir dela podemos obter algumas relações mais conhecidas:

(I) aplicando as derivadas abaixo de ambos os lados de 97.1

$$\frac{\delta}{\delta \psi_a(y)} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(x_1)} \left( \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a(x)} \psi_a(x) \right) = \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(x_1)} \left[ \delta(x-y_1) \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a(x)} + \dots \right] = -\delta(x-y_1) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_a(x) \delta \bar{\psi}_a(x_1)} + \dots$$

$$\frac{\delta}{\delta \psi_a(y)} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(x_1)} \left( \bar{\psi}_a(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \right) = \frac{\delta}{\delta \psi_a(y_1)} \left[ \delta(x-x_1) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a(x)} + \dots \right] = \delta(x-x_1) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_a(y_1) \delta \bar{\psi}_a(x)}$$

e então fazemos:  $\psi_a = \bar{\psi}_a = A_\mu^a = 0$

$$\frac{\delta^3 \Gamma[0]}{\delta \psi_a(y) \delta \bar{\psi}_a(x_1) \delta A_\mu^a(x)} = +ie \left( -\delta(x-y_1) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \psi_a(x) \delta \bar{\psi}_a(x_1)} + \delta(x-x_1) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \psi_a(y_1) \delta \bar{\psi}_a(x)} \right)$$

$$\Gamma_{ijN}^{(3)}(y_1, x_1, x) = ie \delta(x-x_1) [S_F^c(y_1-x)]^{-1} - ie \delta(x-y_1) [S_F^c(x-x_1)]^{-1}$$

$$\frac{\delta^3 \Gamma^{(3)}}{\delta \psi_a(y) \delta \bar{\psi}_a(x_1) \delta A_\mu^a(x)} = ie \delta(x-x_1) [S_F^c(y_1-x)]^{-1} - ie \delta(x-y_1) [S_F^c(x-x_1)]^{-1}$$

(eq. 97.2)

Passando para o espaço dos momentos temos:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-x_1) \left[ \sum_F^< (y_1-x_1) \right]^{-1} = \\ & = \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-x_1) \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(y_1-x_1)} \left[ \sum_F^< (P_1') \right]^{-1} = \\ & = \int d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx_1} \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(y_1-x_1)} \left[ \sum_F^< (P_1') \right]^{-1} = \\ & = (2\pi)^4 \int d^4P_1' \, \delta(P_1 - P_1') \, \delta(P_2 + k + P_1') \left[ \sum_F^< (P_1') \right]^{-1} = (2\pi)^4 \, \delta(k + P_1 - P_2) \left[ \sum_F^< (P_1) \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-y_1) \left[ \sum_F^< (x-x_1) \right]^{-1} = \\ & = \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-y_1) \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(x-x_1)} \left[ \sum_F^< (P_1') \right]^{-1} = \\ & = \int d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{iky_1} \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(y_1-x_1)} \left[ \sum_F^< (P_1') \right]^{-1} = \\ & = (2\pi)^4 \int d^4P_1' \, \delta(P_1 + k - P_1') \, \delta(-P_2 + P_1') \left[ \sum_F^< (P_1') \right]^{-1} = (2\pi)^4 \, \delta(P_1 + k - P_2) \left[ \sum_F^< (P_2) \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$\int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, d_x^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(y_1, x_1, x) = -k^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(P_1, -P_2, k)$$

$$-k^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(P_1, -P_2, k) = i e (2\pi)^4 \, \delta(k + P_1 - P_2) \left\{ \left[ \sum_F^< (P_1) \right]^{-1} - \left[ \sum_F^< (P_2) \right]^{-1} \right\}$$

$$-i k^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(P_1, -P_2, k) = e (2\pi)^4 \, \delta(k + P_1 - P_2) \left\{ \left[ \sum_F^< (P_1 + k) \right]^{-1} - \left[ \sum_F^< (P_1) \right]^{-1} \right\}$$

Da forma como está definida,  $\Gamma_{ijN}^{(3)}$  contém a carga e conservação de momento, para separar estes de forma explícita:

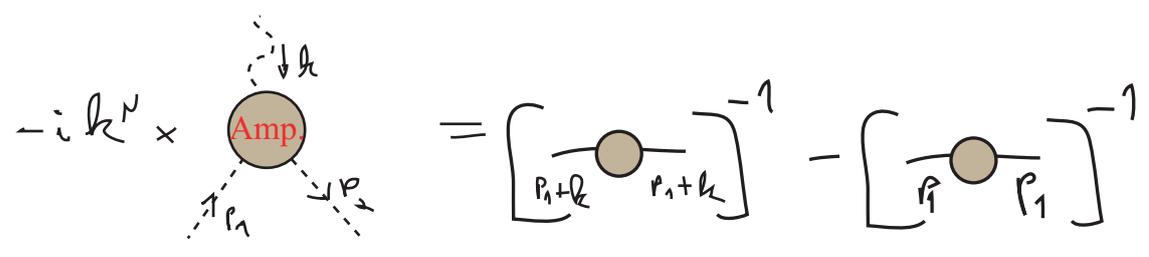
$$\Gamma_{ij;N}^{(3)}(p_1, p_2; k) \equiv e^{(2\pi)^4 \delta^4(p_1+k-p_2)} \Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; k)$$

$$-i k^\mu \Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; k) = \left[ \Sigma_F^<(p_1+k) \right]^{-1} - \left[ \Sigma_F^<(p_1) \right]^{-1}$$

(eq. 99.1)

Identidade de Ward-Takahashi

Que, em diagramas, fica:

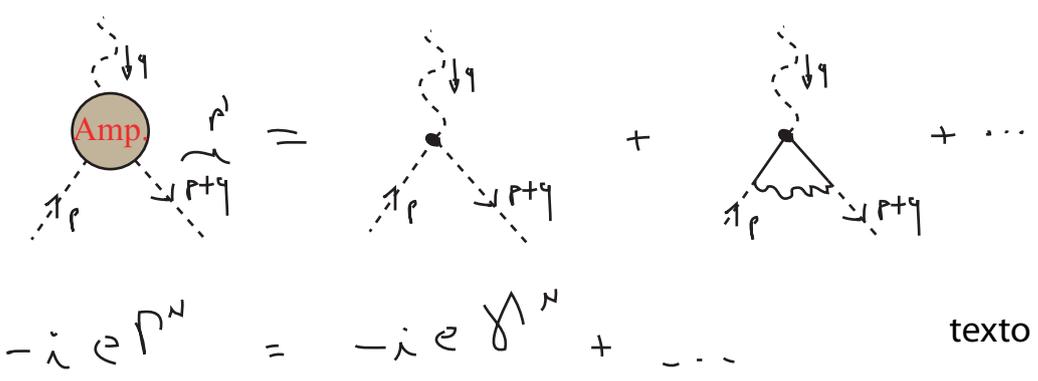


A partir da equação 97.1 podemos fazer outras combinações de derivações funcionais para obter relações entre diagramas com mais pontos ou diferentes campos.

## Correções Radiativas na QED

### Função de Vértice

(Peskin secs 6.2 e 6.3)



Considerando simplesmente a estrutura de Lorentz e a restrição oriunda da indentidade de Ward, podemos escrever uma forma geral para a função de vértice

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

L.O.  $\rightarrow$  
 $F_1^{LO}(q^2) = 1$   
 $F_2^{LO}(q^2) = 0$ 
 (eq. 99.2)

$\rightarrow$  Fatores de Forma

L.O. - leading order (primeira contrib. não nula em teoria de perturbação)

Tanto  $F_1$  quanto  $F_2$  têm interpretação física. O espalhamento em um potencial eletrostático é dado por:

$$A_{\mu}^{EXT}(k) = (\phi(\vec{x}), 0, 0, 0) \quad A_{\mu}^{EXT}(q) = (2\pi \delta(q^0) \tilde{\phi}(\vec{q}), 0, 0, 0)$$

estático e varia muito pouco no espaço

$$iM = -ie \bar{u}(p') \Gamma^0 u(p) \tilde{\phi}(\vec{q})$$

$\hookrightarrow \sim S(q)$

$q \rightarrow 0 \Rightarrow \Gamma^0 = \gamma^0 F_1(0)$

$$iM = -ie F_1(0) \bar{u}(p') \gamma^0 u(p)$$

De onde vemos que  $F_1(0)$  é a carga do elétron, em unidades de  $e$ .  $\Rightarrow \boxed{F_1(0) = 1}$  (eq. 100.2)

Como ele já é 1 em primeira ordem pert., vemos que as correções a este fator devem ser 0 para  $q^2 = 0$

O mesmo pode ser feito para  $F_2$  em um campo vetorial constante:

$$A_{\mu}^{EXT}(k) = (0, \vec{A}(\vec{x}))$$

$$iM = -ie \bar{u}(p') \Gamma^i u(p) A^i(\vec{q})$$

$$iM = -ie \bar{u}(p') \Gamma^i u(p) A^i(\vec{q})$$

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix}$$

$q \rightarrow 0$   
 $\sim$  RELATIVIST.

$$iM = -ie (2m) \cdot e \sum^{iT} \left( -\frac{1}{2m} \sigma^k \left[ \underbrace{F_1(0)}_1 + F_2(0) \right] \right) \underbrace{\left( -ie \epsilon^{ijk} q^i A^j(\vec{q}) \right)}_{B^k(\vec{q})}$$

comparando com a aprox. de Born

$$\langle p' | iT | p \rangle = -ie \tilde{V}(q) 2\pi \delta(E_{p'} - E_p)$$

$$V(\vec{x}) = - \underbrace{\langle \vec{\mu} \rangle}_{\substack{\text{Momento} \\ \text{magnético} \\ \text{do elétron}}} \cdot \vec{B}^p(x)$$

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{e}{m} [1 + F_2(0)] \left\{ \vec{L} + \frac{\sigma^p}{2} \right\}$$

Spin do  $e^-$

Se escrevermos o momento magnético da forma usual:  $\vec{\mu} = g \left( \frac{e}{2m} \right) \vec{S}$

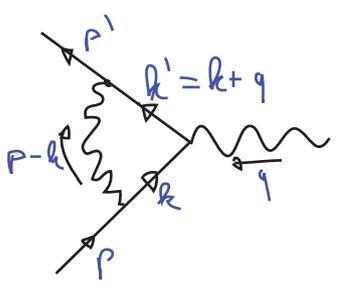
$$g = 2 + 2 F_2(0)$$

Vimos (eq 99.2) que  $F_2 = 0$  em primeira ordem pert. portanto  $g = 2$  nesta ordem. Mas ele será corrigido em ordens superiores:

$$g = 2 + \underbrace{O(\alpha)}_{\substack{\text{Momento} \\ \text{magnético} \\ \text{anômalo} \\ \text{do elétron}}} + \dots$$

Vamos calcular as correções de primeira ordem ao vértice:  $\Gamma^N = \gamma^N + \delta \Gamma^N$

Lembrando sempre que isto aparece em:



$$\bar{u}(p') (-ie \delta \Gamma^N) u(p) \frac{(-i) g_{NB}}{q^2} \dots$$

$$\delta \Gamma^N = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ie \gamma_{VP}}{(k-p)^2 + i\epsilon} (-ie \gamma^V) i \frac{(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^N i \frac{(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie \gamma^P) =$$

$$\gamma_P \gamma^N \gamma^P = -2 \gamma^N$$

$$\gamma^N \cdot \not{k} = \gamma^N \gamma^V k_V = [2g^{NV} - \gamma^V \gamma^N] k_V = 2 k^N - \not{k} \gamma^N$$

$$-m (\gamma^N \not{k} + \not{k} \gamma^N + \gamma^N \not{k}' + \not{k}' \gamma^N) = -m (2k^N + 2k'^N) = -2m (k + k')^N$$

$$= 2i e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{[\not{k} \gamma^\mu \not{k}' + m^2 \not{0} - 2m(\not{k} + \not{k}')^\mu]}{[(k-p)^2 + i\epsilon][k^2 - m^2 + i\epsilon][k'^2 - m^2 + i\epsilon]} \quad (\text{eq. 102.1})$$

Para fazer esta integral usaremos o método conhecido como **parametrização de Feynman**. A idéia é transformar o denominador acima em um único polinômio de grau 2 em k (que por sua vez estará elevado a 3). Fica fácil ver com fazemos isso no caso da integral simples:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[xA + yB]^2}$$

Que poderia ser usada para integrar:

parâmetros de Feynman

$$\int d^4 k \frac{1}{(k-p)^2 (k^2 - m^2)} = \int d^4 k \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[x(k-p)^2 + y(k^2 - m^2)]^2} =$$

$$= \int d^4 k \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[(x+y)k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - m^2 y]^2}$$

$$l \equiv k - xp \Rightarrow [l^2 - m^2 y]$$

$$d^4 k = d^4 l$$

ficaria bem fácil fazer a integral em L, uma vez que é esfericamente simétrica

Temos uma identidade mais geral para o caso de vários fatores no denominador:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n]^n}$$

(eq. 102.2)

Aplicando isso ao denominador de 102.1 temos:

$$\frac{1}{[(k-p)^2 + i\epsilon][\underbrace{k^2 - m^2 + i\epsilon}_{(k+q)^2}][k^2 - m^2 + i\epsilon]} = \int_0^1 dx \int_0^y dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3}$$

$$\begin{aligned} D &= x[k^2 - m^2 + i\epsilon] + y[\underbrace{k^2 - m^2 + i\epsilon}_{(k+q)^2}] + z[(k-p)^2 + i\epsilon] = \\ &= x(k^2 - m^2) + y(k^2 + 2k \cdot q + q^2 - m^2) + z(k-p)^2 + \underbrace{(x+y+z)}_1 i\epsilon = \\ &= xk^2 - xm^2 + yk^2 + 2yk \cdot q + yq^2 - ym^2 + zk^2 - 2zk \cdot p + zp^2 + i\epsilon = \\ &= \underbrace{k^2 + 2yk \cdot q - 2zk \cdot p + zp^2}_{\ell^2} + yq^2 - xm^2 - ym^2 + i\epsilon = \\ &\quad \downarrow \ell = k + yq - zp \\ &= \underbrace{\ell^2 + 2yq \cdot p - y^2 p^2 - y^2 q^2 + zp^2 + yq^2 - xm^2 - ym^2}_{\ell^2 + i\epsilon - \Delta} = \\ &= \ell^2 + i\epsilon - \Delta \end{aligned}$$

"a bit of algebra"

$$\begin{aligned} -\Delta &= 2yq \cdot p - \underbrace{y^2 p^2}_{m^2} - \underbrace{y^2 q^2}_{m^2} + zp^2 + yq^2 - xm^2 - ym^2 = \\ &= p \cdot q = p \cdot (p' - p) = p \cdot p' - p^2 = p \cdot p' - m^2 \\ &= 2yq \cdot p \cdot p' - 2yq \cdot m^2 - \underbrace{y^2 m^2}_{m^2} - y^2 q^2 + zm^2 + yq^2 - xm^2 - ym^2 = \\ &= m^2(-2yq + z - x - y - y^2) + \underbrace{2yq \cdot p \cdot p'}_{\substack{\uparrow \\ \text{Lo } 2p \cdot p' = 2m^2 - q^2}} - y^2 q^2 + yq^2 = \\ &= q^2 = (p' - p)^2 = \underbrace{p'^2 + p^2}_{2m^2} - 2p \cdot p' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= m^2 \left( \underbrace{-2xy + z^{-x-y-z^2+2yz}}_{-(1-z)^2} \right) + \underbrace{(-xy - y^2 + y)}_{xy} q^2 = \\
 &= -(1-z)^2 m^2 + xy q^2
 \end{aligned}$$

$q^2 < 0$

$$\Delta = -xy q^2 + (1-z)^2 m^2 > 0$$

$$D = \not{\partial}^2 + i\varepsilon - \Delta = \not{\partial}^2 + i\varepsilon + xy q^2 - (1-z)^2 m^2$$

$$\int \pi^N = 2i e^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} [\not{m}]$$

Falta fazer a mudança de variáveis no numerador

$$[\not{m}] = [\not{\ell} \not{\gamma}^N \not{\ell}' + m^2 \not{0}^N - 2m(\not{k} + \not{k}')^N]$$

Isso envolve um bocado de álgebra, é necessário lembrar que:

$$\text{(I)} \quad D = D(\ell^2) \Rightarrow \begin{cases} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^N}{D^3} = 0 \\ \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^N \ell^\nu}{D^3} = \frac{1}{4} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{g^{\nu N} \ell^2}{D^3} \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad [\not{m}] \text{ está entre espinores: } \bar{u}(p') [\not{m}] u(p)$$

portanto podemos trocar  $\not{p} u(p) = m u(p)$

De resto é só usar relações de comutação e as relações entre os momentos para chegar em:

$$[\not{m}] = \left[ \not{\gamma}^N \left( -\frac{1}{2} \ell^2 + (1-x)(1-y) q^2 + (1-2z-z^2) m^2 \right) + (\not{p}' + \not{p}) \cdot m z (z-1) - \right]$$

$$+ \gamma^\mu \cdot m (z-2)(x-y) ]$$

pois é ímpar sobre a troca  $x \leftrightarrow y$  (todo o resto da integral é par)

Usando a identidade de Gordon:

$$\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[ \frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p)$$

podemos fazer:  $p'^\mu + p^\mu \rightarrow 2m \delta^\mu - i \sigma^{\mu\nu} q_\nu$

obtendo:

$$\Gamma^\mu = 2i e^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} \times$$

$$\times \left[ \gamma^\mu \left( -\frac{1}{2} \ell^2 + (1-x)(1-y) q^2 + (1-y) z + z^2 \right) m^2 + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} (2m^2 z(1-z)) \right] \quad (\text{eq. 105.1})$$

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2)$$

Fica bem mais fácil fazer a integral em 4D caso possamos passar para coordenadas esféricas em 4D, podemos fazer isso se passarmos para o espaço Euclidiano por meio de uma **rotação de Wick**

$$q^0 = i q_E^0$$

$$d^4 \ell = i d^4 \ell_E \quad d^3 \vec{\ell}_E = i d^3 \vec{\ell}$$

$$\vec{\ell} = \vec{\ell}_E$$

$$\ell^2 = - (q_E^0)^2 - (\vec{\ell}_E)^2 = - \ell_E^2$$

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^m} = i \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[-\ell_E^2 - \Delta]^m} = \frac{i}{(-1)^m} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 \ell_E \frac{1}{[\ell_E^2 + \Delta]^m}$$

$$= \frac{\lambda(-1)^m}{(2\pi)^4} \int_{2\pi^2} d\mathcal{L}_4 \int_0^\infty d\mathcal{L}_E \frac{\mathcal{L}_E^3}{[\mathcal{L}_E^2 + \Delta]^m} =$$

$\mu = \mathcal{L}_E^2 + \Delta$   
 $d\mu = 2\mathcal{L}_E d\mathcal{L}_E$

$$\Rightarrow \int_\Delta^\infty \frac{d\mu}{2} \frac{\mu - \Delta}{\mu^m} = \frac{1}{2} \frac{\Delta^{2-m}}{(m-1)(m-2)}$$

$m \geq 3$

$$= \frac{\lambda(-1)^m}{(2\pi)^4} 2\pi^2 \frac{1}{2} \frac{\Delta^{2-m}}{(m-1)(m-2)} = \frac{\lambda(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-1)(m-2)} \frac{1}{\Delta^{m-2}}$$

$m \geq 3$

(eq. 106.1)

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta]^m} = i \int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4} \frac{-\ell_E^2}{[-\ell_E^2 - \Delta]^m} = \frac{\lambda(-1)^{m+1}}{2^3 \pi^2} \int_0^\infty d\mathcal{L}_E \frac{\mathcal{L}_E^5}{[\mathcal{L}_E^2 + \Delta]^m} =$$

$$\int_\Delta^\infty \frac{d\mu}{2} \frac{(\mu - \Delta)^2}{\mu^m} = \frac{\Delta^{3-m}}{(m-3)(m-2)(m-1)}$$

$m \geq 4$

$$= \frac{\lambda(-1)^{m+1}}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-3)(m-2)(m-1)} \frac{1}{\Delta^{m-3}}$$

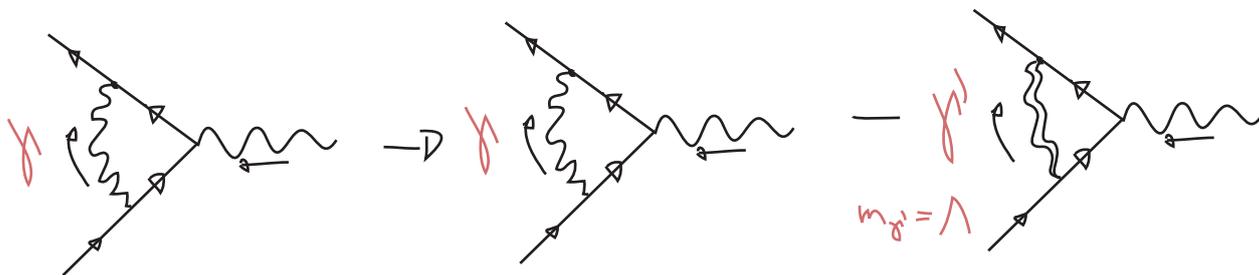
(eq. 106.2)

Aqui temos um problema, já que estamos justamente interessados em integrar termos com  $D^3$  no denominador e a integral é divergente neste caso

$$\int_\Delta^\infty \frac{d\mu}{2} \frac{\mu^2 - 2\mu\Delta + \Delta^2}{\mu^3} = \lim_{K \rightarrow \infty} \ln \left[ \frac{K}{\Delta} \right]$$

Estudaremos o significado desta divergência em breve. Por enquanto vamos dar um jeito de isolar esta divergência na integral, este procedimento é chamado de **regularização** e existem muitas técnicas diferentes para executá-la. O importante é não confundir este procedimento com a renormalização, tudo que a regularização faz é colocar a resposta numa forma em que a divergência fique mais fácil de analisar, separada de uma parte finita (o que ajuda muito na hora de renormalizar). O método que usaremos é conhecido como **regularização de Pauli-Villars** e consiste em introduzir uma nova partícula fictícia de massa  $\Lambda$ . Nosso objetivo é fazer a seguinte modificação no propagador do fóton que está no loop:

$$\frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(k-p)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}$$



Note que recuperamos o propagador usual fazendo  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$

mas para  $k^2 \gg \Lambda^2$  podemos desprezar  $\Lambda^2$  e os dois propagadores se cancelam.

Se voltarmos na pg 103 vemos que ganhamos uma nova contribuição em que a única mudança introduzida é (nada muda nos numeradores):

$$\Delta_\lambda = -xy q^2 + (1-z)^2 m^2 + z\Lambda^2$$

De forma que agora temos:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left( \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta]^3} - \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta_\lambda]^3} \right) = \frac{2i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty d\ell_E \left( \frac{\ell_E^5}{[\ell_E^2 + \Delta]^3} - \frac{\ell_E^5}{[\ell_E^2 + \Delta_\lambda]^3} \right) = \\ & = \frac{2i}{(4\pi)^2} \lim_{K \rightarrow \infty} \left[ \int_\Delta^K \frac{d\mu}{2} \left( \frac{\mu^2 - 2\mu\Delta + \Delta^2}{\mu^3} \right) - \int_{\Delta_\lambda}^K \frac{d\mu}{2} \left( \frac{\mu^2 - 2\mu\Delta_\lambda + \Delta_\lambda^2}{\mu^3} \right) \right] = \\ & = \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{K \rightarrow \infty} \left[ \ln \left[ \frac{K}{\Delta} \right] + \frac{3}{2} - 2 \frac{\Delta}{K} + \frac{\Delta^2}{2K^2} - \left( \ln \left[ \frac{K}{\Delta_\lambda} \right] + \frac{3}{2} - 2 \frac{\Delta_\lambda}{K} + \frac{\Delta_\lambda^2}{2K^2} \right) \right] = \\ & = \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \left[ \frac{\Delta_\lambda}{\Delta} \right] \end{aligned}$$

As integrais finitas mudam da seguinte forma:

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^3} - \frac{1}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda]^3} \right) \stackrel{\text{eq 106.1 / m=3}}{=} -\frac{i}{2(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta_\Lambda} \right)$$

$\mathcal{O}(\Lambda^2)$  ←

podemos ignorar esta modificação se  $\Lambda \gg 1/\Delta$

Voltando com os resultados das integrais na equação 105.1, temos:

$$\begin{aligned} \delta \Gamma^N = & 2i e^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \gamma^\mu \left[ \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\Delta_\Lambda}{\Delta} \right] + \frac{1}{2\Delta} \left( (1-x)(1-y)q^2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + (1-y)z + yz \right) m^2 \right] + \frac{1}{2\Delta} \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu (2m^2 z(1-z))}{2m} \right\} \end{aligned}$$

(eq. 105.1)

$$\Delta_\Lambda \underset{\Lambda \gg 1/\Delta}{\sim} \Lambda^2$$

$$\frac{e^2}{4\pi} = \alpha$$

constante de estrutura fina

$$\delta \Gamma^N = \gamma^\mu \delta F_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta F_2(q^2)$$

(eq. 108.1)

$$\delta F_1(q^2) = \left( \frac{\alpha}{2\pi} \right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[ \frac{\Lambda^2}{\Delta} \right] + \frac{1}{\Delta} \left[ (1-x)(1-y)q^2 + (1-y)z + yz \right] m^2 \right\}$$

(eq. 108.2)

$$\delta F_2(q^2) = \left( \frac{\alpha}{2\pi} \right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{\Delta} 2m^2 z(1-z)$$

(eq. 108.3)

### Recapitulando o método usado:

- (1) Usamos os **diagramas de Feynman** para escrever a amplitude
- (2) Combinamos os denominadores dos propagadores usando os **parâmetros de Feynman**
- (3) Completamos quadrados no denominador, mudando a variável de integração para  $\ell$  (somando uma constante a  $k$ )
- (4) Passamos uma **numerador para  $\ell$**  e notamos que as integrais das potências ímpares são nulas. As potências pares são escritas em termos de  $\ell^2, \ell^4, \dots$  (o uso da equação de movimento ajuda muito a simplificação do numerador)
- (5) fazemos a **rotação de Wick** e integramos no espaço Euclideano. Caso as integrais sejam divergentes, usamos algum tipo de **regularização**.

Notamos que  $\int \bar{F}_2$  não tem qualquer divergência, de fato podemos calculá-lo:

$$\int \bar{F}_2(0) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2x^2 y(1-z)}{(1-y)^2 m^2} =$$

$\swarrow x_0 = 1-y-z$

$$0 < x_0 < 1 \Rightarrow 0 < 1-y-z < 1 \Rightarrow 1-z > y > -z$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{1-z} = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0,0011617$$

O valor experimental atual é 0,00115965218073 (28) - tão preciso que é necessário considerar as correções  $O(\alpha^4)$ . Uma vez consideradas, estas correções concordam com este valor em  $1/10^8$

$\int \bar{F}_1$ , no entanto, contém divergências de dois tipos. A primeira, e mais óbvia, está ligada a grandes momentos no loop e é chamada de **divergência ultravioleta**. Na expressão que obtivemos ela apareceu quando retiramos a partícula fictícia da teoria, fazendo:

$$\Lambda \rightarrow \infty$$

$$\int \bar{F}_1 \sim L_N \left[ \frac{\Lambda}{\Delta} \right]$$

A outra está associada a momentos muito pequenos do fóton no loop, e é chamada de **divergência no infravermelho**. Ela fica evidente se tomarmos, por exemplo, o seguinte termo de  $F_1$  e fizermos  $q = 0$

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{\Delta} \left[ (1-y+z^2) m^2 \right]$$

$$\Delta = -2xy q^2 + (1-z)^2 m^2$$

$$q^2=0 \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{(1-y+z+z^2)}{(1-y)^2} =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{-2 + (1-z)(3-z)}{(1-y)^2} = \int_0^1 dz \frac{-2 + (1-z)(3-z)}{(1-z)}$$

→ problema em  $z=1$

É relevante notar que esta divergência não existiria caso o fóton tivesse uma massa  $\mu$ , já que nesse caso teríamos:

$$\Delta(q^2) = -xy q^2 + (1-y)m^2 + y\mu^2 \Rightarrow \Delta(q^2=0) = (1-y)m^2 + y\mu^2$$

De fato, divergências infravermelhas estão ligadas a partículas sem massa (e o quão fácil é produzi-las) e aparecerão em teorias que as contenham.

### Divergência Infravermelha

Começaremos pela divergência de baixas energias. Para facilitar a discussão, vamos assumir que a divergência ultravioleta foi devidamente "resolvida", por enquanto isso significa forçar a condição da eq. 100.2:

$$F_1(0) = 1$$

$$\text{Como: } F_1(q^2) = \underbrace{F_1^e(q^2)}_1 + \underbrace{\delta F_1(q^2)}_{O(\epsilon^3)} + \dots$$

Precisamos que a correção se anule para  $q^2=0$ . O jeito mais rápido de conseguir isso é redefinindo a correção para subtrair o infinito:

$$\delta F_1'(q^2) = \delta F_1(q^2) - \delta F_1(0)$$

Com isso obtemos

$$\delta F_1'(q^2) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{\Delta} \right] + \frac{1}{\Delta} \left[ (1-x)(1-y)q^2 + (1-y+z+z^2)m^2 \right] \right.$$

$$\left. - \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{\Delta_0} \right] - \frac{1}{\Delta_0} \left[ (1-y+z+z^2)m^2 \right] \right\} =$$

$\Delta_0 = (1-y)^2 m^2$

$$= \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[ \frac{\Delta_0}{\Delta} \right] + \frac{(1-x)(1-y)q^2 + (1-yz+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 - xyq^2} + \right. \\ \left. - \frac{(1-yz+z^2)m^2}{m^2(1-z)^2} \right\}$$

É claro que a esta altura esta subtração "a força" é totalmente arbitrária e nos deixa com uma profunda sensação de injustiça, mas quando tratarmos da divergência ultravioleta veremos que ela é justificada. Portanto aguarde mais um pouco.

Voltando à divergência infravermelha, vimos que esta não existe no caso de um fóton com massa. Portanto, uma forma de "regularizar" esta divergência é dar uma pequena massa  $\mu$  para o fóton depois ver o que acontece quando fazemos o limite  $\mu \rightarrow 0$

Temos:

$$SF_1' = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[ \frac{\Delta_0 + \mu^2 z}{\Delta + \mu^2 z} \right] + \frac{(1-x)(1-y)q^2 + (1-yz+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 - xyq^2 + \mu^2 z} + \right. \\ \left. - \frac{(1-yz+z^2)m^2}{m^2(1-z)^2 + \mu^2 z} \right\}$$

REGULAR  
EM  $\mu \rightarrow 0$

Como estamos apenas interessados no limite  $\mu \rightarrow 0$  desprezaremos tudo que não diverge neste limite. A divergência vem dos termos  $(1-z)^2$ , portanto ela ocorre em um "canto" do espaço de parâmetros de Feynman:

$$\left. \begin{array}{l} z \sim 1 \\ x \sim 0 \\ y \sim 0 \end{array} \right\} \text{podemos fazer estas substituições no numerador e no } z \text{ que multiplica } \mu$$

$$SF_1' = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{(1-z)^2 m^2 - xyq^2 + \mu^2} - \frac{-2m^2}{m^2(1-z)^2 + \mu^2} \right\} = \\ = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{(1-z)^2 m^2 - (1-z-y)yq^2 + \mu^2} + \frac{2m^2}{m^2(1-z)^2 + \mu^2} \right\} =$$

$$y = (1-z)\xi = w\xi \\ w = (1-z) \quad z = 1-w$$

$$dz dy = -w dw d\xi$$

$$\begin{aligned} z=0 \rightarrow w=1 & \Rightarrow \int_0^1 dw \int_0^1 d\xi \Rightarrow y=w \rightarrow \xi=1 \\ z=1 \rightarrow w=0 & \Rightarrow y=0 \rightarrow \xi=0 \end{aligned}$$

$$= \left( \frac{\alpha}{2\pi} \right) \int_0^1 \underbrace{w dw}_{\frac{dw^2}{2}} \int_0^1 d\xi \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{w^2 m^2 - w(1-\xi)\xi q^2 + N^2} + \frac{2m^2}{m^2 w^2 + N^2} \right\} =$$

$$= \left( \frac{\alpha}{4\pi} \right) \int_0^1 d\xi \int_0^1 dw^2 \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{w^2 (m^2 - (1-\xi)\xi q^2) + N^2} + \frac{2m^2}{m^2 w^2 + N^2} \right\} =$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 d\xi \left[ \frac{-2m^2 + q^2}{m^2 - q^2 \xi(1-\xi)} \text{Log} \left( \frac{m^2 - q^2 \xi(1-\xi) + N^2}{N^2} \right) + 2m^2 \frac{1}{m^2} \text{Log} \left( \frac{m^2 + N^2}{N^2} \right) \right] =$$

Para  $N^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \text{LN} \left( \frac{m^2 - q^2 \xi(1-\xi)}{N^2} \right) \sim \text{LN} \left( \frac{m^2}{N^2} \right) \equiv \text{LN} \left( \frac{m^2 - q^2}{N^2} \right)$

$$= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 d\xi \left[ \frac{-2m^2 + q^2}{m^2 - q^2 \xi(1-\xi)} + 2 \right] \text{LN} \left( \frac{m^2 - q^2}{N^2} \right) =$$

$$\Delta F_1 = - \frac{\alpha}{2\pi} \underbrace{\int_0^1 d\xi \left[ \frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2 \xi(1-\xi)} - 1 \right]}_{f_{\text{IR}}(q^2)} \text{LN} \left( \frac{m^2 - q^2}{N^2} \right)$$

Este fator de forma modifica a carga, então ele é transportado diretamente para a seção de choque:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{L.O.}} \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \text{LN} \left( \frac{m^2 - q^2}{N^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right]$$

↳ Resultado em "Leading Order" (primeira ordem na expansão pert.)

Como  $\left\{ \begin{array}{l} q^2 < 0 \\ 0 < \int (1-\xi) < \frac{1}{4} \end{array} \right. \Rightarrow \eta < \frac{m^2 + 1q^{3/2}}{m^2 + 1q^{1/4}} < \frac{m^2 + 1q^{3/2}}{m^2 + 1q^2 \xi(1-\xi)} = \frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2 \xi(1-\xi)}$

$\therefore \rho_{\mathbb{R}}(q^2) > 0$

Portanto, não só temos uma seção de choque enorme, mas ainda por cima ela é negativa. Para entender melhor o que está acontecendo, vamos calcular  $f_{\mathbb{R}}$  no limite de alto  $q^2$

$$\int_0^1 d\xi \left[ \frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2 \xi(1-\xi)} - 1 \right] \xrightarrow{q^2 \rightarrow -\infty} \int_0^1 d\xi \left( \frac{-q^2/2}{m^2 - q^2 \xi(1-\xi)} - 1 \right) =$$

$$= \frac{2(-q^2)}{\sqrt{(-q^2)(-q^2+4m^2)}} \text{COTH}^{-1} \left( \sqrt{\frac{1 + \frac{4m^2}{(-q^2)}}{1 - \frac{2m^2}{q^2}}} \right) - 1 =$$

$$= \text{LN} \left( \frac{1 - \frac{2m^2}{q^2} + 1}{1 - \frac{2m^2}{q^2} - 1} \right) - 1 = \text{LN} \left( -\frac{q^2}{m^2} \right) - 1$$

*note que abandonamos a notação  $\text{LN}(-q^2/m^2)$  porque no limite de grandes  $-q^2$ , só estamos interessados nos coeficientes de  $\text{LN}(-\frac{q^2}{m^2}) \approx \text{LN}(-q^2)$*

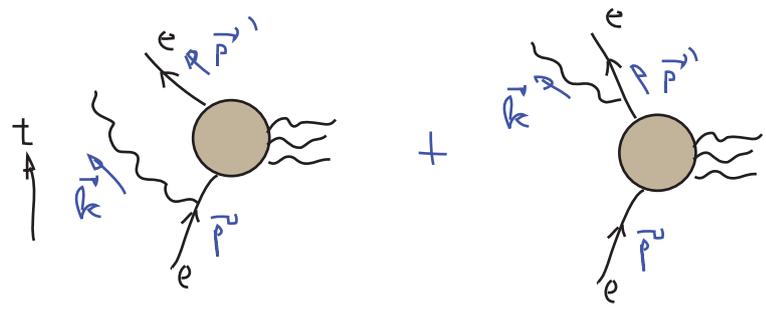
*O  $\text{LN}(m^2)$  é justamente o "1" que foi desprezado aqui*

Temos enfim:

$$F_1(-q^2 \rightarrow \infty) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left( -\frac{q^2}{m^2} \right) \ln \left( -\frac{q^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

(eq. 113.1)

Esta estrutura de dois logaritmos (chamada de "Sudakov double logarithm,") aparece em outro cálculo famoso de QED, o "soft bremsstrahlung", a radiação emitida em baixas frequências por um eletron acelerado. Do ponto de vista de diagramas de Feynman, estamos falando do seguinte processo:



Não calcularemos isto em detalhes (se estiver interessado, olhe a sec 6.1 do Peskin) - o importante é saber que, no limite em que os fotons emitidos tem pouco momento:

$$|k^\nu| \ll |p' - p|$$

podemos fazer a separação:

$$\hat{i} M = \hat{i} M_{el} \cdot f_r$$

fator que dá conta da emissão de 1 fóton  
 amplitude do espalhamento elástico (sem emissão de fóton)  
 amplitude total

na seção de choque ocorre algo semelhante

$$d\sigma(p \rightarrow p' + \gamma) = d\sigma(p \rightarrow p') \cdot \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} \sum_{\lambda=1,2} e^2 \left| \frac{p' \cdot \epsilon^{(\lambda)}}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon^{(\lambda)}}{p \cdot k} \right|^2$$

polarizações do fóton  
 densidade de probabilidade para emissão de um fóton com momento k

Esta probabilidade não pode ser integrada para qualquer k, precisamos respeitar a premissa de que k é pequeno colocando um limite superior na integral:

$$|\vec{k}| < |\vec{q}| = |\vec{p} - \vec{p}'|$$

Com um pouco de álgebra, conseguimos colocar a integral na forma:

$$P_{\text{prob}} \approx \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{|\vec{q}|} dk \frac{1}{k} I(\vec{v}, \vec{v}')$$

velocidades associadas a  $\vec{p}, \vec{p}'$   
 função que não depende de k  
 probabilidade total de emitir um fóton com  $0 < |\vec{k}| < |\vec{q}|$

Esta probabilidade diverge! Temos uma **infinita probabilidade de emitir um fóton de baixo momento** ("soft photons"). Este fato é conhecido como divergência infravermelha da QED. A regularização possível é novamente introduzir uma pequena massa para o fóton, neste caso obtemos:

$$\int_0^{|\vec{q}|} d|\vec{k}| \frac{1}{|\vec{k}|} = \int_0^{|\vec{q}|} \frac{d|\vec{k}|^2}{2|\vec{k}|^2} = \int_{\mu^2}^{|\vec{q}|^2 + \mu^2} \frac{dE^2}{2E^2} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{|\vec{q}|^2 + \mu^2}{\mu^2} \right)$$

No limite:  $|\vec{q}|^2 \rightarrow \infty$   $\left\{ \begin{array}{l} |\vec{q}|^2 \approx -q^2 \end{array} \right.$  (Peskin pg 201)

quando fazemos isso assumimos que o eletron emitindo os fotons "soft" foi acelerado em uma única "pancada", uma aceleração curta e intensa

$$I(\vec{v}, \vec{v}') = 2 \ln \left( \frac{q^2}{m^2} \right) \approx 2 \ln \left( -\frac{q^2}{m^2} \right)$$

Assim, temos:

$$d\sigma(p \rightarrow p' + \gamma) \underset{-q^2 \rightarrow \infty}{\sim} d\sigma_0(p \rightarrow p') \cdot \frac{\alpha}{\pi} \operatorname{Ln}\left(\frac{-q^2}{\nu^2}\right) \operatorname{Ln}\left(-\frac{q^2}{m^2}\right)$$

(eq. 115.1)

que é a expressão que queríamos, comparemos isto com o que obtivemos em 113.1

$$(113.1) \rightarrow F_1(-q^2 \rightarrow \infty) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \operatorname{Ln}\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) \operatorname{Ln}\left(-\frac{q^2}{\nu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

Que modifica a seção de choque de forma que:

$$d\sigma(p \rightarrow p') \underset{-q^2 \rightarrow \infty}{\sim} d\sigma_0(p \rightarrow p') \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \operatorname{Ln}\left(\frac{-q^2}{\nu^2}\right) \operatorname{Ln}\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right]$$

Vemos que, pelo menos até ordem  $\alpha$ , a soma destas duas seções de choque está livre de divergências já que as contribuições se cancelam. Mas o que uma tem a ver com a outra? O fato é que, do ponto de vista prático, não faz muito sentido diferenciar "medi um elétron" de "medi um elétron + um fóton quase sem energia", até porque fótons de energia infinitamente pequena são objetos estranhos (sem momento, nem energia e nem massa). Qualquer medida vai ter uma sensibilidade máxima a fótons "soft", que podemos expressar em termos de uma energia limite  $E_\ell$ , abaixo da qual o fóton não é observado. Assim, a seção de choque total de espalhamento de elétrons é dada por:

$$\frac{d\sigma_{\text{Exp}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p') + \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p' + \gamma(\ell < E_\ell))$$

Se abandonamos o limite  $-q^2 \rightarrow \infty$  obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{Exp}}}{d\Omega} &= \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \operatorname{Ln}\left(\frac{-q^2/m^2}{\nu^2}\right) P_{\text{IR}}(q^2) + \frac{\alpha}{\pi} \operatorname{Ln}\left(\frac{E_\ell^2}{\nu^2}\right) P_{\text{IR}}(q^2) + \dots \right] \\ &= \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} P_{\text{IR}}(q^2) \operatorname{Ln}\left(\frac{-q^2/m^2}{E_\ell^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right] \end{aligned}$$

(eq. 115.2)

Onde já não temos mais  $\mu$ , e podemos tomar o limite  $\mu \rightarrow 0$  sem medo de divergências

É possível mostrar que este cancelamento ocorre para todas as ordens de perturbação (Peskin sec 6.5), neste caso a seção de choque medida é:

$$\frac{d\sigma_{\text{Exp}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \text{EXP} \left[ -\frac{\alpha}{\pi} \ln(q^2) L_N \left( -\frac{q^2}{E_e^2} \right) \right]$$

### Auto-energia do elétron

(Peskin 7.1)

Resta tratar a divergência ultravioleta do vértice elétron-elétron-fóton, veremos agora que ela está ligada às correções radiativas do propagador do elétron. Vamos a elas:

Primeiramente vale lembrar o resultado obtido na pag 77:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle = i \frac{Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

$$\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2} u^s(p)$$

$\hookrightarrow m^2 = m_0^2 + \delta m^2$   
 $\hookrightarrow 1 + \delta Z_2$

Nosso objetivo é agora obter as contribuições perturbativas para  $Z_2$  e  $m$

$$\langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | \Omega \rangle = \underbrace{\text{---} \text{---}}_p + \underbrace{\text{---} \text{---} \text{---} \text{---}}_{k \quad p-k \quad p} + \dots$$

$$\frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left[ -i \Sigma_2(p) \right] \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \dots$$

basicamente é a contribuição de ordem  $e^2$  para um objeto análogo ao que chamamos de  $M^2$  na pág 85

$$-i \Sigma_2(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m_0)}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \gamma_\mu \frac{-i}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

"massa" do fóton no fim faremos:  $\mu^2 \rightarrow 0$

$\hookrightarrow$  ordem perturbativa

Temos, novamente, que usar o maquinário desenvolvido para o cálculo de loops. A parametrização de Feynman fornece (já integrando em  $y$  com o uso da delta):

$$\frac{1}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - 2xkp + x^2p^2 - x\mu^2 - (1-x)m_0^2 + i\epsilon]^2}$$

o termo linear em  $\ell$  no numerador já foi cancelado

$$\ell = k - \kappa p$$

$$-i \Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2\kappa \not{p} + 4m_0}{[\ell^2 - \Delta_\nu + i\epsilon]^2}$$

$$\Delta_\nu = -\kappa(1-\kappa)p^2 + \kappa\nu^2 + (1-\kappa)m_0^2$$

Podemos usar a regularização de Pauli-Villars:

$$\frac{1}{(p-k)^2 - \nu^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{1}{(p-k)^2 - \nu^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(p-k)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}$$

$$-i \Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2\kappa \not{p} + 4m_0}{[\ell^2 - \Delta_\nu + i\epsilon]^2} - e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2\kappa \not{p} + 4m_0}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda + i\epsilon]^2}$$

E fazendo a rotação de Wick:

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{\ell^2 - \Delta_\nu} - \frac{1}{\ell^2 - \Delta_\Lambda} \right] = \frac{i}{(4\pi)^2} \text{Ln} \left( \frac{\Delta_\Lambda}{\Delta_\nu} \right)$$

$$\Delta_\Lambda \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \kappa \Lambda^2$$

$$\Sigma_2(p) = \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^1 dx (2m_0 - \kappa \not{p}) \text{Ln} \left( \frac{\kappa \Lambda^2}{(1-\kappa)m_0^2 + \kappa\nu^2 - \kappa(1-\kappa)p^2} \right)$$

(eq. 117.1)

Podemos entender a estrutura analítica desta correção. A função Ln tem uma ramificação a partir do ponto em que seu argumento fica negativo, como o numerador é positivo a condição é:

$$f(\kappa, p^2) = (1-\kappa)m_0^2 + \kappa\nu^2 - \kappa(1-\kappa)p^2 < 0$$

$$0 < \kappa < 1 \Rightarrow (> 0) \quad (> 0) \quad \hookrightarrow \text{só será possível acima de algum valor mínimo de } p^2 > 0$$

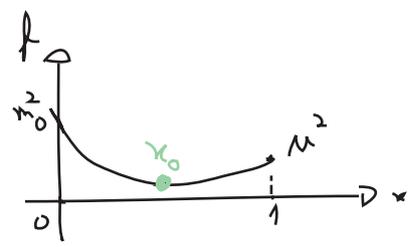
Em termos de  $\kappa$ , a função  $f$  é uma parábola cujo mínimo é determinado por  $p^2$

$$f(\kappa, p^2) = p^2 \kappa^2 + (\nu^2 - p^2 - m_0^2) \kappa + m_0^2$$

$$\frac{d}{dx} f(x, p^2) = 2x p^2 + m_0^2 - p^2 - m_0^2 = 0$$

$$\hookrightarrow x_0 = \frac{m_0^2 + p^2 - \mu^2}{2p^2}$$

$$f(x_0, p^2) = -\frac{(m_0^2 - \mu^2)^2}{4p^2} + \frac{1}{2}(m_0^2 + \mu^2) - \frac{1}{4}p^2$$

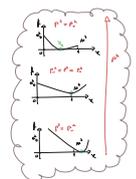


O mínimo passa para baixo de zero em:

$$f(x_0, p^2) = 0 \rightarrow p_{\pm}^2 = (m_0 \pm \mu)^2$$

$$x_0(p_-^2) = \frac{m_0}{m_0 - \mu} \Rightarrow x = \frac{m_0}{m_0 - \mu} > 1$$

$$x_0(p_+^2) = \frac{m_0}{m_0 + \mu} \Rightarrow x = \frac{m_0}{m_0 + \mu} < 1$$



como  $f(1, p^2) = \mu^2 > 0 \forall p^2$  não há como uma região negativa passar de  $x > 1$  para  $x < 1$

Logo, para  $0 < x < 1$  temos uma ramificação que em:  $p^2 \geq (m_0 + \mu)^2$

o que está de acordo com o que vimos na pg 77 - temos uma ramificação a partir da energia em que podemos produzir duas partículas reais (nessa caso um elétron de massa  $m_0$  e um fóton de massa  $\mu$ )

Também é possível encontrar o polo, basta seguir o mesmo procedimento que usamos no caso do campo escalar para somar as contribuições 1PI (pg 85)

$$-i \Sigma(p) = -i \bar{\Sigma}(p) = \text{1PI} = \dots = 0$$

$\text{Oim} \rightarrow \langle \Omega | T \{ \bar{\Psi} \delta_N \Psi \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T \{ j_\mu \} | \Omega \rangle$

$$= \text{---} + \underbrace{\text{---} + \text{---}}_{-i \Sigma_x} + \underbrace{\text{---} + \text{---}}_{-i \Sigma_y} + \dots =$$

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \Psi(x) \bar{\Psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \text{---} \rightarrow \text{---} =$$

$$= \text{---} + \text{---} \text{1PI} \text{---} + \text{---} \text{1PI} \text{1PI} \text{---} + \text{---} \text{1PI} \text{1PI} \text{1PI} \text{---} + \dots =$$

$$= \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(p)} \rightarrow$$

A massa física é dada por:

$$\left[ \not{p} - m_0 - \Sigma(p) \right]_{\not{p} = m} = 0 \quad (\text{eq. 118.1})$$

Bem perto do polo vale:

$$p - m_0 - \Sigma(p) \simeq (p - m) \cdot \left( 1 - \frac{d\Sigma}{dp} \Big|_{p=m} \right) + \mathcal{O}((p-m)^2)$$

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{ipx} = \frac{i \left( 1 - \frac{d\Sigma}{dp} \Big|_{p=m} \right)^{-1}}{p^2 - m^2} = \frac{i (p+m) \left( 1 - \frac{d\Sigma}{dp} \Big|_{p=m} \right)^{-1}}{p^2 - m^2}$$

$$\Delta m = m - m_0 = \Sigma(p=m)$$

Comparando com o resultado obtido para o propagador completo (pg 77):

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{ipx} = \frac{i Z_2 (p+m)}{p^2 - m^2}$$

$$Z_2^{-1} = 1 - \frac{d\Sigma}{dp} \Big|_{p=m} \quad (\text{eq. 119.1})$$

Em ordem  $\alpha$ , as correções são:

$$\Delta m \simeq \Sigma_2(p=m_0) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (2m_0 - x m_0) L_N \left( \frac{x \Lambda^2}{(1-x)m_0^2 + x \mu^2 - x(1-x)m_0^2} \right) =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi} m_0 \int_0^1 dx (2-x) L_N \left( \frac{x \Lambda^2}{(1-x)^2 m_0^2 + x \mu^2} \right)$$

$I_\Lambda$

$$I_\Lambda = \frac{1}{8 m_0^3 \pi \sqrt{4 m_0^2 - \mu^2}}$$

$$\alpha \left( 2 \mu (-8 m_0^4 - 2 m_0^2 \mu^2 + \mu^4) \text{ArcTan} \left[ \frac{\mu}{\sqrt{4 m_0^2 - \mu^2}} \right] - \right.$$

$$\left. 2 \mu (-8 m_0^4 - 2 m_0^2 \mu^2 + \mu^4) \text{ArcTan} \left[ \frac{-2 m_0^2 + \mu^2}{\mu \sqrt{4 m_0^2 - \mu^2}} \right] + \right.$$

$$\left. \sqrt{4 m_0^2 - \mu^2} \left( 3 m_0^4 + 2 m_0^2 \mu^2 - 12 m_0^4 \text{Log} \left[ \frac{m_0}{\Lambda} \right] - 2 \mu^4 \text{Log} \left[ \frac{\mu}{m_0} \right] \right) \right)$$

Primeiramente, notemos que não há divergência quando  $\Lambda \rightarrow 0$

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} \delta m = \frac{3 \alpha m_0}{8 \pi} \left( 1 + 2 \log \left[ \frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right] \right) \quad \text{... } \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\Lambda} \right) = \frac{\pi}{2}$$

E que, de qualquer forma, a divergência ultravioleta está em um termo que independe de  $\mu$

$$\delta m \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{3 \alpha m_0}{4 \pi} \log \left[ \frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right]$$

Temos então a massa do eletron sendo corrigida por uma grandeza divergente. Isto não é novidade, classicamente temos a energia de repouso de uma partícula dada pelo potencial eletrostático da seguinte forma (carga pontual):

$$\int d^3r \frac{1}{2} |\vec{E}|^2 = \int d^3r \frac{1}{2} \left( \frac{e}{4 \pi r^2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{(4 \pi)^2} \int d\Omega \int \frac{1}{r^2} dr$$

$\dim[r] = GeV^{-1}$   
 $\dim \left[ \frac{1}{r^2} \right] = GeV^2$

$$= \frac{\alpha}{2} \int_0^\infty \frac{1}{r^2} dr \sim \alpha \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{r} \right] = \alpha \Lambda$$

Nota-se de fato que a divergência quântica é menos forte que a clássica, quanticamente temos uma divergência logarítmica com a escala de energia, classicamente ela é linear. Dá para entender que não poderia ser diferente por análise dimensional: suponha que  $m_0 = 0$ , pense no termo de massa:

$$\psi = \psi_L + \psi_R \Rightarrow m_0 \bar{\psi} \psi = m_0 (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L)$$

$$\bar{\psi} \psi = \bar{\psi}_R \psi_R + \bar{\psi}_L \psi_L$$

se este termo é zero, não temos mais nada na Lagrangeana que "acople"  $\psi_L$  e  $\psi_R$ . Com isso obtemos duas teorias separadas, uma para cada quiralidade, e não há correção radiativa que vá produzir um termo de massa.

$\delta m \sim m_0$  (note que isso quer dizer que um eletron de massa zero nunca ganharia massa)

Portanto a única dependência possível com a energia é logarítmica. Essa "pequena correção infinita" parece invalidar todo o procedimento perturbativo, mas logo veremos que podemos reescrever nossa lagrangeana em termos de parâmetros físicos finitos desde o começo, evitando assim o problema. Por enquanto assumiremos que já fizemos isso e trocar  $m_0$  por  $m$  nas contas que seguem

No caso de  $Z_2$  temos:

$$Z_2 = 1 + \delta Z_2$$

$$\delta Z_2 = Z_2 - 1 = \left( 1 - \frac{d\Sigma}{d\phi} \Big|_{\phi=m} \right)^{-1} - 1 \stackrel{\text{Lim } \epsilon \rightarrow 0}{\approx} \frac{d\Sigma_a}{d\phi} \Big|_{\phi=m}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\phi} \left[ \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^1 dx (2m - x\phi) L_v \left( \frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi} \right) \right] = \\ &= \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^1 dx (-x) L_v \left( \frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi} \right) + \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^1 dx (2m - x\phi) \frac{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi}{x\Lambda^2} \cdot \frac{-x\Lambda^2}{[(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi]^2} \cdot (-2x(1-x)\phi) = \\ &= \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^1 dx \left[ -x L_v \left( \frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi} \right) + (2m - x\phi) \frac{2x(1-x)\phi}{[(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi]} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d\Sigma_2}{d\phi} \Big|_{\phi=m} = \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^1 dx \left[ -x L_v \left( \frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2} \right) + (2-x) \frac{2x(1-x)m^2}{[(1-x)m^2 + x\nu^2]} \right]$$

O que nos dá a primeira contribuição perturbativa à "field strength renormalization"  $Z_2$ , do elétron. Com isso podemos, finalmente, voltar a questão da divergência ultravioleta do vértice da QED (se você já não lembra o que estamos fazendo, volte na página 116 e leia a introdução desta seção). Na pg 110 eliminamos a divergência ultravioleta do vértice fazendo uma subtração "força bruta", o que subtraímos foi:

$$\delta \bar{F}_1(0) = \left( \frac{\kappa}{2\pi} \right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right] + \frac{(1-4y+z^2)m^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right\} =$$

na pg 110 fizemos a subtração antes de introduzir  $\mu$ , mas é mais geral pensar na introdução de  $\mu$  antes

$$= \left( \frac{\kappa}{2\pi} \right) \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left\{ \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right] + \frac{(1-4y+z^2)m^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right\} = \left( \frac{\kappa}{2\pi} \right) \int_0^1 dz (1-z) \left\{ \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\nu^2} \right] + \frac{(1-4z+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 + z\nu^2} \right\} =$$

Calculamos a soma destas duas expressões ( $x \rightarrow z$  em  $\delta Z_2$ ):

$$\delta \bar{F}_1(0) + \delta Z_2 = \left( \frac{\kappa}{2\pi} \right) \int_0^1 dz \left\{ (1-2z) \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\nu^2} \right] + \frac{P(z)}{(1-z)^2 m^2 + z\nu^2} \right\}$$

$$\begin{aligned} P(z) &= (2-z) 2z(1-z)m^2 + (1-z)(1-4z+z^2)m^2 = \\ &= m^2(1-z)^2(z+1) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 dz (1-2z) \ln \left[ \frac{z \Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z \nu^2} \right] = \int_0^1 \underbrace{dz (1-2z)}_{d\mu} \underbrace{\ln[z]}_{\mu'} +$$

$$\nu = z(1-z)$$

$$d\mu' = \frac{1}{z}$$

$$d\mu = \frac{2m^2(1-z) - \nu^2}{m^2(z-1)^2 + z\nu^2}$$

$$+ \int_0^1 \underbrace{dz (1-2z)}_{d\mu} \underbrace{\ln \left[ \frac{\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z \nu^2} \right]}_{\mu}$$

$$= \underbrace{(z - z^2) \ln z} \Big|_0^1 + \underbrace{(z - z^2) \ln \left[ \frac{\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z \nu^2} \right]} \Big|_0^1 - \int_0^1 dz (1-z) +$$

$$- \int_0^1 dz z(1-z) \frac{2m^2(1-z) - \nu^2}{m^2(z-1)^2 + z\nu^2} =$$

$$= - \int_0^1 dz (1-z) - \int_0^1 dz \frac{(1-z) [2m^2(1-z)z - z\nu^2] + (1-z)(1-z^2)m^2 - (1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\nu^2} =$$

$$= - \int_0^1 dz (1-z) - \int_0^1 dz \frac{(1-z) [2m^2(1-z)z - \underbrace{(1-z^2)m^2}_{\text{green}}] + (1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\nu^2} =$$

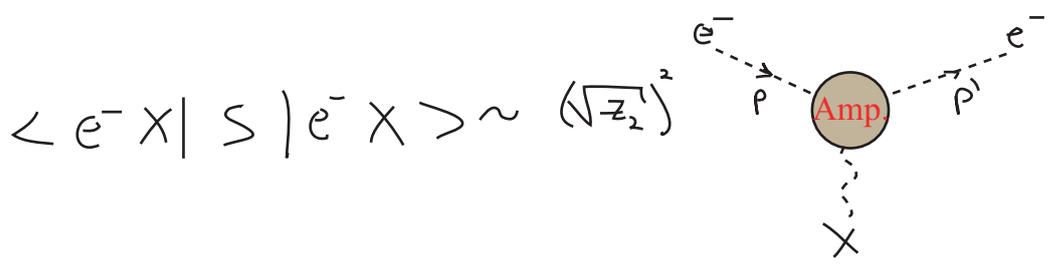
$$= - \int_0^1 dz (1-z) - \int_0^1 dz \left[ (1-z)(-1) + \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\nu^2} \right] = - \int_0^1 dz \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\nu^2}$$

$$\delta F_1(0) + \delta Z_2 = \left( \frac{\mu}{2\pi} \right) \int_0^1 dz \left\{ - \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\nu^2} + \overbrace{\frac{m^2(1-z)^2(z+1)}{(1-z)^2 m^2 + z\nu^2}}^{P(z)} \right\} = 0$$

$$(1-z)^2(z+1) - (1-z)(1-z^2) = 0$$

$$\delta \bar{F}_1(0) + \delta Z_2 = 0$$

Agora, considerando a fórmula de LSZ (eq. 83.1), sabemos que:



Por isso, em qualquer espalhamento que envolva este vértice, teremos não apenas  $-i e \Gamma^\mu$  mas sim:

$$-i e \Gamma^\mu \rightarrow -i e \Gamma^\mu Z_2$$

Considerando isso na definição dos fatores de forma obtemos:

$$Z_2 \Gamma^\mu = \gamma^\mu \bar{F}_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \bar{F}_2(q^2)$$

a "linha" é para indicar a nova correção, agora que consideramos  $Z_2$   
 todos os  $\delta$  são em ordem  $\alpha$

$$1 + \gamma^\mu \delta Z_2 + \delta \Gamma^\mu + \mathcal{O}(\alpha^2) = \gamma^\mu + \gamma^\mu \delta \bar{F}_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta \bar{F}_2(q^2)$$

$$\gamma^\mu \delta \bar{F}_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta \bar{F}_2(q^2)$$

$$\sigma^{\mu\nu} q_\nu \Rightarrow \delta \bar{F}_2(q^2) = \delta \bar{F}_2(0) \quad (\text{nada muda para esta estrutura})$$

$$\gamma^\mu \Rightarrow \delta \bar{F}_1(q^2) = \delta \bar{F}_1(q^2) + \delta Z_2 = \delta \bar{F}_1(q^2) - \delta \bar{F}_1(0)$$

que é exatamente a subtração que fizemos na pg 110

Isto nos mostra que, apesar de termos estas divergências circulando pela teoria, pelo menos nessa grandeza observável (o fator de forma elétrico) as divergências se cancelam. É claro que, feito desta forma, parece apenas um milagre numérico com pouca chance de se sustentar em ordens superiores de  $\alpha$ .

De uma forma mais geral, para que o fator de forma satisfaça as condições que desejamos:

$$\bar{F}_1(0) = 1$$

representa o que tínhamos antes da subtração na pg 110

podemos introduzir um novo fator Z no vértice, definido por:  $\Gamma^\mu(q^2=0) \equiv Z_1^{-1} \gamma^\mu$  (eq. 123.1)

e a condição em F1 para qualquer ordem de perturbação se torna:

$$Z_1 = Z_2$$

$$Z_2 \Gamma^N = \gamma^N F_1(q^2) + \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2) \xrightarrow{q^2=0} Z_2 Z_1^{-1} \gamma^N = \gamma^N F_1(0) + \dots$$

$F_1(0) = Z_2 Z_1^{-1}$

Felizmente, podemos provar que isto é verdade usando as relações de Ward-Takahashi:

(eq 99.1)  $\Rightarrow -i q^\mu \Gamma_{\psi\psi}^{QED(3)}(p_1, p_2; q) = [S_F^c(p_1+q)]^{-1} - [S_F^c(q)]^{-1}$

$\Gamma_{\psi\psi}^{QED(3)}(p_1, p_2; q) \xrightarrow{q \rightarrow 0} Z_1^{-1} \gamma^\mu$        $S_F(p) = \frac{i Z_2}{\not{p} - m} + \dots$

$p_1, p_2 \rightarrow m$   
 $q_\mu \rightarrow 0$   $\Rightarrow -i q^\mu \Gamma^\mu \simeq 0 - i \underbrace{\Gamma^\mu(q=0)}_{Z_1^{-1} \gamma^\mu} q_\mu + \mathcal{O}(q^2) \simeq -i Z_1^{-1} \not{q}$

$\Rightarrow [S_F^c(p_1+q)]^{-1} \simeq -i Z_2^{-1} [(p_1+q) - m] \simeq -i Z_2^{-1} \not{q}$

$Z_1 = Z_2$

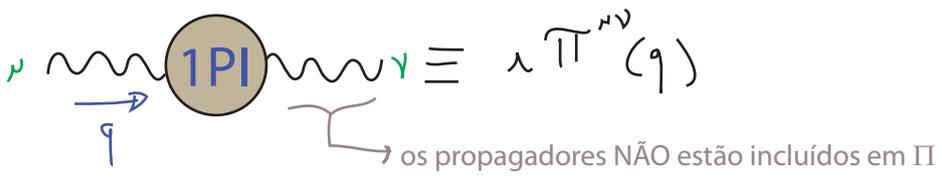
Em qualquer ordem de perturbação

Como uma nota final, note que as identidades de WT são consequência direta da simetria de gauge da teoria e garantiram o cancelamento de divergências em todas as ordens. Este é um resultado importante e bastante geral. No caso de simetrias não Abelianas trocamos as identidades de WT pelas **identidades de Slavnov-Taylor** que têm um papel central nos cancelamentos que precisam ocorrer nestas teorias. Este é mais um motivo para usarmos teorias de gauge.

### Auto-energia do fóton

(Peskin 7.5)

Vamos ver agora o que ocorre com o propagador do fóton quando consideramos as correções radiativas. Começemos definindo:



A primeira correção obtida perturbativamente é:

$$= (-ie)^2 (-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m} \right] \equiv i\Pi^{\mu\nu}(q)$$

Dada sua estrutura de Lorentz:  $\Pi^{\mu\nu}(q) = \Pi_A(q^2) g^{\mu\nu} + \Pi_B(q^2) q^\mu q^\nu$

mas também sabemos que (identidade de Ward):  $q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0$

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = \Pi_A(q^2) q^\nu + \Pi_B(q^2) q^2 q^\nu = 0$$

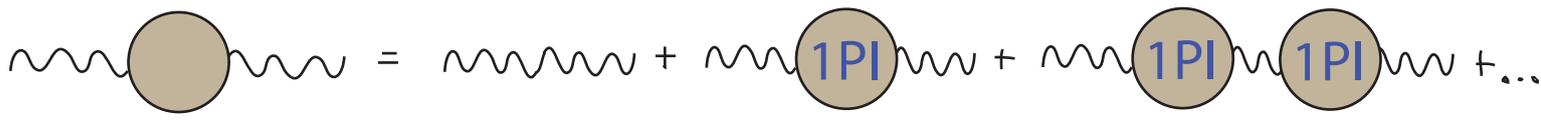
$$\Pi_A(q^2) = -\Pi_B(q^2) q^2 \equiv \Pi(q^2) q^2$$

$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2)$

 (eq. 125.1)

Não esperamos que haja um polo em  $q^2 = 0$ , já que a QED não tem nenhum estado de uma partícula que contribua para este diagrama, então assumiremos que  $\Pi(q^2)$  é regular em  $q^2 = 0$ .

Podemos somar todas as contribuições 1PI para obter:



gauge de Feynman

$$= -\frac{i g^{\mu\nu}}{q^2} + -\frac{i g^{\mu\rho}}{q^2} \left[ i(q^2 g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma) \Pi(q^2) \right] \frac{-i g^{\sigma\nu}}{q^2} + \dots =$$

$$\left( \cancel{q^2} g^{\mu\rho} \frac{g_{\rho\nu}}{\cancel{q^2}} - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} \right) \Pi(q^2) = \delta_\nu^\mu - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} \Pi(q^2) \equiv \Delta_\nu^\mu \Pi(q^2)$$

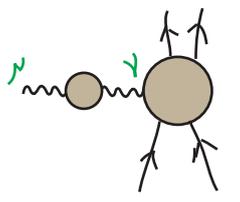
$$\Delta_\nu^\mu \Delta_\beta^\nu = \left( \delta_\nu^\mu - \frac{q^\nu q_\nu}{q^2} \right) \left( \delta_\beta^\nu - \frac{q^\nu q_\beta}{q^2} \right) = \delta_\beta^\mu - \frac{q^\mu q_\beta}{q^2} - \frac{q^\nu q_\beta}{q^2} + \frac{q^\nu q_\nu q_\beta}{q^4} = \Delta_\beta^\mu$$

$$= -\frac{i g^{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g^{\mu\rho}}{q^2} \Delta_\nu^\rho \Pi(q^2) - \frac{i g^{\mu\rho}}{q^2} \underbrace{\Delta_\sigma^\rho \Delta_\nu^\sigma}_{\Delta_\nu^\rho} \Pi(q^2) \Pi(q^2) + \dots =$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \Delta^{\rho\nu} \left[ \Pi^1(q^2) + \Pi^2(q^2) + \Pi^3(q^2) + \dots \right] =$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \left( \delta^{\rho\nu} - \frac{q^\rho q^\nu}{q^2} \right) \left( \frac{1}{1 - \Pi(q^2)} - 1 \right) = \frac{-i}{q^2(1 - \Pi(q^2))} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) - \frac{i}{q^2} \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right)$$

Na prática, para o cálculo de elementos da matriz S, este propagador deverá estar conectado a uma linha fermiônica de um diagrama mais complicado:



$$= \frac{-i}{q^2(1 - \Pi(q^2))} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) - \frac{i}{q^2} \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \cdot \mathcal{M}^\nu(q)$$

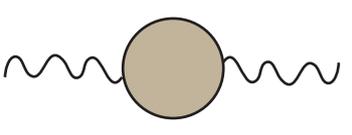
em algum lugar neste elemento de matriz temos:

$$\dots \frac{i}{\not{p}_1 + \not{q} - m} (-i e \not{\gamma}^\mu) \frac{i}{\not{p}_2 - m} \dots$$

E neste caso as identidades de WT nos garantem que:  $q_\nu \mathcal{M}^\nu(q) = 0$

É fácil obter isso a partir da eq. 99.1, basta notar o que ocorre se usarmos LSZ do dois lados da equação, buscando um elemento de matriz com dois elétrons reais. Do lado esquerdo temos dois polos, mas cada termo do lado direito tem apenas um, de forma que este não contribui para o elemento de matriz. Para mais detalhes veja a seção 7.4 do Peskin.

Portanto, para fim de cálculo de elementos de matriz S:

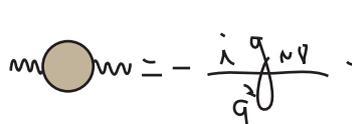


$$= \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 \left( 1 - \frac{\Pi(q^2)}{1} \right)}$$

REGULAR EM  $q^2 = 0$

Continuamos tendo um polo  $q^2 = 0$ , portanto a massa do fóton não muda. Note que as identidades de Ward-Takahashi (e portanto a simetria de gauge) estão por trás disso. Suponha que fosse possível ter uma correção com a forma proibida por WT, por exemplo:

$$i \Pi^{\mu\nu}(q) = i M^2 g^{\mu\nu} \left( \text{onde falta um termo } -\frac{M^2}{q^2} q^\mu q^\nu \text{ que garantiria WT} \right)$$



$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} + -\frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \left[ i M^2 g^{\rho\sigma} \right] \frac{-i g_{\sigma\nu}}{q^2} + \dots =$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} - i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left( \frac{M^2}{q^2} \right) - i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left( \frac{M^2}{q^2} \right)^2 =$$

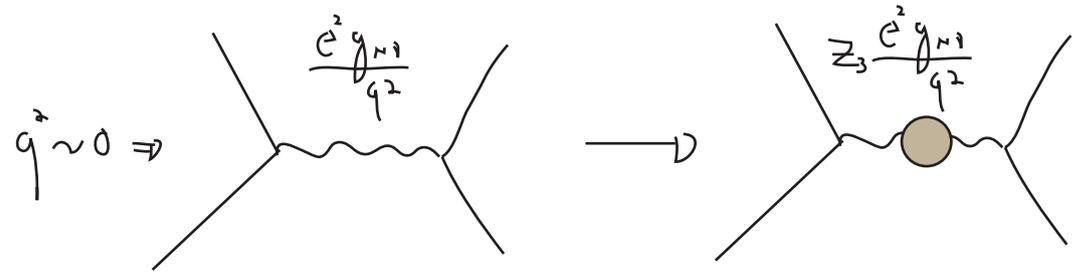
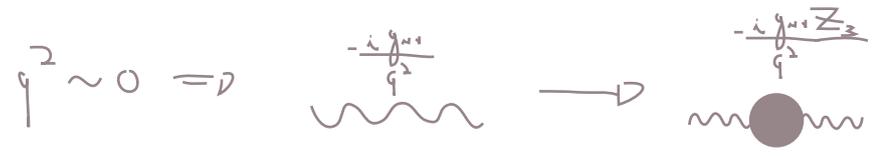
$$= -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left( 1 + \left( \frac{M^2}{q^2} \right) + \left( \frac{M^2}{q^2} \right)^2 + \dots \right) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{1}{1 - \frac{M^2}{q^2}} = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2 - M^2}$$

polo em M (desastre!)  
↓

O resíduo do polo em  $q^2 = 0$  é basicamente dado por:

$$Z_3 = \frac{1}{1 - \Pi(0)}$$

Qualquer espalhamento "soft" (com baixa troca de energia e momento) entre dois elétrons será modificado justamente por este fator:



Como temos um  $e^2$  acompanhando este fator  $Z_3$  podemos vê-lo como uma redefinição da carga:

$$e_r = \sqrt{Z_3} e$$

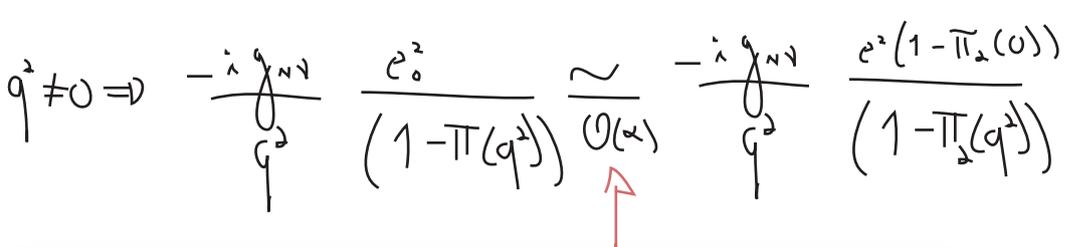
$\Downarrow$  mudamos a notação (assim como fizemos com a massa)

$$e = \sqrt{Z_3} e_0$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{carga vestida ou física (o que medimos)} \\ \text{carga que aparece na lagrangeana (carga "nua")} \end{array} \right.$

Mais uma vez temos a condição advinda da série perturbativa: 
$$\begin{cases} e = e_0 + \mathcal{O}(\alpha) \\ Z_3 = 1 + \mathcal{O}(\alpha) \end{cases}$$

$\Pi(q^2)$  tem outro efeito:

$q^2 \neq 0 \Rightarrow$  

$$e_0^2 = \frac{e^2}{Z_3} = e^2 (1 - \Pi(0)) \approx e^2 (1 - \Pi_2(0))$$

$\frac{1}{1+\alpha} \approx 1 - \alpha + \alpha^2 - \dots$   
 $\frac{1}{1-\alpha} \approx 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots$

$$\approx -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{[1 - (\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))]}$$

esta grandeza funciona como uma carga elétrica dependente do momento

Em suma, o efeito das correções ao propagador do fóton é o de mudar o acomplamento da teoria e torná-lo dependente de energia (passa a ser um running coupling):

$$\alpha_0 \rightarrow \alpha_{\text{EFF}}(q^2) = \frac{e_0^2/4\pi}{1 - \Pi(q^2)} \stackrel{\mathcal{O}(\alpha)}{\approx} \frac{\alpha}{[1 - (\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))]}$$

(eq. 128.1)

$$\alpha_{\text{EFF}}(0) \equiv \alpha$$

Calculemos rapidamente  $\Pi(q^2)$ :

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -(-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m} \right]$$

rigorosamente teríamos que usar  $e_0$  e  $m_0$ , mas trocar por  $e$  e  $m$  só introduz um erro de ordem  $\alpha^2$

$$e = e_0(1 + \mathcal{O}(\alpha)) \Rightarrow (e - e_0)^2 = \mathcal{O}(\alpha^2)$$

Seguindo o procedimento usual (parametriz. de Feynman, rotação de Wick), chegamos a:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l_E}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}l_E^2 + g^{\mu\nu}l_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2)}{(l_E^2 + \Delta)^2}$$

(eq. 128.2)

$$\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$$

Que obviamente diverge (temos  $l^5$  no numerador). Temos que escolher algum método de regularização. Neste caso a escolha apresenta sutilezas devidas ao fato de estarmos lidando com uma função cuja forma está restrita pela identidade de WT. Se fizéssemos por exemplo a regularização por cut-off (que consiste simplesmente em não integrar no módulo do momento euclideo até infinito, mas sim até uma escala máxima  $\Lambda$ ):

$$\int_0^\infty dl_E \rightarrow \int_0^\Lambda dl_E \Rightarrow i\Pi_2^{\mu\nu}(q) \propto e^2 \Lambda^2 g^{\mu\nu}$$

falta um termo  $-\frac{e^2 \Lambda^2}{q^2} q^\mu q^\nu$  para satisfazer WT

$$\hookrightarrow q_\mu \Pi_2^{\mu\nu} \sim e^2 \Lambda^2 q^\nu \neq 0$$

Este resultado viola a identidade de Ward e daria uma massa para o fóton

De fato não é a divergência em si que está violando a invariância de gauge (as id. WT.) mas sim a forma como escolhemos regularizá-la, a prova disso é que podemos encontrar outras regularizações que preservam as identidades de WT. De uma forma geral, o resultado deve independer da regularização escolhida e quando duas regularizações dão resultados diferentes é porque uma delas (ou as duas) está violando alguma(s) das simetrias da teoria. Se elevarmos as simetrias a categoria de axiomas da teoria, então temos um critério para escolher a regularização correta.

Dentro desta lógica concluímos que a regularização por cut-off feita acima não é boa. Uma outra opção é usar Pauli-Villars, como fizemos nas pgs 106-107, o que preservaria WT mas é um tanto complicado. Felizmente temos uma outra opção, a **regularização dimensional**.

A idéia da **regularização dimensional** é calcular os diagramas como função do número  $d$  de dimensões do espaço tempo. Para  $d$  suficientemente pequeno as integrais são finitas, e então voltamos para o mundo real fazendo  $d \rightarrow 4$

Um exemplo:

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \int \frac{d\mathcal{L}_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi})^d &= \left( \int dx e^{-x^2} \right)^d = \int d^d x e^{-\sum_{i=1}^d x_i^2} = \int d\mathcal{L}_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} \\ &= \left( \int d\mathcal{L}_d \right) \frac{1}{2} \int_0^\infty d(x^2) (x^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-x^2} = \left( \int d\mathcal{L}_d \right) \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \end{aligned}$$

$x^{d-2} = (x^2)^{\frac{d}{2}-1}$

$\int d\mathcal{L}_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$

(eq. 129.1)

$$\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d(l_E^2) \frac{(l_E^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} = -\frac{1}{2} \int_1^\infty dx \frac{x^{1-\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}$$

$x = \frac{\Delta}{(l_E^2 + \Delta)} \quad dx = -\frac{\Delta}{(l_E^2 + \Delta)^2} dl_E^2$

$(l_E^2)^{\frac{d}{2}-1} = \left( \frac{\Delta - \Delta x}{x} \right)^{\frac{d}{2}-1} = x^{1-\frac{d}{2}} \Delta^{\frac{d}{2}-1} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}$

Usando então a definição da função beta:

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \frac{\Gamma(2-d/2)\Gamma(d/2)}{\Gamma(2)} \underset{1!}{}$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \Gamma(2-d/2)\Gamma(d/2)$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \Gamma(2-d/2)$$

(eq. 130.1)

$\Gamma(z)$  tem polos em todos os números inteiros negativos e em zero, logo teremos polos em

$$d = 4, 6, 8, \dots$$

Como estamos interessados no comportamento perto de  $d = 4$ , podemos definir:  $\epsilon = 4 - d$

$$\Gamma(2-d/2) = \Gamma(\epsilon/2) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)$$

const. de Euler

$$-\frac{d}{2} = \frac{\epsilon}{2} - 2$$

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} = \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\epsilon/2} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon \ln\left(\frac{1}{\Delta}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$(4\pi)^{-d/2} = (4\pi)^{\frac{\epsilon-4}{2}} = (4\pi)^{-2} (4\pi)^{\frac{\epsilon}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ 1 + \frac{1}{2}\epsilon \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right]$$

O produto das três expansões acima nos dá:

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \underset{\substack{d \rightarrow 4 \\ \epsilon \rightarrow 0}}{\sim} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) + \ln(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

Comparemos com o que teríamos obtido via regularização de Pauli-Villars

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ L_N\left(\frac{\Lambda^2}{\Delta}\right) + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}) \right]$$

Reg. Dimensional      Pauli-Villars

De onde vemos que:  $\frac{2}{\epsilon} \longleftrightarrow L_N(\Lambda^2)$

Isso também explica porque temos um logaritmo de algo com dimensão (Ln[Δ]), a escala deste logaritmo está escondida no 2/ε

Podemos também provar algumas fórmulas mais gerais:

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2} \frac{\Gamma(n-d/2)}{\Gamma(n)} \quad (\text{eq. 131.1})$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2-1} \frac{\Gamma(n-d/2-1)}{\Gamma(n)} \quad (\text{eq. 131.2})$$

Além disso é importante lembrar que:  $\begin{cases} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = d \\ \text{portanto a substituição nas integrais (pg 104) fica: } l^\mu l^\nu \rightarrow \frac{1}{d} l^2 g^{\mu\nu} \\ g^\mu g^\nu g_\mu = -(2-\epsilon) g^\nu \\ g^\mu g^\nu g^\rho g_\mu = 4 g^{\nu\rho} - \epsilon g^{\nu\rho} \\ g^\mu g^\nu g^\rho g^\sigma g_\mu = -2 g^\sigma g^\rho g^\nu + \epsilon g^\nu g^\rho g^\sigma \end{cases}$

Voltando ao cálculo de  $\Pi_2^{\mu\nu}(q)$  (eq. 128.2 - com pequenas mudanças para dar conta da mudança de dimensão), os termos com  $l^2$  no numerador nos dão:

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{(1 - \frac{2}{d}) g^{\mu\nu} l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^2} = (1 - \frac{2}{d}) g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-d/2} \Gamma(1-d/2) =$$

$$= - \left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma(2-d/2) g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \Delta = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2-d/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} (-\Delta g^{\mu\nu})$$

Calculando o termos restantes de 128.2 temos (fica como exercício):

$$i\tilde{\Pi}_2(q^2) = (q^2 g^{NV} - q^N q^V) i \Pi_2(q^2) \quad (\text{eq. 132.1})$$

Onde:

$$\Pi_2(q^2) = -\frac{8e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \, x(1-x) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \quad (\text{eq. 132.2})$$

De forma que, fazendo a regularização dimensional, obtemos exatamente a forma exigida pelas identidades de WT.

Fazendo o limite  $d \rightarrow 4$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ ):

$$\Pi_2(q^2) \rightarrow -\frac{8e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) + \ln(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

$-\frac{2\alpha}{\pi}$

a integral da parte divergente nos dá:  $-\frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{3\epsilon}$

Podemos obter a correção na carga:

$$\frac{e^2 - e_0^2}{e_0^2} = \frac{Z_3 e_0^2 - e_0^2}{e_0^2} = Z_3 - 1 = \frac{1}{1 - \Pi(0)} - 1 = \Pi_2(0) \approx -\frac{2\alpha}{3\pi\epsilon}$$

$\uparrow$   
 $\mathcal{O}(\epsilon)$

Temos mais uma vez uma diferença infinita entre o que observamos ( $e^2$ ) e o que aparece na lagrangeana ( $e_0^2$ ), mas essa diferença não é observável. O que é **realmente observável** é a dependência com  $q^2$  desta carga. É fácil ver que esta está livre de divergências:

(eq 128.1)  $\Rightarrow \mathcal{L}_{\text{FFF}}(q^2) = \frac{\alpha}{[1 - \underbrace{(\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))}_{\tilde{\Pi}_2(q^2)}]}$

$\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$

$$\tilde{\Pi}_2(q^2) = -\frac{8e^2}{2\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) + \ln(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) + \right. \\ \left. -\frac{2}{\epsilon} + \ln(m^2) - \ln(4\pi) + \gamma - \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

$$\tilde{\Pi}_2(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln\left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2}\right) \quad (\text{eq. 132.3})$$

Primeiro consideremos o caso em que  $q^2 < 0$



neste caso o argumento do logaritmo é positivo e  $\hat{\Pi}_2(q^2)$  é real e analítica em  $q^2$  o que está de acordo com o que assumimos na pg 125.

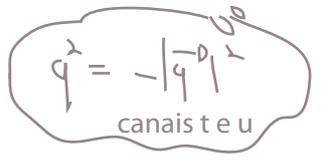


No caso em que  $q^2 > 0$  (canais s) a função é analítica até  $q^2 = 4m^2$ , e depois disso desenvolve um corte de ramificação (a partir deste ponto é possível produzir um par elétron-pósitron)

Vejamos como isto afeta o potencial elétrico entre cargas opostas (no limite não relativístico):

$$V(\vec{x}) = -\frac{e_0^2}{4\pi|\vec{x}|} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{-e_0^2}{|\vec{q}|^2} \rightarrow \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{-e^2}{|\vec{q}|^2 [1 - \hat{\Pi}_2(-|\vec{q}|^2)]}$$

$|\vec{q}|^2 \ll m^2$



$$\hat{\Pi}_2(-|\vec{q}|^2) \approx -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[ -\frac{x(1-x)|\vec{q}|^2}{m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{q}|^2}{m^2}\right) \right] = -\frac{2\alpha}{\pi} \left( -\frac{|\vec{q}|^2}{30m^2} \right)$$

$$V(\vec{x}) = -e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{q}|^2 \left[ 1 - \frac{\alpha|\vec{q}|^2}{15\pi m^2} \right]} \approx -e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{q}|^2} \left[ 1 + \frac{\alpha|\vec{q}|^2}{15\pi m^2} \right]$$

$$= -e^2 \left[ \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} + \frac{\alpha}{15\pi m^2} \int d^3(\vec{x}^0) \right] = -\frac{\alpha}{|\vec{x}|} - \frac{\gamma\alpha^2}{15m^2} \int d^3(\vec{x}^0)$$

O potencial muda para pequenas distâncias 4

Isto muda os níveis de energia do átomo de hidrogênio:

$$\Delta E = \int d^3x |\psi(\vec{x})|^2 \left( -\frac{\gamma \alpha^2}{15 m^2} \delta^3(\vec{x}) \right) = -\frac{\gamma \alpha^2}{15 m^2} |\psi(0)|^2$$

só estados de onda s tem  $\psi(0) \neq 0$

$$\Delta E_{2s} = -1,123 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$$

A função delta no potencial é fruto de uma aproximação um pouco grosseira, podemos fazer melhor escrevendo:

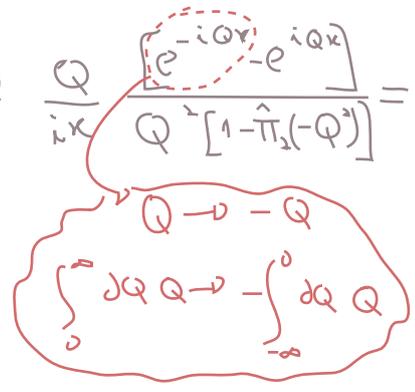
$$|\vec{q}| \equiv Q$$

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-e^2 e^{iQx \cos \theta}}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} = \frac{-e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dQ \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) Q^2 \frac{e^{iQx \cos \theta}}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} =$$

$$= \frac{+e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dQ \int_1^{-1} d(\cos(\theta)) Q^2 \frac{e^{iQx \cos \theta}}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} = \frac{+e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dQ \frac{Q}{ix} \frac{[e^{-iQx} - e^{iQx}]}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} =$$

$$= \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \int_0^\infty dQ \frac{Q e^{iQx}}{Q^2 + \mu^2}$$

inserido para regularizar o polo em  $Q^2=0$



$$\oint = \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \oint = \frac{i\alpha}{\pi\kappa} 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \left[ e^{-\frac{N}{2}} \right]_0^\infty [1 + \hat{\pi}_2(-iN)] = -\frac{\alpha}{\kappa}$$

contribui para a integral dando o potencial  $-\frac{\alpha}{\kappa}$

$$\oint = \int_{C_1} + \int_{C_2+C_3} + \int_{C_4+C_1}$$

As integrais perto do corte (curvas  $C_3$  e  $C_4$ ) tem partes reais iguais, que se cancelam, então só nos interessa a parte imaginária dessa contribuição.

$$\int_{C_3+C_4} = \int_{i\infty+\epsilon}^{i2m+\epsilon} dQ F(Q) + \int_{i2m-\epsilon}^{i\infty-\epsilon} dQ F(Q) = 2 \text{Im} \left[ \int_{i2m}^{i\infty} dQ [F(Q-\epsilon)] \right]$$

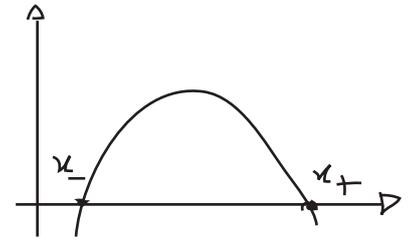
$$SV(x) = \frac{-2\alpha}{\pi x} \int_m^\infty dq \frac{e^{-qx}}{q} \operatorname{Im}[\hat{\Pi}_2(q^2 - i\epsilon)] \quad \leftarrow \quad \boxed{q \equiv -iQ}$$

Vamos obter a parte imaginária desta função para  $q^2 > 4m^2$  partindo de 132.3:

$$\int_0^1 dx \underbrace{x(1-x) \ln\left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2}\right)}_{\rho(x, q^2)}$$

$$m^2 - x(1-x)q^2 > 0$$

$$x - x^2 - \frac{m^2}{q^2} < 0$$



$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{m^2}{q^2}} \quad \beta$$

$$\forall q^2 > 4m^2 \Rightarrow \begin{cases} x > x^+ \\ x < x^- \end{cases} \Rightarrow f(x, q^2) \in \mathbb{R}$$

$$x^- < x < x^+ \Rightarrow \operatorname{Im}[\rho(x, q^2)] \neq 0$$

$$y \equiv x - \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Im}[\hat{\Pi}_2(q^2 \pm i\epsilon)] = -\frac{2\alpha}{\pi} (\pm\pi) \int_{x^-}^{x^+} dx (1-x)x =$$

$$= \mp 2\alpha \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dy \left(\frac{1}{4} - y^2\right) = \mp \frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - 4 \frac{m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right)$$

$$SV(x) = \frac{-2\alpha}{\pi x} \int_m^\infty dq \frac{e^{-qx}}{q} \frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - 4 \frac{m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right)$$

Estudemos isto em duas regiões:

(I)  $x \gg \frac{1}{m} \Rightarrow$  Neste caso a exponencial  $e^{-qx}$  suprime fortemente o integrando e a principal contribuição vem do limite inferior. Neste caso:

$$\delta V(x) = \frac{-2\alpha}{\pi x} \int_0^\infty dt \frac{e^{-(t+2m)x}}{(t+2m)} \approx \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t}{t+4m}} \frac{(t+2m)^2 + 2m^2}{(t+2m)^2}$$

$$t = q - 2m \approx \frac{-2\alpha}{\pi x} \int_0^\infty dt \frac{e^{-(t+2m)x}}{2m} \approx \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t}{4m}} \frac{3}{2} + \mathcal{O}(t)$$

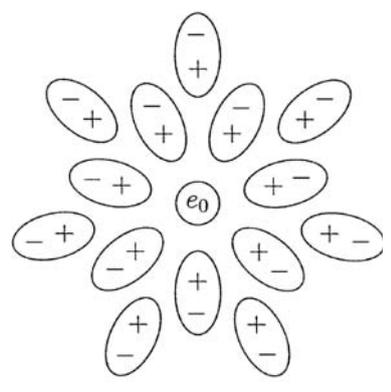
$$x \gg \frac{1}{m} \rightarrow \delta V(x) \approx -\frac{\alpha}{x} \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mx}}{(mx)^{3/2}} \quad (\text{eq. 136.1})$$

$$V(x) = -\frac{\alpha}{x} \left( 1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mx}}{(mx)^{3/2}} + \dots \right)$$

Potencial de Uehling

O importante é notar que a correção é suprimida exponencialmente para grandes distâncias e a escala é dada pelo comprimento de onda Compton do elétron (de fato  $1/2m$ ). A interpretação é de que a distâncias menores que  $1/2m$  temos uma densidade considerável de pares virtuais elétron-pósitron, isto funciona como um dielétrico que esconde parte da carga.

Polarização do Vácuo:



Vejamos o que acontece quando vamos para o limite oposto:

$$\textcircled{\text{II}} -q^2 \gg m^2 \Rightarrow \frac{1}{\Pi_2(q^2)} \approx -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \left( \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right)$$

(eq. 132.3)

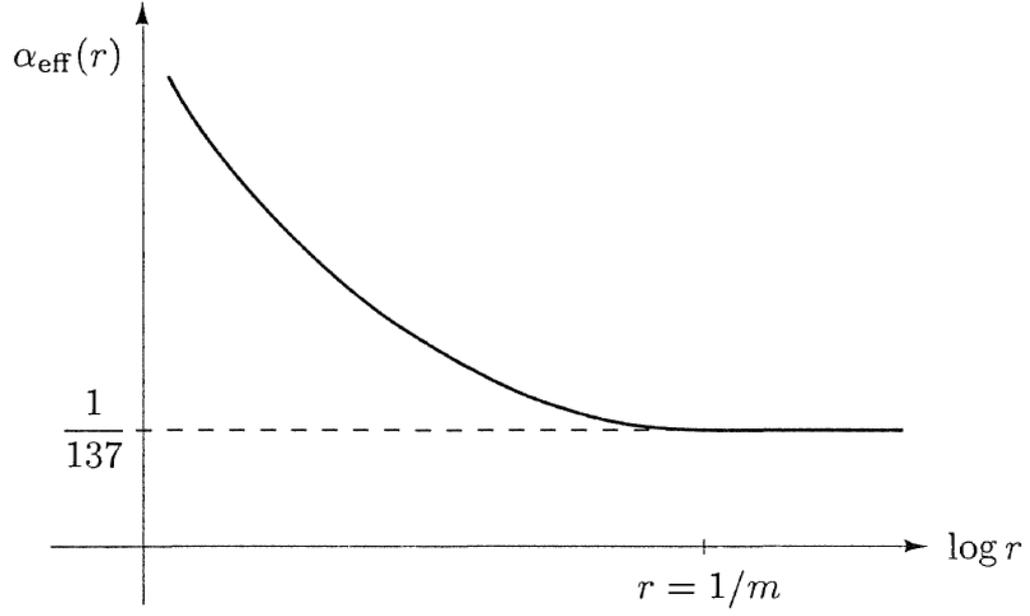
$+ \ln(m^2) - \ln(x(1-x)) - \ln(-q^2)$

$$\approx \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left\{ \ln \left[ \frac{-q^2}{m^2} \right] + \ln(x(1-x)) \right\} = \frac{\alpha}{3\pi} \left[ \ln \left[ \frac{-q^2}{m^2} \right] - \frac{5}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{q^2}\right) \right]$$

O que na constante de acoplamento nos dá (eq. 128.1):

$$\alpha_{\text{EFF}}^2(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left[ -\frac{q^2}{m^2} e^{5/3} \right]}$$

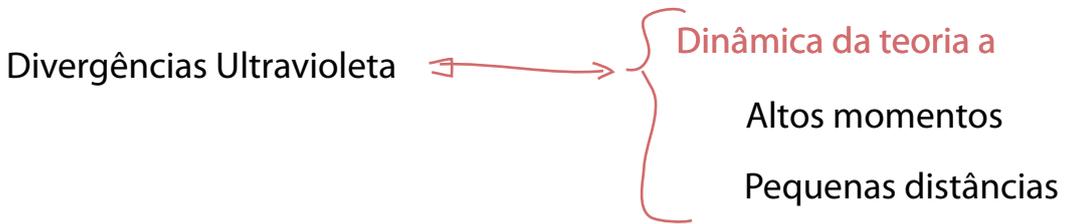
Para espalhamentos muito duros (ou seja, distância de interação pequenas),  $-q^2$  fica grande e o acoplamento efetivo aumenta. Podemos fazer uma imagem qualitativa disto fazendo  $q = 1/r$  e obtendo o gráfico abaixo:



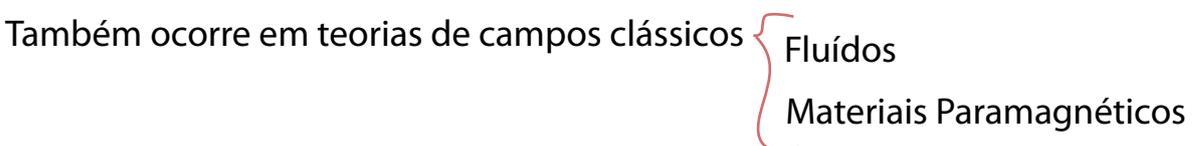
## Renormalização

(Peskin 10.1)

Vimos alguns cancelamentos de divergências no caso da QED, mas por enquanto pode parecer complicado descobrir quais diagramas temos que considerar para que estes cancelamentos ocorram. Além disso a presença de divergências põe em dúvida a validade da série perturbativa. Veremos agora como é possível modificar a teoria para escrevê-la em termos de grandezas físicas finitas desde o princípio de forma que tenhamos uma teoria que possa ser expandida perturbativamente. Começamos pensando um pouco sobre estas divergências.



deve existir um cut-off a partir do qual preciso de uma descrição mais fundamental



Posso estudar ondas sonoras (ou de spin) e fluxos

↳ Esperamos que esta descrição falhe quando chegamos a tamanhos e velocidades típicos dos átomos. Ou seja, quando a descrição contínua falha.

Conhecer detalhes da “**continuação ultravioleta**” (neste caso a física dos átomos - seus tamanhos, velocidades e spins) ajuda a obter a física em escalas de tamanhos maiores ou de menor energia (neste caso, viscosidades, suscetibilidade magnética, velocidade do som). No entanto, no caso de campos quânticos, não conhecemos a física a escalas realmente pequenas, sequer sabemos exatamente aonde está o cut-off. É importante nos interrogarmos em que condições é possível contruir teorias preditivas nessa situação, teorias que sejam **independentes do cut-off**.

A resposta para esta pergunta está intrinsecamente ligada ao tratamento das divergências, pois é a presença delas nas relações entre as versões **nuas** (antes de considerarmos interações) e **físicas** dos parametros da teoria (massas e acoplamentos) indicam que os valores destes parâmetros são muito influenciados pela continuação ultravioleta - pela física desconhecida. É por isso que eles não podem ser obtidos de primeiros princípios, tudo que podemos fazer é medi-los. Veremos no entanto que, satisfeitas certas condições, podemos obter o comportamento destes parâmetros até em regiões próximas do cut-off.

**Contagem de Divergências Ultravioleta - QED**

(Peskin 10.1, Ryder 9.1 ~ 9.5)

Comecemos tentando encontrar um modo de “descobrir” (sem de fato calcular o diagrama de Feynman) quando um diagrama tem divergências ultravioleta. Comecemos com a QED

$N_e$  = número de elétrons externos

$V$  = número de vértices

$N_\gamma$  = número de fótons externos

$L$  = número de loops

$P_e$  = número de propagadores de elétron

$P_\gamma$  = número de propagadores de fóton

Em um diagrama qualquer, temos uma divergência em potencial para cada loop:  $\int d^4k$

no entanto, os propagadores atenuam esta divergência, colocando potências de momento no denominador:



Definamos a **divergência superficial** do diagrama por:

$$D \equiv 4L - P_e - 2P_\gamma \quad (\text{eq. 138.1})$$

Inocentemente esperaríamos que o diagrama tenha uma divergência proporcional a  $\Lambda^D$  se  $D > 0$ , e proporcional a  $\ln(\Lambda)$  se  $D = 0$ .  $\Lambda$  é um cut-off de momento.

Esta análise simplista pode falhar por três motivos:

- (1) Diagramas sem loops nem propagadores tem  $D = 0$ , mas são convergentes
- (2) Se um diagrama contém um subdiagrama divergente, a divergência pode ser pior do que parece:

$L = 1$   
 $P_e = 2$   
 $P_\gamma = 2$

$D = 4 - 2 - 2 = -2$

no entanto este diagrama  $\sim L_N(\Lambda)$

os momentos colocados no denominador por estes propagadores nada tem a ver com o que está sendo integrado no loop. Logo não contribuem para cancelar a divergência

- (3) Se alguns termos do diagrama são cancelados por força de alguma simetria (identidades de WT, por exemplo), a divergência pode ser menor ou nem existir:

$L = 1$   
 $P_e = 2$   
 $P_\gamma = 0$

$D = 4 - 2 = 2$

no entanto:  $\sim L_N(\Lambda)$

Note que (pg 128) quando fizemos regularização por cut-off (que viola WT) obtivemos  $\sim \Lambda^2$  mas o resultado que obedece WT (Pauli-Villars) nos dá  $L_N(\Lambda)$

Ainda assim  $D$  é útil, veja que podemos escrevê-lo em função das pernas externas usando:

$$L = P_e + P_\gamma - V + 1 \quad (\text{eq. 139.1})$$

ex: para  $V = 4$ , preciso de 4 propagadores para fechar o loop:

$V = 4$   
 $P_e + P_\gamma = 4$   
 $L = 1$

diminuindo o número de propagadores, não consigo fechar o loop

$V = 4$   
 $P_e + P_\gamma = 3$   
 $L = 0$

se aumento o número de propagadores fica inevitável aparecer mais loops:

$V = 4$   
 $P_e + P_\gamma = 5$   
 $L = 2$

e também, que:

$$V = 2 P_\gamma + N_\gamma = \frac{1}{2} (2 P_e + N_e) \quad (\text{cada vértice tem 1 fóton e 2 elétrons, propagadores tem dois vértices e pernas externas apenas um}) \quad (\text{eq. 139.2})$$

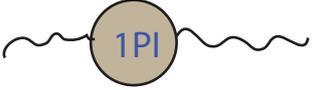
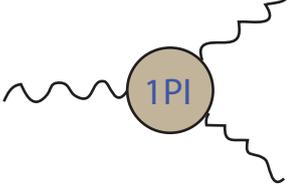
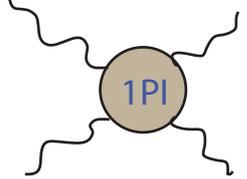
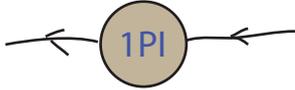
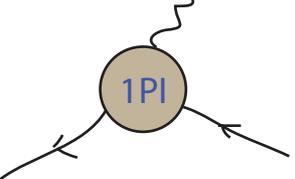
$$D = 4(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma = \cancel{4P_e} + \cancel{4P_\gamma} - \cancel{2P_\gamma} - N_\gamma - \cancel{3P_e} - \frac{3}{2}N_e + 4 - \cancel{P_e} - \cancel{2P_\gamma} =$$

$$\hookrightarrow \frac{V}{4} + \frac{3V}{4} = \frac{P_\gamma}{2} + \frac{N_\gamma}{4} + 3\frac{P_e}{4} + \frac{3N_e}{8}$$

$D = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2} N_e$

 (eq. 140.1)

O que nos mostra que a divergência superficial só depende do número de pernas externas. Somente diagramas com poucas pernas tem  $D \geq 0$ . Temos poucas possibilidades na QED, de fato sete combinações (abaixo). E como as pernas externas não entram na integral de loop, podemos considerar a soma de todos os diagramas 1PI que contribuem para cada combinação de pernas externas. Qualquer diagrama que contenha divergências vai ter um destes como sub-diagrama:

A		$D = 4$	B		$D = 3$
	$N_e = N_\gamma = 0$				
C		$D = 2$	D		$D = 1$
E		$D = 0$	F		$D = 1$
G		$D = 0$			

O diagrama A é o mais divergente, mas não contribui para elementos de matriz S e nem pode estar contido em outros diagramas porque não tem pernas externas (de fato nem para Z ele contribui pois é cancelado na normalização).

Para cada linha externa de fóton, devemos ter dentro do produto temporalmente ordenado uma corrente eletromagnética:

$$j^\mu(z) = \bar{\psi}(z) \gamma^\mu \psi(z)$$

$$\langle \Omega | A_\mu(x) | \Omega \rangle \sim \langle 0 | A_\mu(x) | 0 \rangle + K_1 \langle 0 | T \{ A_\mu(x) A^\nu(z) j_\nu(z) \} | 0 \rangle +$$

$$+ K_2 \langle 0 | T \{ A_\mu(x) A^\nu(z) j_\nu(z) A^\rho(z') j_\rho(z') \} | 0 \rangle +$$

$$+ K_3 \langle 0 | T \{ A_\mu(x) A^\nu(z) j_\nu(z) A^\rho(z') j_\rho(z') A^\sigma(z'') j_\sigma(z'') \} | 0 \rangle + \dots =$$

$K_n =$  constantes e integrais em z

$$\sim K_1^D \langle 0 | T \{ j_\mu(z) \} | 0 \rangle + K_3^D \langle 0 | T \{ j_\mu(z) \overbrace{j_\nu(z')}^{c_0} j_\rho(z'') \} | 0 \rangle + \dots \sim$$


$$\sim K \int d^4 z \langle \Omega | T \{ j_\mu(z) \} | \Omega \rangle$$

$$\langle \Omega | A_\mu(x) A_\nu(x') A_\rho(x'') | \Omega \rangle \sim \iiint \langle \Omega | j_\mu(x) j_\nu(x') j_\rho(x'') | \Omega \rangle$$

Como a QED é invariante por conjugação de carga:  $C | \Omega \rangle = | \Omega \rangle$

e temos:  $C \bar{\psi} \gamma^\mu \psi C^\dagger = - \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

então:  $\langle \Omega | T \{ j_\mu(z) \} | \Omega \rangle = - \langle \Omega | T \{ j_\mu(z) \} | \Omega \rangle = 0$

$$\langle \Omega | T \{ j_{\mu_1}(z_1) \dots j_{\mu_n}(z_n) \} | \Omega \rangle = (-1)^n \langle \Omega | T \{ j_{\mu_1}(z_1) \dots j_{\mu_n}(z_n) \} | \Omega \rangle$$

Qualquer correlator com um número ímpar de fótons externos é zero. Isto elimina os diagramas B e D acima. O restante dos diagramas acima é diferente de zero, comecemos pensando sobre o diagrama F (auto energia do elétron) - ele é função do momento do elétron (p), a série em torno de p = 0 fica:

$$\leftarrow \text{1PI} \leftarrow = A_0 + A_1 \not{p} + A_2 p^2 + \dots$$

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d p^n} \left( \leftarrow \text{1PI} \leftarrow \right) \Big|_{p=0}$$

↳ não estamos nos preocupando com as divergências infravermelhas, assumimos que foram devidamente regularizadas, como fizemos na pg 111.

O momento p vai estar no denominador dos propagadores aparecendo na soma 1PI, quando calculamos os coeficientes fazemos:

$$\frac{d}{d p} \left( \frac{1}{\not{p} + \not{p} - m} \right) = - \frac{1}{(\not{p} + \not{p} - m)^2} \Rightarrow \text{coeficientes com n maior tem o grau de divergência menor}$$

↳ momento integrado

A divergência superficial de  $A_0$  (que é a maior) deve ser  $D = 1$ , isto quer dizer que a divergência de  $A_1$  é logarítmica e o restante dos coeficientes não diverge (é preciso cuidado aqui - pode

haver subdiagramas com divergências mais altas - veremos como tratar isso em breve). Além disso vimos que (pg 120) que correções radiativas não podem dar massa ao elétron quiral (que não tem uma massa nua) e que a correção deve ser proporcional a massa, por análise dimensional vemos que a divergência é logarítmica. Temos portanto o caso em que uma simetria torna a divergência menor que a divergência superficial:

$$\leftarrow \text{1PI} \leftarrow = a_0 m L_N(\Lambda) + a_1 \not{\epsilon} L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

(compare com a eq. 117.1)

Podemos seguir a mesma lógica no caso do diagrama G, neste caso, como a divergência superficial já é 0, qualquer derivada em qualquer um dos momentos externos já nos dá algo finito. Portanto a expansão nestas três variáveis só tem divergências no coeficiente  $A_0$ :

$$\text{1PI} \sim -i \epsilon \not{\gamma} L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

Como já discutimos (pg 125) a auto-energia do fóton (diagrama C) deve ter a forma:

$$\text{1PI} = (\delta^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2)$$

o que já é a série de Taylor que procuramos, dentro de  $\Pi(q^2)$  temos os coeficientes  $A_n$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Os coeficientes  $A_0$  e  $A_1$  são zero, e a divergência superficial cai de 2 para 0 nos termos de  $\Pi(q^2)$  que não dependem do momento (os termos de  $\Pi(q^2)$  que dependem de  $q$  são finitos) - exatamente o que obtivemos na página 132.

**Observação importante:**

Temos aqui dois exemplos importantes do que chamamos de "massas protegidas" por simetrias. A simetria de gauge da QED impede o fóton de ter massa nua e impede, via WT, que ele ganhe massa a qualquer ordem de perturbação. Este mecanismo continua útil mesmo quando a simetria é **quebrada explicitamente!** A simetria quiral impede o elétron de ter massa nua e de ganhar via correções, mas de fato o elétron tem massa. No entanto o conhecimento de que no limite em que a massa nua vai para zero, todas as correções radiativas também devem ir, nos diz que estas devem ser proporcionais a massa. Esta simetria quebrada protege a massa de divergências mais intensas (em vez de lineares são logarítmicas).

Nos resta apenas o espalhamento fóton-fóton (diagrama E). Sabemos que (identidade de Ward):

$$k^\mu \left( \text{1PI} \right) = 0$$

É possível mostrar que isto implica na seguinte estrutura para a amplitude deste diagrama:

$$(g^{\mu\nu} k_1^\sigma - g^{\nu\sigma} k_1^\mu) \times (g^{\alpha\beta} k_2^\gamma - g^{\beta\gamma} k_2^\alpha) (g^{\delta\epsilon} k_3^\zeta - g^{\epsilon\zeta} k_3^\delta) (g^{\eta\theta} k_4^\iota - g^{\theta\iota} k_4^\eta)$$

Como há uma potência do momento em cada termo, temos que todos os coeficientes da série com  $n < 4$  devem ser zero. O primeiro termo diferente de zero tem quatro derivadas o que leva a  $D = -4$ .

O que concluímos é que só existem três blocos básicos divergentes na QED, os diagramas **C** (auto-energia do fóton), **F** (auto-energia do elétron) e **G** (vértice). Os diagramas **G** e **C**, de fato possuem apenas um coeficiente divergente, ao passo que o diagrama **F** contém dois. Isto quer dizer que a QED tem um total de **quatro grandezas divergentes** que temos que absorver em redefinições de parâmetros para obter uma teoria finita. Veremos isto mais a frente

Suponha que seguíssemos o mesmo procedimento para QED em  $d$  dimensões. Neste caso:

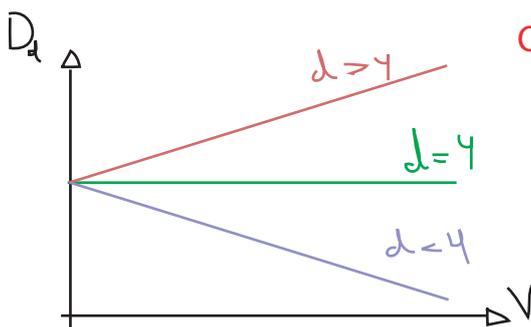
$$D_d = dL - P_e - 2P_\gamma$$

↳ agora cada loop contribui com uma integral de momento  $d$ -dimensional

usando as eqs. 139.1 e 139.2 temos:

$$\begin{aligned} (139.2) \Rightarrow \left. \begin{aligned} P_\gamma &= \frac{V - N_\gamma}{2} \\ P_e &= \frac{2V - N_e}{2} \end{aligned} \right\} D_d &= d(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma = (d-1)P_e + (d-2)P_\gamma - dV + d = \\ &= (d-1)V - \frac{(d-1)N_e}{2} + \frac{(d-2)V}{2} - \frac{(d-2)N_\gamma}{2} - dV + d = \\ &= d + \underbrace{\left(\frac{d-4}{2}\right)V} - \left(\frac{d-2}{2}\right)N_\gamma - \left(\frac{d-1}{2}\right)N_e \end{aligned}$$

O número de vértices só é cancelado em  $d = 4$



$d < 4 \Rightarrow$  somente diagramas de ordem baixa (na expansão perturbativa) divergem superficialmente

A QED é uma **Teoria Super-Renormalizável**

$d = 4 \Rightarrow$  há um número finito de amplitudes divergentes, mas há um infinidade de diagramas contribuindo para cada uma destas divergências, já que as divergências ocorrem a todas as ordens na expansão perturbativa

A QED é uma **Teoria Renormalizável**

$d > 4 \Rightarrow$  qualquer amplitude é divergente, já que se formos mais longe na expansão perturbativa ( $V$  cresce) encontraremos divergências

A QED é uma **Teoria Não-Renormalizável**

Contagem de Divergências Ultravioleta - Campo Escalar  $\lambda\phi^n$

(Peskin 10.1, Ryder 9.1 ~ 9.5)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{n!} \phi^n \quad (\text{EM } d \text{ DIMENSÕES})$$

$n \geq 3$

- $N$  = número de linhas externas
- $V$  = número de vértices
- $P$  = número de propagadores
- $L$  = número de loops

Assim como antes (eq. 139.1):  $L = P - V + 1$

De cada vértice saem  $n$  linhas, então 139.2 fica:  $V = \frac{N + 2P}{n}$

$$D = dL - 2P = d(P - V + 1) - 2P = d + \left[ n \left( \frac{d-2}{2} \right) - d \right] V - \left( \frac{d-2}{2} \right) N$$

(eq. 144.1)

Não-Renormalizável  $\left\{ \begin{array}{l} > 0 \Leftrightarrow n > \frac{2d}{d-2} \\ = 0 \Leftrightarrow n = \frac{2d}{d-2} \\ < 0 \Leftrightarrow n < \frac{2d}{d-2} \end{array} \right.$

Renormalizável

Super-Renormalizável

$d \leq 2 \Rightarrow \forall$  Teoria é Super-Renormalizável

$d=4$	{	$\lambda\phi^4$ renormalizável	$d=3$	{	$\lambda\phi^4$ super-renormalizável
$\frac{2d}{d-2} = 4$		$\lambda\phi^6$ não-renormalizável	$\frac{2d}{d-2} = 6$		$\lambda\phi^6$ renormalizável

Outra forma de chegar a 144.1 é analisando a dimensão da lagrangeana. Em unidades naturais a ação tem que ser adimensional:

$$Dim[S] = 0 \dots 0 \quad \text{GeV}^0$$

$$S = \int d^d x \mathcal{L} \Rightarrow \underbrace{Dim[d^d x]}_{\text{GeV}^{-d}} + Dim[\mathcal{L}] = 0$$

$$\therefore Dim[\mathcal{L}] = d$$

Voltando a lagrangeana do campo escalar podemos ver que:

$$\text{Dim} \left[ \frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)^2 \right] = d = 2 \underbrace{\text{Dim}[\partial_\nu \phi]}_{\text{Dim}[\phi] + 1}$$

$$\boxed{\text{Dim}[\phi] = \frac{d-2}{2}} \quad (\text{eq. 145.1})$$

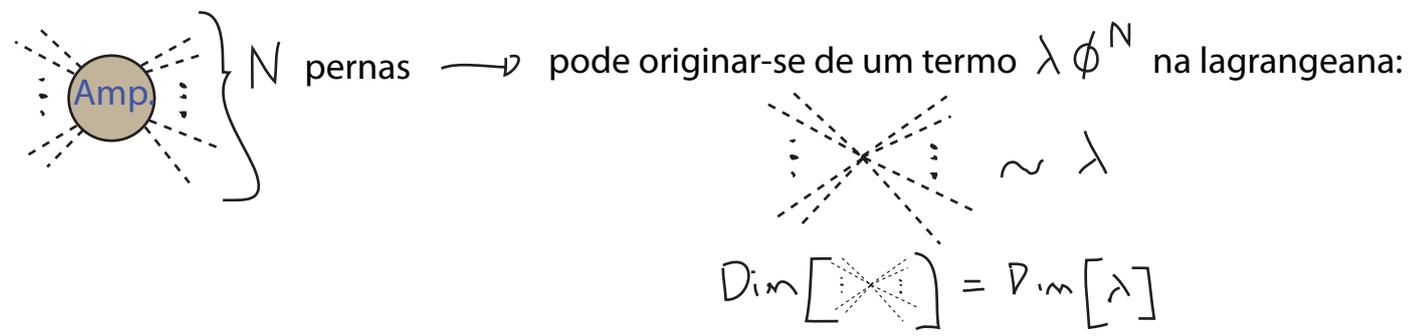
$$\text{Dim}[m^2 \phi^2] = d = 2 \text{Dim}[m] + 2 \underbrace{\text{Dim}[\phi]}_{d-2}$$

$$\text{Dim}[m] = 1 \quad (\text{para nossa sorte! 😊})$$

$$\text{Dim} \left[ \frac{\lambda}{n!} \phi^n \right] = d = \text{Dim}[\lambda] + n \text{Dim}[\phi]$$

$$\boxed{\text{Dim}[\lambda] = d - \frac{n(d-2)}{2}} \quad (\text{eq. 145.2})$$

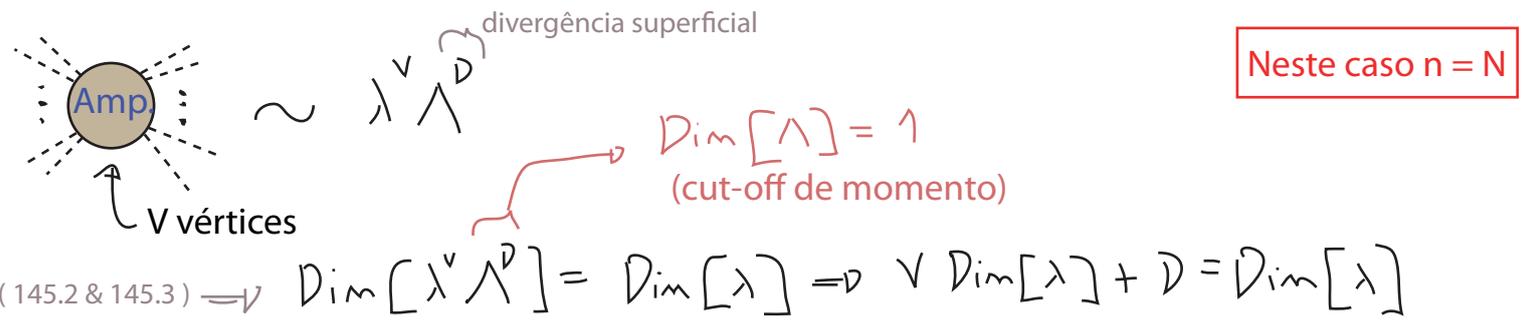
Suponha agora o seguinte diagrama:



Como devo somar sobre todas as possibilidades, qualquer diagrama com N linhas externas terá:

$$\boxed{\text{Dim} \left[ \text{Amp} \right] = d - \frac{N(d-2)}{2}} \quad (\text{eq. 145.3})$$

Em uma teoria apenas com o vértice  $\lambda \phi^N$  um diagrama com V vértices será proporcional a:



(145.2 & 145.3)  $\Rightarrow \text{Dim}[\lambda^V \Lambda^D] = \text{Dim}[\lambda] \Rightarrow V \text{Dim}[\lambda] + D = \text{Dim}[\lambda]$

$$\boxed{V \left( d - \frac{N(d-2)}{2} \right) + D = d - \frac{N(d-2)}{2}} \quad \begin{matrix} \text{(que concorda com 144.1} \\ \text{para } n = N) \\ \text{(eq. 145.4)} \end{matrix}$$

Aqui fica claro que o que multiplica  $V$  é  $-\text{Dim}[\lambda]$ :

$$D = -\text{Dim}[\lambda] V + \text{Dim}[\lambda]$$

podemos então dizer que:

$\text{Dim}[\lambda] > 0 \Rightarrow$  Super-Renormalizável

$\text{Dim}[\lambda] = 0 \Rightarrow$  Renormalizável

$\text{Dim}[\lambda] < 0 \Rightarrow$  Não-Renormalizável

(146.1)

Esta análise poderia ter sido feita também para a QED ou qualquer outra teoria, com a mesma conclusão.

### Teoria Perturbativa Renormalizada

(Peskin 10.2, Ryder 9.3)

Nos preocuparemos agora em achar métodos gerais para redefinir nossa teoria em termos de grandezas observáveis e finitas. Note que no caso das correções radiativas para QED foi possível, uma vez que consideramos todos os diagramas e redefinimos as constantes, ter observáveis finitos. Essencialmente o que fizemos foi a troca:

Diagram illustrating the replacement of parameters  $m_0$ ,  $e_0$ , and  $\Lambda$  with renormalized parameters  $m(\Lambda, m_0, e_0)$  and  $e(\Lambda, m_0, e_0)$ . Red annotations explain that  $m$  and  $e$  are finite in the limit  $\Lambda \rightarrow \infty$ , while the original parameters are not.

Colocando de forma simples: isto é a renormalização! Daqui para frente o que faremos é encontrar métodos práticos e confiáveis de fazer esta troca (já que até agora fomos fazendo de forma um tanto caso a caso).

Vejamos como fica a teoria  $\lambda\phi^4$ , analisando

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4$$

Analisemos quais são os diagramas divergentes desta teoria. Como ela é simétrica por  $\phi \rightarrow -\phi$  todos os diagramas com um número ímpar de linhas externas dão zero. Segundo a eq. 144.1 (para  $d = 4$ , quando não importa o número de vértices):



$$\text{Diagram} \Rightarrow D = 0$$

Escrevendo uma série de Taylor (agora em  $p^2$ ) e estudando a divergência dos coeficientes (como fizemos na pg 141 para QED) obtemos:

$$\sim \Lambda^2 + p^2 L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

$$\sim L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

São três constantes divergentes que precisamos "absorver" em redefinições. Faremos isso redefinindo a constante de acoplamento, a massa e o campo em si. Lembrando que:

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | \Omega \rangle e^{i p \cdot x} = \frac{i Z}{p^2 - m^2} + (\text{termos sem polo em } m^2)$$

Se quisermos obter um propagador próximo ao polo que seja parecido com o de uma partícula livre (só que com a massa física) devemos remover este Z. É possível fazer isso definindo:

$$\boxed{\phi \equiv Z^{1/2} \phi_r} \rightarrow \phi_r = Z^{-1/2} \phi \quad (\text{eq. 147.1})$$

O resultado desta substituição na dedução das pgs 74 e 75 será o de fazer sumir o fator Z em toda a conta. O mesmo ocorrerá com todos os Z's que aparecem na fórmula de LSZ (eq. 83.1).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z (d_\nu \phi_r)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 Z \phi_r^2 - \frac{\lambda_0}{4!} Z^2 \phi_r^4$$

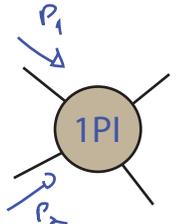
Ainda precisamos nos livrar de  $m_0$  e  $\lambda_0$ . Para tanto definamos:

$$\delta Z = Z - 1 \quad \delta m = m_0^2 Z - m^2 \quad \delta \lambda = \lambda_0 Z^2 - \lambda$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (d_\nu \phi_r)^2 + \underbrace{\delta Z \frac{1}{2} (d_\nu \phi_r)^2}_{\text{contratermos}} - \frac{m^2}{2} \phi_r^2 - \underbrace{\frac{\delta m}{2} \phi_r^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi_r^2 - \frac{\delta \lambda}{4!} \phi_r^2}_{\text{contratermos}}$$

Importante: note que não somamos estes novos termos, apenas re-escrevemos a lagrangeana em função de novos campos e parâmetros.

Os parâmetros físicos,  $m$  e  $\lambda$ . A massa já está bem definida como a localização do menor polo da função de dois pontos. No caso de  $\lambda$ , temos liberdade de escolha. Escolheremos definir:



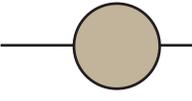
$$p = p_1 + p_2$$

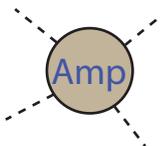
$$\Rightarrow i \Gamma^{(2)}(p^2)$$

$$p^2 = 0 \Rightarrow i \Gamma^{(2)}(p^2) = -i \lambda$$

$$\lambda \equiv -\Gamma^{(2)}(p^2 = 0)$$

Essas definições podem ser resumidas em duas equações, chamadas de **condições de renormalização**:



$$= \frac{i}{p^2 - m^2} + (\text{termos sem polo em } m^2)$$


$$= -i \lambda$$

$p^2 = 0 \left\{ \begin{array}{l} s = 4m^2 \\ t = u = 0 \end{array} \right.$

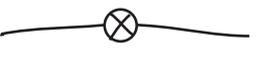
esta equação fixa duas grandezas, a posição do polo e o seu resíduo ( $m$  e  $Z$ ).

(eq. 148.1)

Esta "nova" lagrangeana tem as seguintes regras de Feynman:



$$= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$


$$= -i \lambda$$


$$= i (p^2 \delta Z - \delta m)$$


$$= -i \delta_\lambda$$

(notem que tratamos os contra termos como novas interações) e a utilização desta lagrangeana com contratermos é chamada de **Teoria de Perturbação Renormalizada**.

O procedimento a seguir é então o seguinte:

- (1) calculamos a amplitude desejada com as regras de Feynman novas
- (2) seguimos o procedimento usual para tratar loops (parametrização de Feynman, regularizações, etc...)
- (3) o resultado vai ser função dos parâmetros nos contratermos ( $\delta z$ ,  $\delta m$  e  $\delta \lambda$  no caso escalar)
- (4) usamos as condições de renormalização (eq 148.1) para encontrar os parâmetros

As amplitudes resultantes devem ser finitas e independentes do regulador

Vejamos como ficam as divergências de  $\lambda\phi^4$ :

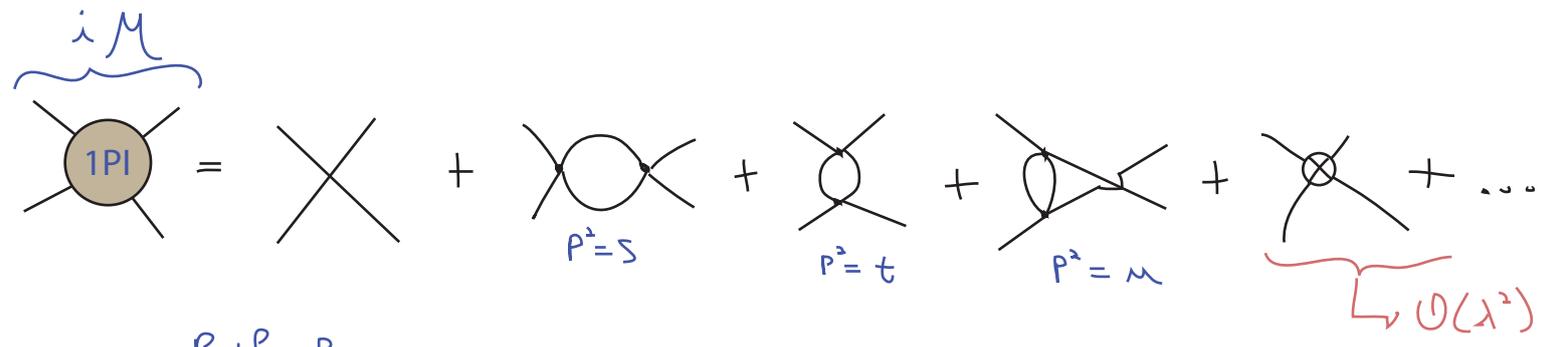


Diagram of a bubble with external momenta  $p_1, p_2$  and internal momenta  $k, k+p$ . The total external momentum is  $P = p_1 + p_2$ .

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} = (-i\lambda)^2 i V(P^2)$$

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + (-i\lambda)^2 [iV(s) + iV(t) + iV(u)] - i\delta_\lambda \quad (\text{eq. 149.1})$$

condição de normalização (eq. 148.1)  $\Rightarrow s = 4m^2, u = t = 0$

$$\left. \begin{array}{l} s = 4m^2 \\ u = t = 0 \end{array} \right\} i\mathcal{M} = -i\lambda$$

$$\hookrightarrow (-i\lambda)^2 [iV(4m^2) + 2iV(0)] - i\delta_\lambda = 0$$

$$\delta_\lambda = -\lambda^2 [V(4m^2) + 2V(0)]$$

(eq. 149.2)

nesta ordem de perturbação

$$V(s) = \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2} =$$

$$= \text{Lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dy \frac{1}{[m^2 - y(1-y)P^2]^{2-d/2}} \right\} =$$

$$= \text{Lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dy \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \text{Li}[4\pi] - \text{Li}[m^2 - y(1-y)s] \right) \right\} =$$

(eq. 149.3)

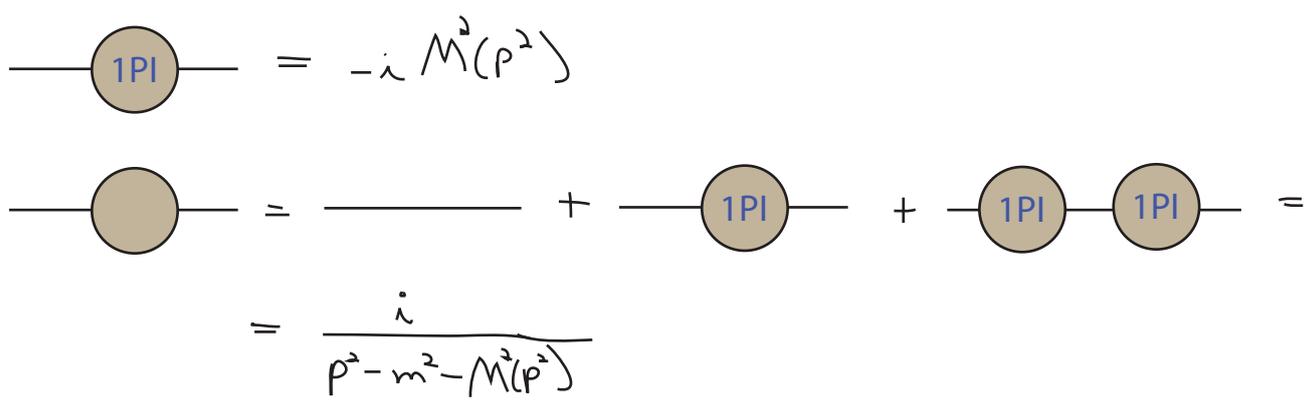
$$\delta_\lambda = \frac{\lambda^2}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dy \left\{ \frac{1}{[m^2 - y(1-y)4m^2]^{2-d/2}} + \frac{2}{[m^2]^{2-d/2}} \right\} =$$

$$= \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left( \frac{6}{\epsilon} - 3\delta + 3L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)4m^2] - 2L_N[m^2] \right)$$

Juntando este resultado ao de 149.1, temos

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= -i\lambda \left[ \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left\{ \left( \frac{2}{\epsilon} - \delta + L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)S] \right) + \left( \frac{2}{\epsilon} - \delta + L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)u] \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{2}{\epsilon} - \delta + L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)t] \right) \right\} - i\frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left( \frac{6}{\epsilon} - 3\delta + 3L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)4m^2] - 2L_N[m^2] \right) \right] \\ &= -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left\{ L_N\left(\frac{m^2 - \gamma(1-\gamma)S}{m^2 - \gamma(1-\gamma)4m^2}\right) + L_N\left(\frac{m^2 - \gamma(1-\gamma)u}{m^2}\right) + L_N\left(\frac{m^2 - \gamma(1-\gamma)t}{m^2}\right) \right\} \end{aligned}$$

$\delta_z$  e  $\delta_m$  vêm da função de dois pontos:



A condição de normalização é (148.1): =  $\frac{i}{p^2 - m^2} + \dots$

portanto:  $M^2(p^2) \Big|_{p^2=m^2} = 0$  (eq. 150.1)

e também (expandindo o propagador em torno do polo):

$$p^2 - m^2 - M^2(p^2) = -M^2(p^2) \Big|_{p^2=m^2} + \left( 1 - \frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right) (p^2 - m^2) + \mathcal{O}(p^2 - m^2)^2$$

$$\frac{i}{p^2 - m^2 - M^2(p^2)} = \frac{i \left( 1 - \frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right)^{-1}}{p^2 - m^2} = 1 \quad \left( \frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} = 0 \right)$$

(eq. 150.2)

$\text{---} \circlearrowleft \text{---} = \text{---} + \text{---} \Delta + \underbrace{\text{---} \otimes \text{---}}_{\lambda (\rho^2 \delta z - \delta m)} + \dots$

$\Delta \sim \lambda^2$   
 $\Delta = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} = \lim_{d \rightarrow 4} \left( -\frac{i\lambda}{2} \right) \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1 - d/2}} =$   
 $= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{i\lambda}{2} \right) \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \frac{-\frac{d}{2}}{\epsilon} - m^2 L_n(4\pi) - m^2 L_n\left(\frac{1}{m^2}\right) + m^2 \gamma - m^2 \right]$

O mesmo tipo de polo que obtivemos para a divergência logarítmica na pag 131 (!?!?!). O fato é que em regularização dimensional, não é tão fácil ver a divergência quadrática (ou em geral a potência da divergência). Ela aparece como um polo em  $d = 2$ .

O fato é que  $\Gamma(z)$  tem polos em  $z = 0, -1, -2, -3, \dots$  mas estes polos são sempre do tipo

$\Gamma(a \in -b) \simeq \frac{(-1)^{-b}}{a \in b!} + O(\epsilon^0)$

$a \in \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{N}_0$

(eq. 131.1)

$$\int \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2} \frac{\Gamma(n-d/2)}{\Gamma(n)}$$

$\hookrightarrow n=1 \Rightarrow \Gamma(1 - \frac{d}{2}) \rightarrow 1 - \frac{d}{2} \leq 0 \quad d \geq 2$

$\int \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q_E^2 + \Delta)} \sim \lambda^2 \iff \begin{cases} \text{dois polos em } d \leq 4 \Rightarrow d = (2, 4) \\ \hookrightarrow \epsilon = 4 - d \Rightarrow \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) \simeq -\frac{2}{\epsilon} + \dots \\ \hookrightarrow \epsilon = 2 - d \Rightarrow \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \simeq \frac{2}{\epsilon} + \dots \end{cases}$

$\int \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q_E^2 + \Delta)} \sim \lambda^4 \iff \begin{cases} \text{três polos em } d \leq 6 \Rightarrow d = (2, 4, 6) \\ \hookrightarrow \epsilon = 6 - d \Rightarrow \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 2\right) \simeq \frac{1}{\epsilon} \end{cases}$

$\hookrightarrow n=2 \Rightarrow \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \rightarrow 2 - \frac{d}{2} \leq 0 \quad d \geq 4$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \sim \text{Log} \Lambda \iff \begin{cases} \text{apena um polo em } d \leq 4 \\ \epsilon = 4 - d \Rightarrow \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) \sim \frac{2}{\epsilon} + \dots \end{cases}$$

$$-i M^2(p^2) = \left( -\frac{i\lambda}{2} \right) \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1 - 1/2}} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m)$$

como esta parte não depende de  $p^2$ , fica fácil satisfazer ambas as condições (150.1 e 150.2)

basta que:

$$\delta_Z = 0 \quad (\text{eq. 151.1})$$

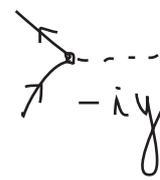
$$\delta_m = -\frac{\lambda}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1 - 1/2}} \quad (\text{eq. 151.2})$$

e teremos:  $M^2(p^2) = 0 \quad \forall p^2$

( $\delta_Z$  não é zero em ordens superiores de perturbação, veremos isso mais adiante)

Note que a correção para a massa do escalar é quadraticamente divergente!

Esse cancelamento de  $\delta_Z$  em L.O. é uma peculiaridade de  $\lambda\phi^4$ , outras teorias escalares não terão esta propriedade. Tomemos, por exemplo, uma teoria escalar com acoplamentos de Yukawa:

$$\mathcal{L}_F = -\bar{\psi} \psi \phi$$


$$-i M^2(p^2) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} = \Delta = m_\phi^2 - \kappa(1-\kappa) p^2$$

$$-i \gamma^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2 - \kappa(1-\kappa)p^2 + m^2}{(\ell^2 + \kappa(1-\kappa)p^2 - m_\phi^2)^2} = \frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx x^{d-1} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{\Delta^{1-1/2}}$$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{\ell_E^2} \sim \int d\ell_E \frac{\ell_E^3}{\ell_E^2} \sim \Lambda^2$$

$$M^{\lambda}(p^2) = \frac{-4g^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx (d-1) \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Delta^{1-d/2}} - (p^2 \delta Z - \delta m)$$

$$\frac{d}{dp^2} M^{\lambda}(p^2) = -\frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left[ \underbrace{-x(1-x) \left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma(1-d/2)}_{-\Gamma(2-d/2)} (m^2 - x(1-x)p^2)^{d/2-2} \right] - \delta Z$$

$$\left. \frac{d}{dp^2} M^{\lambda}(p^2) \right|_{p^2=m^2} = 0 \Rightarrow \delta Z = -\frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{x(1-x) \Gamma(2-d/2)}{(m^2 - x(1-x)m^2)^{2-d/2}} \quad \text{(eq. 152.1)}$$

~  $L_N(\Lambda^2)$

$$M^{\lambda}(m^2) = \frac{-4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1-d/2)}{(m^2 - x(1-x)m^2)^{1-d/2}} - (m^2 \delta Z - \delta m)$$

$$M^{\lambda}(m^2) = 0 \Rightarrow \delta m = \frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1-d/2)}{(m^2 - x(1-x)m^2)^{1-d/2}} + m^2 \delta Z \quad \text{(eq. 152.2)}$$

~  $\Lambda^2$

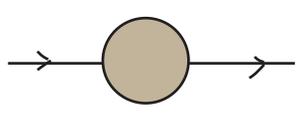
### Renormalização da QED

(Peskin 10.3, Ryder 9.5 a 9.7)

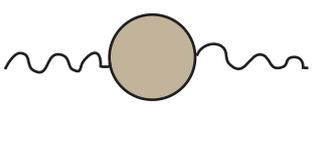
Tentemos agora repetir o processo acima para a QED

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi} (i\not{\partial} - m_0) \Psi - e_0 \bar{\Psi} \not{A} \Psi$$

Vimos que a partir desta lagrangeana obtemos:



$$= \frac{i Z_2}{\not{p} - m} + \dots \quad \text{(pg 77)}$$



$$= -\frac{i Z_3 g_{\mu\nu}}{q^2} + \dots \quad \text{(pg 127)}$$

Começamos então com a renormalização dos campos:

$$\Psi \equiv Z_2^{1/2} \Psi_R \quad (\text{eq. 154.1})$$

$$A^\mu \equiv Z_3^{1/2} A_{R\mu} \quad (\text{eq. 154.2})$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 (F_{\mu\nu})^2 + Z_2 \bar{\Psi}_R (i \not{\partial} - m_0) \Psi_R - e_0 Z_2 Z_3^{1/2} \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu}$$

A primeira condição de renormalização é a que define a carga física:

$$(e_0 Z_2 Z_3^{1/2} = e Z_1)_{q=0} \quad (\text{eq. 154.3})$$

isto é equivalente a definição de  $Z_1$  que usamos na eq 123.1 já que este é o fator que aparece no vértice (multiplicando a carga) quando  $q = 0$ . Ademais lembre que:

(pg 127)  $\Rightarrow Z_3^{1/2} e_0 = e$

(pg 124)  $\Rightarrow Z_2 = Z_1$

de forma que as definições dos Z's que já vínhamos usando se mantém.

Fazendo então as definições adicionais:

$$\begin{cases} \delta_3 = Z_3 - 1 \\ \delta_2 = Z_2 - 1 \\ \delta_m = Z_2 m_0 - m \\ \delta_1 = Z_1 - 1 = \frac{e_0}{e} Z_2 Z_3^{1/2} - 1 \end{cases}$$



(eq. 154.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} \underbrace{Z_3}_{1+\delta_3} (F_{\mu\nu})^2 + \underbrace{Z_2}_{1+\delta_2} \bar{\Psi}_R (i \not{\partial} - \underbrace{m_0}_{Z_2 m_0 = m + \delta m}) \Psi_R - \underbrace{e_0 Z_2 Z_3^{1/2}}_{e Z_1 = e(1+\delta_1)} \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu} = \\ &= -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi}_R (i \not{\partial} - m) \Psi_R - e \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu} + \\ &\quad -\frac{1}{4} \delta_3 (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi}_R (i \delta_2 \not{\partial} - \delta m) \Psi_R - \delta_1 \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu} \end{aligned}$$

cujas regras de Feynman são:

$$\text{Diagram: } \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \hline q^\mu \end{array} = -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{solid line} \\ \hline \not{p} - m + i\epsilon \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &= -ie\gamma^\mu \\
 \text{Diagram 2} &= i(\not{p}\delta_2 - \delta_1 m) \\
 \text{Diagram 3} &= -i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\delta_3 \\
 \text{Diagram 4} &= -ie\gamma^\mu\delta_1
 \end{aligned}$$

$$\int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] = \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} A_\mu (-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu \right]$$

As condições que fixam as normalizações dos propagadores e definem a carga e a massa do férmion podem ser escritas usando as definições que fizemos anteriormente:

$$\begin{aligned}
 \text{Wavy line with 1PI} &= i\Pi^{\mu\nu}(q) = i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2) \\
 \text{Feynman line with 1PI} &= -i\Sigma(\not{p}) \\
 \text{Vertex with Amp} &= -ie\Gamma^\mu(p, p)
 \end{aligned}$$

Só que agora estou REDEFININDO estas grandezas, todas incluem agora as contribuições que vem dos contratermos  
 A definição de  $\Gamma$  agora é feita com a carga física

Como discutido na página 143, temos quatro grandezas divergentes na QED, isto levou aos quatro  $\delta$ 's nos contratermos, as quatro condições que usamos para obtê-los são:

(eq. 155.1)

$\Sigma(\not{p}=m) = 0$  (a)

$\Pi(q^2=0) = 0$  (b)

$\frac{d}{d\not{p}} \Sigma(\not{p}) \Big|_{\not{p}=m} = 0$  (c)

$-ie\Gamma^\mu(p'-p=0) = -ie\gamma^\mu$  (d)

Vejamos a aplicação destas condições e o valor dos contratermos em um loop. Já obtivemos a expressão para a auto-energia do elétron usando regularização de Pauli-Villars (eq. 117.1), se tivéssemos feito regularização dimensional, chegaríamos a:

antes da inclusão dos contratermos

$$-i \sum_2^* \rightarrow (p) = -i \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)p^2]^{2-d/2}} \times [dm - (d-2)x\cancel{p}]$$

Levando em conta a contribuição do contratermo ( $\rightarrow \otimes \rightarrow$ ) e usando a condição 155.1(a), temos:

$$\begin{aligned} (m\delta_2 - \delta m) &= \frac{e^2 m}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2}) (d - (d-2)x)}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)m^2]^{2-d/2}} = \\ &= \frac{e^2 m}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2}) [(1-x)d + 2x]}{[(1-x)^2 m^2 + x\mu^2]^{2-d/2}} \end{aligned} \quad (\text{eq. 156.1})$$

Para utilizar a condição 155.1(c) precisamos calcular:

$$\frac{d}{d\cancel{p}} \sum_2^* (\cancel{p}) = \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\cancel{p}^2]^{2-d/2}} \times \left\{ \frac{-2x(1-x)\cancel{p} \left(\frac{d}{2} - 2\right)}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\cancel{p}^2]} [dm - (d-2)x\cancel{p}] - (d-2)x \right\}$$

$\epsilon = d - 4$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\cancel{p}} \sum_2^* (\cancel{p}) \Big|_{\cancel{p}=m} &= \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{4-\epsilon}{2}}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]^{2-d/2}} \left\{ -\overset{*}{(2-\epsilon)}x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\epsilon}{2} \frac{2x(1-x)m}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]} m [4 - 2x + \epsilon(x-1)] \right\} \end{aligned}$$

\* a divergência vem toda desta parte, todo o resto é proporcional a  $\epsilon$  e dá uma contribuição finita quando multiplicado por  $1/\epsilon$  que vem da função  $\Gamma$ .

Levando em conta a contribuição do contratermo  $(\rightarrow \otimes \rightarrow)$  e usando a condição 155.1(c), temos:

$$\delta_2 = \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{d-4}{2}}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]^{2-\frac{d}{2}}} \left\{ (2-\epsilon)x - \epsilon \frac{x(1-x)m^2}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]} \left[ 4 - 2x + \epsilon(x-1) \right] \right\} \quad (\text{eq. 157.1})$$

Incluindo  $(\nu \rightsquigarrow \otimes \nu)$  na contribuição à auto-energia do fóton que calculamos em 132.2 e usando 155.1(b) temos:

$$i\Pi_2^{MN}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) i\Pi_2^*(q^2) - i(g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \delta_3 = i \left( \Pi_2^* - \delta_3 \right)$$

antes da inclusão dos contratermos

$$\Pi_2(q^2) = \Pi_2^*(q^2) - \delta_3 \xrightarrow{155.1(b)} \delta_3 = \Pi_2^*(0) \quad 132.2$$

$$\delta_3 = -\frac{8e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx \left[ x(1-x) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{[m^2]^{2-\frac{d}{2}}} \right] \quad (\text{eq. 157.2})$$

Para o vértice da QED, temos agora:

$$-ie\Gamma^\mu = -ie\Gamma^{*\mu} - ie\gamma^\mu \delta_1$$

antes da inclusão dos contratermos (mas sem Z<sub>2</sub> na LSZ!)

A condição 155.1(d) nos dá:  $(1 - \delta_1)\Gamma^\mu = \Gamma^{*\mu} (p' - p = 0)$  (pg 99)

$$\delta_1 = -\delta F_1(0) \quad \rightarrow \quad F_1 = 1 + \delta F_1(0)$$

$\gamma^\mu F_1(0) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu F_2(q^2)}{2m} \xrightarrow{q=0} \gamma^\mu F_1(0)$

Como estamos fazendo tudo em regularização dimensional, precisamos escrever o resultado obtido em 108.2 nesse método, obtemos:

$$\delta F_1(q^2) = \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \frac{(2-\epsilon)^2}{2} + \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Delta^{3-\frac{d}{2}}} \left[ q^2 [2(1-x)(1-y) - \epsilon xy] + m^2 [2(1-y+z)^2 - \epsilon(1-z)^2] \right] \right\}$$

Onde:  $\Delta = (1 - \delta)^2 m^2 + z \nu^2 - x y q^2$

$$\delta_1 = -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{[(1-\delta)^2 m^2 + z \nu^2]^{2-d/2}} \frac{(2-\epsilon)^2}{2} + \frac{\Gamma(3 - \frac{d}{2})}{[(1-\delta)^2 m^2 + z \nu^2]^{3-d/2}} m^2 [2(1-y\delta + z^2) - \epsilon(1-z)^2] \right\}$$

*(Handwritten note:  $\int dz (1-z)$  circled in red)*

(eq. 158.1)

As equações 156.1, 157.1, 157.2 e 158.1 fixam todos os coeficientes dos contratermos em ordem  $\alpha$ .

É possível mostrar (via integração por partes) que  $\delta_1 = \delta_2$  e que, portanto,  $z_1 = z_2$  (em ordem  $\alpha$ ). Podemos provar que isto continua valendo para qualquer ordem  $\alpha$  (o que não faremos aqui). Como um comentário final note o que aconteceria se pensarmos não apenas no elétron, mas também no muon, interagindo via QED. A equação 154.3 nos diz que:

elétron -  $e = e_0 \frac{z_2 z_3^{1/2}}{z_1}$

muon -  $e' = e_0 \frac{z_2' z_3'^{1/2}}{z_1'}$

*(Handwritten note: Red arrow pointing to  $z_1'$  in the muon equation, with text: "auto-energia do muon e correção do vértice, ambas dependem da massa do muon")*

Corremos o risco do muon sentir uma carga física diferente da do elétron, mesmo que comecemos com a mesma carga nua. No entanto como  $Z_1 = Z_2$  eles se cancelam, e temos:

$$e = e' = e_0 z_3^{1/2}$$

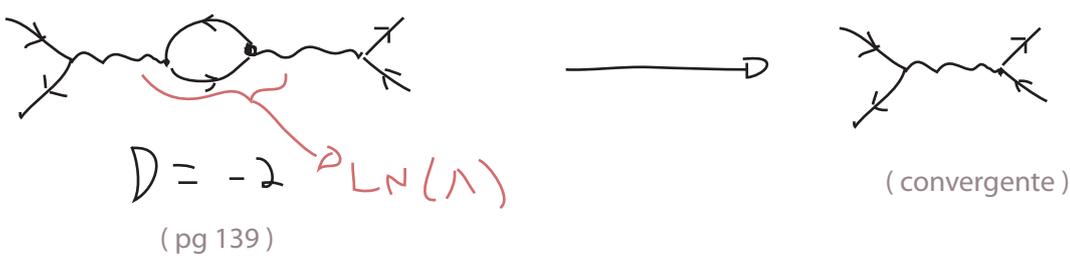
As identidades de WT (ou seja, a simetria de Gauge) garantem que a correção à carga venham somente do fóton, independente de qual partícula esta interagindo. Isto garante que o acoplamento de gauge da teoria continue universal, e que todas as partículas sintam o mesmo "running" deste acoplamento.

### Renormalização em ordem superior

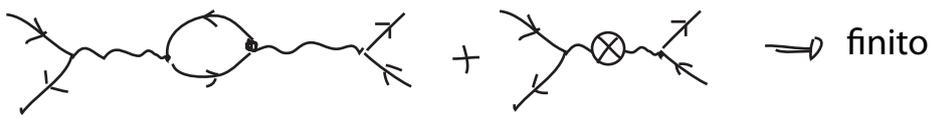
(Peskin 10.4, Ryder 9.7)

Vejam agora as sutilezas que aparecem quando consideramos diagramas com mais de um loop. Vimos que a divergência superficial de um diagrama pode nos enganar quando ele contém subdiagramas divergentes. No caso em que o diagrama que queremos calcular é convergente caso remo-

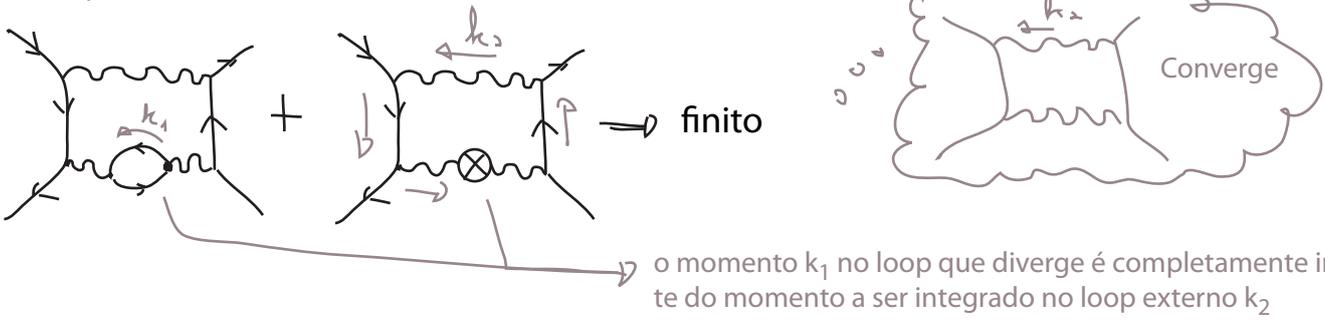
vamos o sub-diagrama divergente, fica relativamente simples:



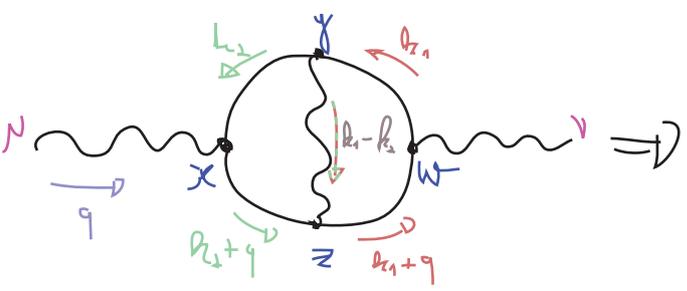
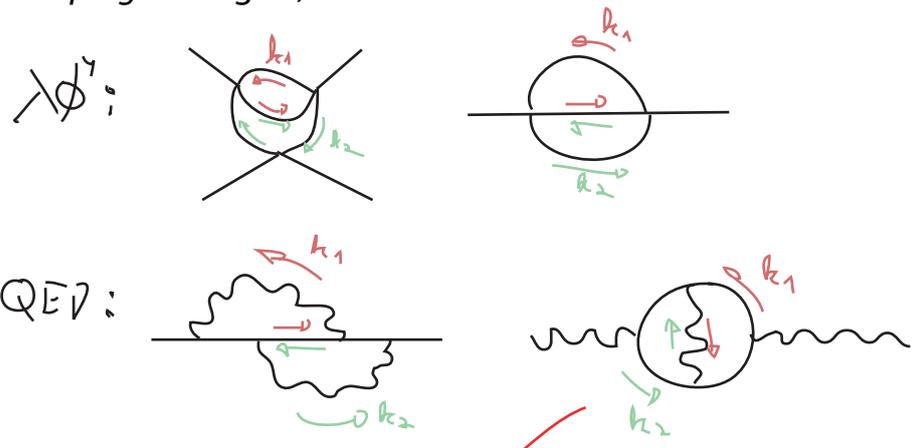
neste caso a divergência é cancelada pelo mesmo contratermo que cancelou a divergência do sub-diagrama:



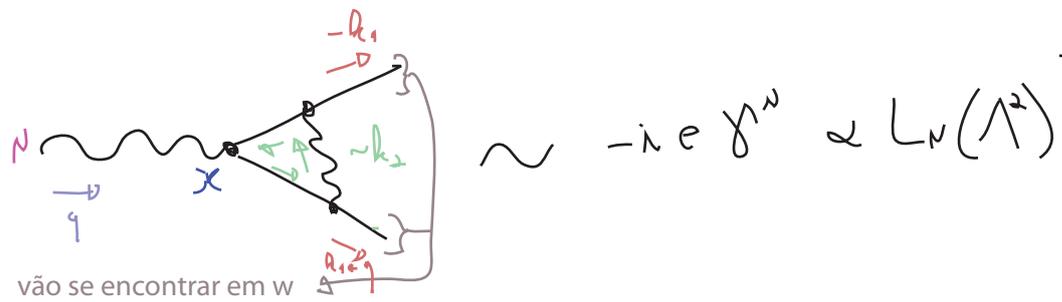
O mesmo vale para diagramas mais complicados. No exemplo abaixo basta somar os dois diagramas para cancelar a divergência na auto energia do fóton antes de fazer a integral no loop mais externo (que é finita)



A situação começa a ficar complicada quando temos diagramas em que dois loops divergentes compartilham um mesmo propagador, chamamos isto de **divergências sobrepostas** (*nested* ou *overlapping* em inglês)



Pensemos primeiro na região em que  $k_2$  é grande. Neste caso  $x, y$  e  $z$  tem que estar próximos (tanto o fóton quanto os elétrons no loop são muito virtuais) mas  $w$  pode ser mais distante. Podemos pensar nisso como uma correção de um fóton ao vértice em  $x$ :



Se voltamos com este vértice no diagrama completo antes de integrar em k1, obteremos:

$$\text{Diagram} \sim \alpha (g^{\mu\nu} q^2 - g^\mu g^\nu) \Pi_2(q^2) \cdot \alpha L_N(\Lambda^2)$$

(pg 132)

$$\Pi_2(q^2) \sim \int_0^1 dx \, x(1-x) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \Delta^{\frac{d}{2}-2} \sim L_N(\Lambda^2) + L_N(\Delta) + \dots$$

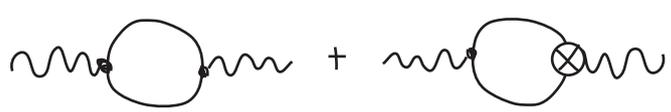
$m^2 - x(1-x)q^2$

$$\text{Diagram} \sim \alpha^2 (L_N(\Lambda^2) + \frac{L_N(q^2)}{q^2}) L_N(\Lambda^2)$$

domina quando  $k_1$  ou  $k_2$  é pequeno  
domina quando  $k_1$  também é grande

Estes termos proporcionais a  $\Pi_2(q^2) L_N(\Lambda^2)$  vão contra nossa expectativa de que as divergências podem ser escritas como simples polinômios em  $q^2$  (pense no que fizemos na pag 142). Chamamos as divergências que de fato são polinômios em  $q^2$  de **divergências locais**, essas divergências não polinomiais são chamadas de **divergências não locais**.  
 pois no espaço das posições são funções delta (ou derivadas)

A aproximação acima indica que, na região em que um dos momentos é pequeno e o outro grande, o que temos é uma divergência local multiplicando uma parte não divergente. Isso sugere que os diagramas necessários para corrigir a divergência são:



De fato, se fizéssemos a conta veríamos que estes cancelam a divergência não local. Uma vez somados, resta apenas uma divergência local que é cancelada como de costume, pelo diagrama



É possível mostrar que isso funciona a todas as ordens de perturbação, contanto que a teoria seja renormalizável pelo critério da divergência superficial. Isto quer dizer que uma vez que colocarmos os contratermos necessários para cancelar as divergências locais, todas as divergências (locais ou não) são removidas a todas as ordens - este resultado é conhecido como teorema BPHZ (Bogoliubov - Parasiuk - Hepp - Zimmermann)

# O Grupo de Renormalização

(Peskin 8 & 12.1, Ryder 9.4)

Vimos que, fazendo a renormalização de uma teoria, podemos obter resultados que independem da dinâmica no ultravioleta. As divergências somem e conseguimos uma teoria que funciona. No entanto é um tanto misterioso como as excitações de maior energia da teoria podem ter tão pouco efeito. Vamos então tentar ter uma imagem mais clara de como isso pode ocorrer.

Começemos pensando no funcional gerador de  $\lambda\phi^4$

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int [\mathcal{L} + J\phi]} = \left( \prod_k \int d\phi(k) \right) e^{i \int [\mathcal{L} + J\phi]}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{V} \sum_k e^{-i k \cdot x} \phi(k)$$

↑  
unitária

$$\mathcal{D}\phi(x) = \prod_k d\phi(k)$$

fazer uma regularização por cut-off significa integrar somente sobre:  $\phi(k) / |k| \leq \Lambda$   
 $k > \Lambda \rightarrow \phi(k) = 0$

pensando desta forma podemos estudar especificamente o efeito dos momentos da ordem do cut-off: basta integrar só sobre eles. Para evitar valores de  $k$  que, apesar de pequenos, tem valores enormes de  $k_0$  e  $\vec{k}$ , trabalharemos no espaço Euclideano.  $|k_E| \leq \Lambda$

Além disso, a teoria de campo no espaço Euclideano nos leva para perto de sistemas atômicos, onde podemos ter mais intuição do que significa o cut-off ultravioleta e a renormalização. Um bom exemplo de um sistema de mecânica estatística que é bem descrito por um campo escalar foi dado na pag. 50 - um ferromagneto na teoria de Landau. A energia livre de Gibbs deste sistema é:

$$G = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\nabla s)^2 + b(T - T_c) s^2 + c s^4 - H s \right]$$

E a densidade de spin  $s(x)$  faz o papel do campo escalar, ao passo que o campo externo  $H$  é a fonte. Nesse caso é bastante óbvio que existe um cut-off físico, não faz sentido falar em flutuações da densidade de spin em distâncias menores que o espaçamento entre os átomos que compõe o material.

Pensemos um pouco sobre este sistema em termos de temperatura: se estamos longe de qualquer ponto crítico, é de se esperar que hajam flutuações de spin na escala atômica. No entanto assim que nos afastamos para escalas maiores, da ordem de algumas dezenas de distâncias atômicas, o sistema já deve parecer uniforme e nenhuma flutuação é visível. Podemos descrever este comportamento usando teoria de campos. Mas primeiro vamos lembrar um pouco da física por trás do problema

Estamos imaginando, por simplicidade, que se trata de um material com um eixo preferencial de magnetização

$T \sim 0$   
 $H = 0$  }  $\rightarrow$  Magnetização  $M$  paralela ou antiparalela a este eixo

$$M = \int d^3x \sum S(x)$$

tanto o campo como os spins são definidos na direção deste eixo

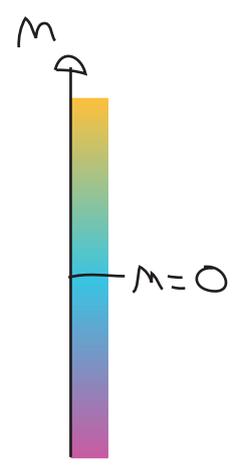
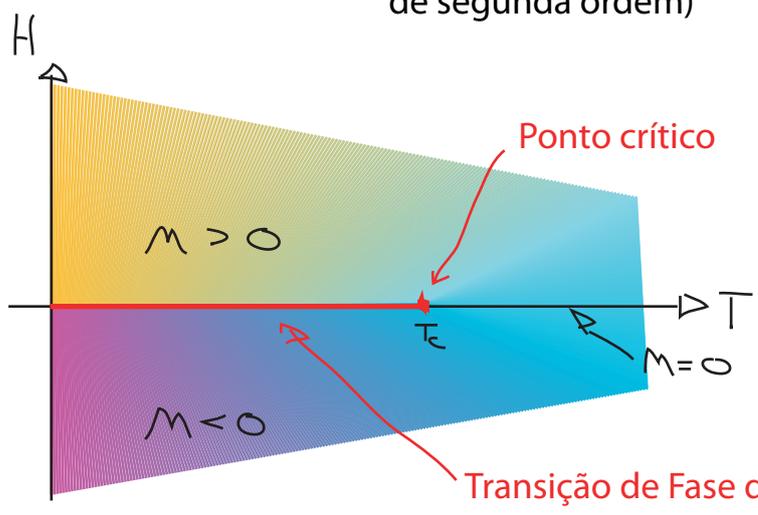
$T \sim 0$   
 $H \neq 0$  }  $\rightarrow$  Favorece  $M$  paralelo ou antiparalelo

Mudança de  $H$  pequeno e negativo para pequeno e positivo }  $\rightarrow$  Mudança descontínua em  $M$   
 $T \sim 0$  } **Transição de fase de primeira ordem**

$T_c > T > 0 \rightarrow$  Spins cada vez mais desordenados  $|M|$  vai diminuindo

$T = T_c$   
 $H = 0$  }  $\rightarrow M = 0$

$\hookrightarrow$  Valores grandes de  $H$  ainda induzem magnetização, mas a descontinuidade perto de  $H = 0$  desaparece. Este é o ponto crítico (ou transição de fase de segunda ordem)



Ao longo da linha da transição de fase os dois estados ( $M > 0$  e  $M < 0$ ) coexistem em equilíbrio. A energia livre de Gibbs só depende de  $M$  e  $T$  e é dada por:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial M} \right|_T = H$$

Perto do ponto crítico  $M$  é pequeno e podemos expandir  $G(M)$  como:

$$G(M) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4$$

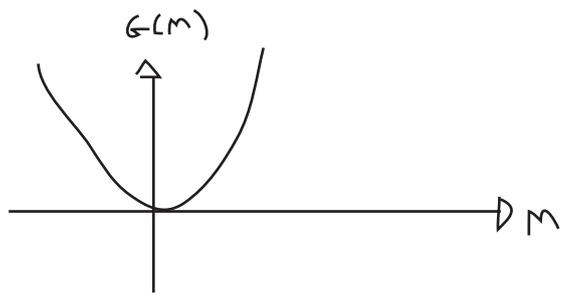
o sistema é simétrico por mudança no sinal de M, então G(M) tem que ser par

Para encontrar o estado do sistema em H = 0, devemos minimizar G:

$$H=0 \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial M} = 2B(T)M + 4C(T)M^3 = 0$$

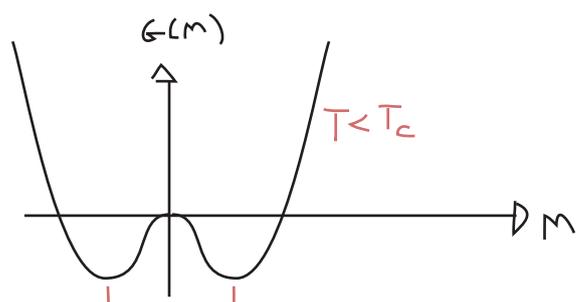
Resta fixar B e C, suponha que:

$$B, C > 0 \Rightarrow M = 0$$



No entanto se B puder ser negativo (digamos, abaixo de uma dada temperatura) então temos uma solução menos trivial:

$$\left. \begin{matrix} C > 0 \\ B(T < T_c) < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$



dois mínimos com magnetizações opostas

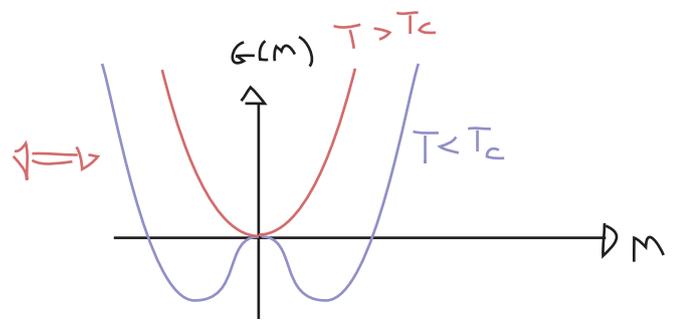
Fica claro que podemos modelar o sistema definindo:

$$B(T) = b(T - T_c) \quad C(T) = c \quad b, c > 0$$

Neste caso temos:

$$M = \begin{cases} 0 \\ \pm \left[ \frac{b}{2c} (T_c - T) \right]^{1/2} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} T > T_c \\ T < T_c \end{matrix}$$



Para obter o comportamento para H não nulo precisamos resolver

$$\frac{\partial G}{\partial M} \Big|_T = H \quad G = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4$$

ou podemos minimizar (em relação a M):  $G(M, H) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4 - HM$

Só temos o duplo mínimo para  $H = 0$  e  $T < T_c$ . Substituindo a definição de  $M$ , e as expressões para  $B(T)$  e  $C(T)$  na energia de Gibbs, obtemos a expressão que comparamos com o campo escalar:

$$G = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\nabla s)^2 + b(T - T_c) s^2 + c s^4 - H s \right] \quad H = H(x)$$

este termo adicional inclui a física microscópica, é o jeito mais simples de introduzir a tendência dos spins de se alinhar

Suponha que:  $H(x) = H_0 \delta^{(3)}(x)$  } Vamos ver qual é a resposta em pontos longe de  $x$ . Procurando o mínimo de  $G$  em relação a configurações do campo  $s$  obtemos:

$$0 = \delta G[S(x)] = -\nabla^2 s + 2b(T - T_c) s + 4c s^3 - H$$

$$T > T_c \Rightarrow \begin{cases} \chi \neq 0 \\ M \sim 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s < 1 \\ s^3 \sim 0 \end{cases} \Rightarrow (-\nabla^2 + 2b(T - T_c)) s(x) = H(x)$$

$$H(x) = H_0 \delta^{(3)}(x) \Rightarrow (-\nabla^2 + 2b(T - T_c)) D(x) = H_0 \delta^{(3)}(x)$$

Função de Green!

Configuração do campo  $s(x)$  que surge quando o spin em  $x = 0$  é forçado a se alinhar com  $H$

$$D(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{H_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{k}|^2 + 2b(T - T_c)} = \frac{H_0}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-r/\xi} = \langle S(x) S(0) \rangle$$

$\sum_{S(x)} S(x) S(0) e^{-\frac{H}{kT}}$

comprimento de correlação  $\rightarrow \xi = [2b(T - T_c)]^{-1/2}$

É importante perceber que, apesar do resultado depender dos coeficientes  $b$  e  $c$ , que são dados pela física no UV (física atômica), a lei de potência em  $(T - T_c)$  só depende de podermos expandir  $G$  em série, e da simetria que o torna par. De fato, obteríamos o mesmo resultado para qualquer sistema com esta simetria (existem vários exemplos). O fato de que podemos usar teoria de campos para descrever certas propriedades de sistemas de mecânica estatística perto do ponto crítico **independentemente de detalhes na escala atômica** (a chamada **universalidade**) está intimamente ligado ao fato de podermos construir TQCs **independentes de cut-off**.

Note que o valor de  $s(x)$  estará ligado ao valor em  $x=0$  dependendo de quão longe ele está de  $x = 0$ . A escala de "longe" é dada por  $\xi$ , note que este diverge quando chegamos perto da temperatura crítica - o sistema fica fortemente correlacionado. Voltando para nossa analogia com teoria quântica de campos, estamos falando de uma partícula escalar que carregaria a informação da existência da fonte em  $x = 0$ , e que a "massa" desta partícula ( $\xi^{-1}$ ) é da ordem de  $[b(T-T_c)]^{-1/2}$ . Se estivermos longe da temperatura crítica  $|T| \gg |T_c|$ , então o único parâmetro que determina a massa é  $B(T)$ , que vem da **escala ultravioleta da teoria**. O tamanho de  $m$  é então fixado pela única escala natural do sistema, portanto esperamos que  $m \sim \Lambda$  (que no exemplo seria o inverso do típico tamanho atômico).

No cálculos que fizemos até agora, estávamos interessados justamente no caso em que  $m \ll \Lambda$ , e ajustamos os parâmetros da teoria para obter esta situação. Com isso em mente, vamos ver como fica a separação de escalas na integral de trajetória.

$$Z = \int [D\phi]_{\Lambda} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\Delta_0}{4!} \phi^4 \right] \right\} \quad (\text{eq. 165.1})$$

$$[D\phi]_{\Lambda} \equiv \prod_{|k| < \Lambda} d\phi(k)$$

$$\phi(k) \begin{cases} \hat{\phi}(k) = \begin{cases} \phi(k) & |k| \leq \Lambda \\ 0 & |k| < \Lambda \text{ ou } |k| \geq \Lambda \end{cases} \\ \phi(k) = \begin{cases} \phi(k) & |k| < \Lambda \\ 0 & |k| \geq \Lambda \end{cases} \end{cases} \quad \Lambda < 1$$

$$\phi(k) \rightarrow \phi(k) + \hat{\phi}(k)$$

$$Z = \int D\phi \int D\hat{\phi} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi + \partial_\mu \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_0^2 (\phi + \hat{\phi})^2 + \frac{\Delta_0}{4!} (\phi + \hat{\phi})^4 \right] \right\} =$$

Todos os termos do tipo  $\phi(k_1) \hat{\phi}(k_2)$  são iguais a zero (ortogonalidade para  $k \neq k'$ )

$$= \int D\phi e^{-\int \mathcal{L}(\phi)} \int D\hat{\phi} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \hat{\phi}^2 + \lambda \left( \frac{1}{6} \phi^3 \hat{\phi} + \frac{1}{4} \phi^2 \hat{\phi}^2 + \frac{1}{6} \phi \hat{\phi}^3 + \frac{1}{4!} \hat{\phi}^4 \right) \right] \right\}$$

Queremos então integrar em  $\hat{\phi}$ , se tratarmos todos os termos (com exceção do cinético) como interações (incluindo o termo de massa), podemos escrevê-los como derivadas agindo em  $\text{Exp}[-\int \mathcal{L}_0(\hat{\phi})]$

Onde:

$$\int \mathcal{L}_0 = \int d^d x \partial_\nu \hat{\phi}(x) \partial^\nu \hat{\phi}(x) = \int d^d k \int_{|k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_{|k'| < \Lambda} \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} e^{-ikx} e^{-ik'x} i k_\nu k'^\nu \hat{\phi}(k) \hat{\phi}(k') =$$

$$= \int_{|k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k^2 \underbrace{\hat{\phi}(-k)}_{\hat{\phi}^*(k)} \hat{\phi}(k)$$

condição para que  $\phi(x)$  seja real, ver Peskin pg 285

Isso nos leva a um propagador (no espaço dos momentos):

$$\hat{\phi}(k) \hat{\phi}(p) = \frac{\int \mathcal{D}\hat{\phi} \hat{\phi}(k) \hat{\phi}(p) e^{-\int \mathcal{L}_0}}{\int \mathcal{D}\hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_0}} = \frac{1}{k^2} (2\pi)^d \delta(k+p) \Theta(k)$$

$\int_{|k| < \Lambda}$   
 $\int_0$  quer outro  $k$

Os outros termos da lagrangeana de  $\hat{\phi}$  são tratados como interações em teoria de perturbação. Tomemos como exemplo o termo  $\hat{\phi}^2$ :

$$\text{EXP} \left\{ - \int d^d x \lambda_0 \left( \frac{1}{4} \hat{\phi}^2 \right) \right\} \simeq - \int d^d x \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \hat{\phi} \hat{\phi}$$

Em princípio poderíamos calcular funções de dois pontos com quaisquer combinações de  $\phi$  e  $\hat{\phi}$ :

$$\langle \phi \phi e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \langle \hat{\phi} \hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \langle \phi \hat{\phi} \phi \hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \dots$$

Mas se considerarmos que momentos próximos ao cut-off só aparecerão em integrais de loop e nunca nas linhas externas dos diagramas, então os campos  $\hat{\phi}$  só aparecem em loops. Em termos do teorema de Wick temos:

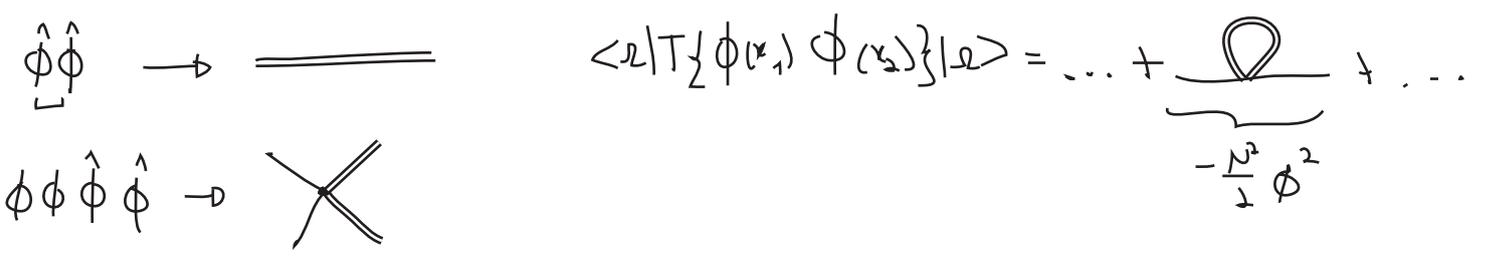
$$\left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[ - \int \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \hat{\phi} \hat{\phi} \right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[ - \int \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \underbrace{\hat{\phi} \hat{\phi}} \right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[ - \int \frac{\lambda_0}{2} \phi^2 \right] \right\rangle$$

↙ operador com n campos  $\phi$       ↘ estamos assumindo que os campos externos serão  $\phi$  e não  $\hat{\phi}$

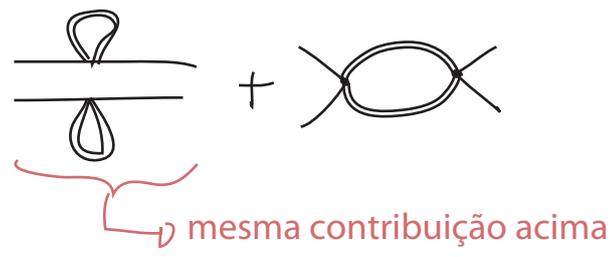
$$N = \frac{\lambda_0}{2} \int_{k-\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} = \frac{\lambda_0}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{1 - b^{d-2}}{d-2} \Lambda^{d-2}$$

O importante a ser notado aqui é que este termo também seria obtido de um termo  $-\frac{N}{2} \phi^2$  na lagrangeana

Para ver o que ocorre em ordens superiores, é útil definir diagramas:



Em ordem  $\lambda^2$  temos, para a função de 4 pontos:



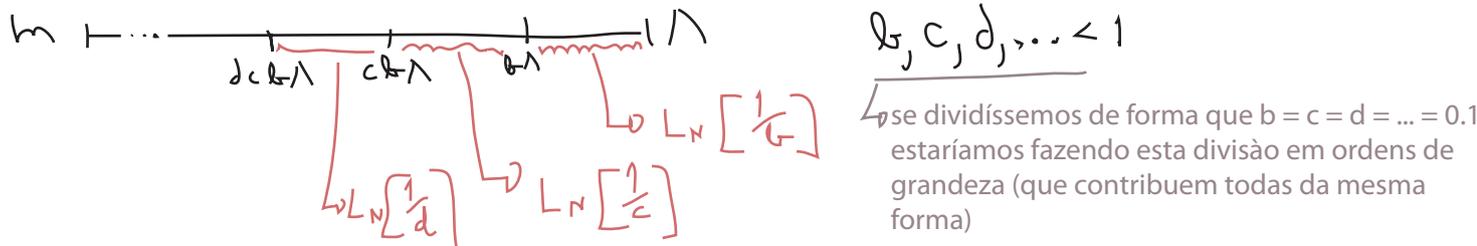
assumindo que o momento das pernas externas é muito pequeno comparado com  $b\Lambda$ , podemos ignorá-los e obter

$$L_0 = -\frac{1}{4!} \int d^d x \zeta \phi^4 \quad \leftarrow \text{equivale a} \quad \text{diagrama com ponto central} \quad -i\zeta$$

$$\zeta \equiv -4! \frac{2}{2!} \left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 \int_{k-\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{k^2}\right)^2 = \frac{-3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{(1 - b^{d-4})}{d-4} \Lambda^{d-4}$$

$$\stackrel{d \rightarrow 4}{=} -\frac{3\lambda^2}{16\pi^2} L_N \left[ \frac{1}{b} \right] \quad (\text{eq. 167.1})$$

Note que se fizéssemos mais subdivisões (multiplicativamente), cada intervalo teria uma contribuição similar:



Este procedimento gera contribuições não só a  $\phi^2$  e  $\phi^4$ , mas também a ordens superiores. O termo  $\phi^3 \hat{\phi}$  por exemplo:

$$\sim \frac{\lambda^2}{(p_1 + p_2 + p_3)^2} \oplus (p_1 + p_2 + p_3)$$

Obtemos acoplamentos com derivadas também. Para o diagrama abaixo por exemplo, desprezamos o momento das linhas extremas. Se ao invés disso fizermos uma expansão para o momento externo pequeno, o próximo termo seria:

$$= -\frac{1}{4!} \int d^d x \zeta \phi^4 - \frac{1}{4} \int d^d x \eta \phi^2 (\partial_\mu \phi)^2 + \dots$$

De forma geral obteremos todas as interações possíveis (de potências arbitrariamente altas) entre o campo  $\phi$  e suas derivadas. Temos diversas contribuições desconectadas que acabam sendo eliminadas pela normalização de qualquer correlator, então podemos finalmente escrever

$$Z = \frac{1}{N} \int \left[ \mathcal{D}\phi \right] e^{-\int d^d x \mathcal{L}_{EFF}}$$

$$\mathcal{L}_{EFF} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi^4 + \left( \text{contribuições conectadas de } \hat{\phi} \right) \quad (\text{eq. 168.1})$$

Este processo de excluir um campo das linhas externas da teoria fazendo seu momento (ou massa) muito grande comparado com as outras é chamado de "integrate out" o campo (não conheço uma tradução para o português melhor do que "integrar" o campo). Façamos então uma comparação entre a lagrangiana original e a que obtivemos após a integração

$$k' = \frac{k}{\Lambda} \quad \kappa' = \kappa \Lambda$$

$$0 < k < \Lambda \rightarrow 0 < |k'| < 1$$

$$\int d^d x \mathcal{L}_{EFF} = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (1 + \Delta z) (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m_0^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4!} (\lambda_0 + \Delta \lambda) \phi^4 + \Delta C (\partial_\mu \phi)^4 + \Delta D \phi^6 + \dots \right]$$

contribuições da "out-integration" de  $\hat{\phi}$

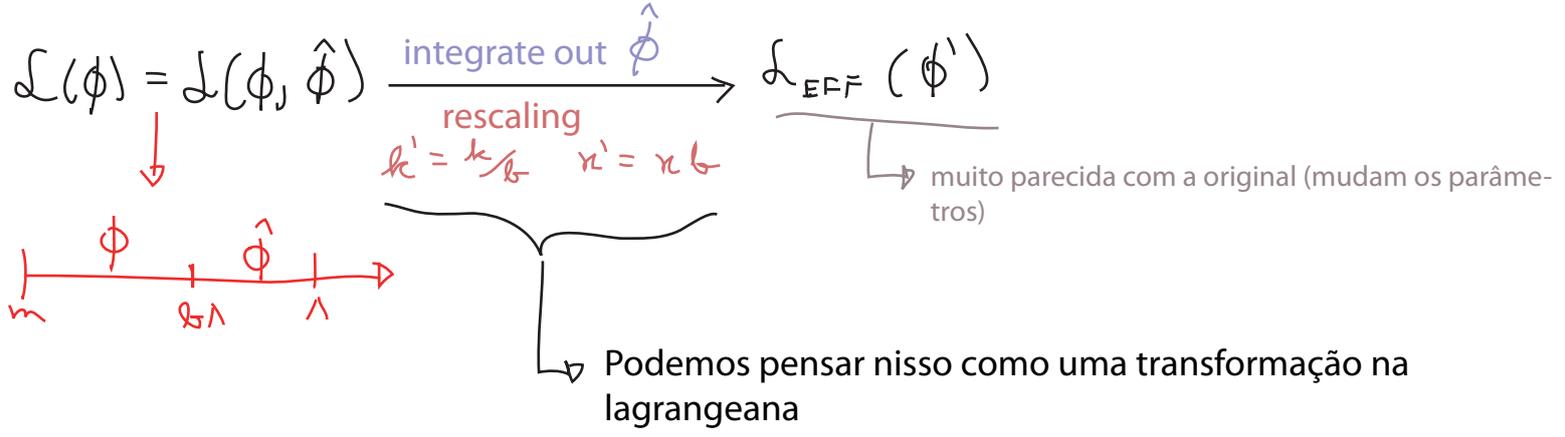
$$= \int d^d \kappa' \Lambda^{-d} \left[ \frac{1}{2} (1 + \Delta z) \kappa'^2 (\partial'_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m_0^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4!} (\lambda_0 + \Delta \lambda) \phi^4 + \Delta C \kappa'^4 (\partial'_\mu \phi)^4 + \dots \right]$$

Podemos voltar a uma forma muito parecida com a lagrangeana original fazendo as seguintes definições:

$$\begin{aligned}
 \phi' &= [b^{2-d} (1 + \Delta z)]^{1/2} \phi \\
 m'^2 &= (m_0^2 + \Delta m^2) (1 + \Delta z)^{-1} b^{-2} \\
 \lambda' &= (\lambda_0 + \Delta \lambda) (1 + \Delta z)^{-2} b^{d-4} \\
 c' &= (c_0 + \Delta c) (1 + \Delta z)^{-2} b^d \\
 \mathcal{D}' &= (\mathcal{D}_0 + \Delta \mathcal{D}) (1 + \Delta z)^{-3} b^{2d-6} \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{eq. 169.1}$$

$$\int d^d x \mathcal{L}_{EFF} = \int d^d x' \left[ \frac{1}{2} (\partial'_\mu \phi')^2 + \frac{1}{2} m'^2 \phi'^2 + \frac{1}{4} \lambda' \phi'^4 + c' (\partial'_\mu \phi')^4 + \mathcal{D}' \phi'^6 + \dots \right]$$

Pensando em todo o processo, o que fizemos foi:



Podemos, de fato, repetir o processo para uma nova "fatia" do espaço de momentos ( $cb\Lambda < |k| < b\Lambda$ ). Cada transformação sucessiva resulta em uma nova transformação dos coeficientes dos termos na lagrangeana (como em 169.1). Se fizermos todos os parâmetros desta transformação ( $b, c, \dots$ ) infinitesimalmente próximos de 1 (o que equivale a fazer as "fatias" tenderem a zero) temos uma transformação contínua. Neste caso vemos que podemos descrever o resultado de integrar sobre os graus de liberdade com momentos grandes como uma trajetória ou caminho (em inglês é comum usar "flow") sobre o espaço das possíveis lagrangeanas. O conjunto destas transformações é chamado de **Grupo de Renormalização (RG)** (embora não formem verdadeiramente um grupo, pois não são inversíveis).

Notem que temos então duas formas de atacar o mesmo problema. Suponha que estejamos interessados em um processo qualquer em que os momentos típicos (da partículas reais) sejam muito menores que uma escala qualquer  $\Lambda$  (usemos a teoria escalar para ilustrar):

**Método 1:**  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda_0 \phi^4}{4!}$

Calculamos a função de n-pontos

Surgem divergências assim que consideramos loops (porque é neles que entra a dinâmica de altas energias)

↓ Renormalização

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \text{contratermos}$$

$m^2 = m_0^2 \pm \delta m$   
 $\lambda = \lambda_0 \pm \delta \lambda$

as divergências aqui (nos  $\delta$ 's) nos forçam assumir que os parâmetros nús ( $m_0, \lambda_0$ ) eram infinitos, o que parece criar problemas para a série perturbativa

→ resultados finitos

Método 2:  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda_0 \phi^4}{4!}$

Diversas transformações sucessivas em que "integramos" os modos de alto momento, embutindo o seu efeito de volta na lagrangeana. Em cada passo temos só **integrais finitas** e os parâmetros da lagrangeana são também sempre assumidos pequenos.

$(m_0 \ll \Lambda)$        $(\lambda \text{ perturbativo})$

$m_0, \lambda_0$  finitos!

há de se tomar cuidado, pois  $\lambda$  vai mudando e por enquanto assumimos que ele nunca vai ficar forte o bastante para invalidar a teoria de perturbação.

$$\mathcal{L}_{\text{EFF}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda \phi^4}{4!} + \text{ todos os termos possíveis (de qualquer dim.)}$$

→ resultados finitos (o campo que sobra é zero para qualquer momento um pouco acima dos momentos externos considerados)

Os dois métodos devem nos fornecer os mesmos resultados, mas o segundo deixa diversas idéias mais claras. Para começar a teoria de perturbação é válida em qualquer ponto do cálculo, desde que a constante de acoplamento não evolua para valores grandes (o que de fato acontece em algumas teorias). Além disso fica claro que todas as grandezas vão depender da escala que estamos considerando (aquela que sobra no final, depois de integrarmos tudo acima dela).

Vejamos como a lagrangeana tende a variar sobre as transformações do grupo de renormalização. As lagrangeanas são definidas no espaço dos coeficientes de seus termos (que são operadores compostos dos campos), no caso escalar, por exemplo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + c (\partial_\mu \phi)^4 + \mathcal{D} \phi^6 + \dots$$

parâmetros que definem o espaço de lagrangeanas escalares

da forma que definimos as transformações do RG este termo fica sempre igual.

O ponto  $\{m^2, \lambda, C, D, \dots\} = \{0, 0, 0, 0, \dots\}$  é o que chamamos de **ponto fixo** para as transformações do RG, uma vez que nele temos apenas:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_N \phi)^2$$

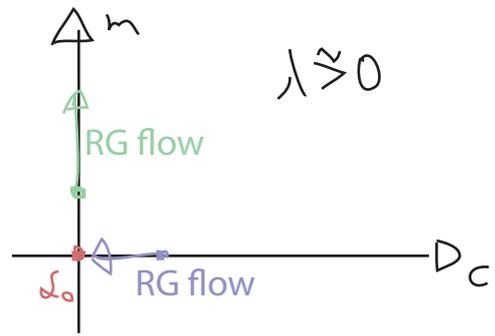
e portanto não há interações que vão corrigir os outros parâmetros e tirá-los de zero. Perto deste ponto podemos ignorar as correções superiores na perturbação e simplificar as transformações 169.1:

(eq. 169.1)

$$\left. \begin{aligned} b m'^2 &= (m_0^2 + \Delta m^2) (1 + \Delta z)^{-1} b^{-2} \\ \lambda' &= (\lambda_0 + \Delta \lambda) (1 + \Delta z)^{-2} b^{d-4} \\ C' &= (C + \Delta C) (1 + \Delta z)^{-2} b^d \\ D' &= (D + \Delta D) (1 + \Delta z)^{-3} b^{2d-6} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} m'^2 \approx m_0^2 b^{-2} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ \lambda' \approx \lambda_0 b^{d-4} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ C' \approx C b^d + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ D' \approx D b^{2d-6} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ \vdots \end{cases}$$

$\{m^2, \lambda, C, D, \dots\} \sim \{0, 0, 0, 0, \dots\}$

Como  $b < 1$ , os parâmetros com **potências negativas de b crescem**, e os com **potências positivas de b diminuem** quando aplicamos a transformação.



Os operadores cujos coeficientes crescem com as transformações sucessivas são chamados de **relevantes** e os que desaparecem são chamados de **irrelevantes**. Os operadores cuja potência em b é zero são chamados de **marginais**, e precisamos das correções perturbativas de ordem mais alta para saber se eles crescem ou decrescem.

no caso escalar:  $\phi^2$  é relevante sempre (independentemente do numero de dimensões)

$\phi^4$   $\begin{cases} d < 4 & \text{relevante} \\ d = 4 & \text{marginal} \\ d > 4 & \text{irrelevante} \end{cases}$

De uma forma geral, o coeficiente de um operador com N potências de  $\phi$  e M derivadas vai se transformar conforme (veja pg 168-169):

$$C'_{N,M} = \underbrace{b^{-d}}_{\text{scaling da integral}} \underbrace{b^{\left(\frac{d-2}{2}\right)N}}_{\text{scaling das derivadas}} \underbrace{b^M}_{\text{scaling das derivadas}} C_{N,M} = b^{N\left(\frac{d}{2}-1\right)+M-d} C_{N,M}$$

(eq. 171.1)

Note que a dimensão do operador é (veja pg 145):

$$Dim [C_{N,M}] = N \left( \frac{d-2}{2} \right) + M = d_{N,M}$$

↳ dimensão do campo escalar
↳ cada derivada aumenta a dimensão em 1

Como a lagrangeana deve ter dimensão d, a dimensão do coeficiente deste operador deve ter dimensão:

$$D_c = d - d_{N,M} = d - \left[ N \left( \frac{d-2}{2} \right) + M \right]$$

que é justamente o que aparece no expoente de b (com sinal trocado). Portanto operadores **relevantes** ( $D_c > 0$ ) equivalem a interações **super-renormalizáveis**, operadores **marginais** ( $D_c = 0$ ) equivalem a interações **renormalizáveis** e os **irrelevantes** ( $D_c < 0$ ) equivalem a interações **não-renormalizáveis**.

Uma outra forma de relacionar o comportamento dois coeficientes com a dimensão do operador consiste em pensar que o coeficiente é naturalmente da ordem de:

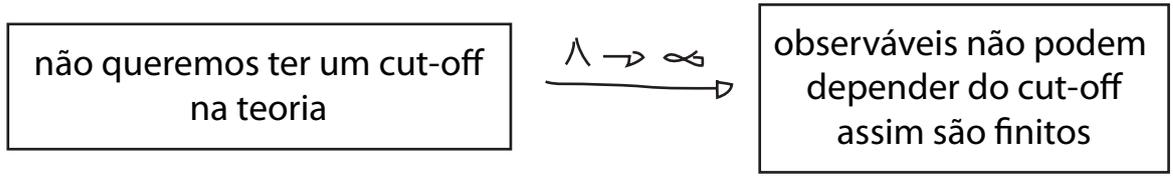
$$C_{COEF.} \sim (massa)^{d - d_{N,M}} \sim (\Lambda)^{d - d_{N,M}}$$

$$d < d_{N,M} \Rightarrow C_{COEF.} \sim \frac{1}{\Lambda^{|d - d_{N,M}|}} \left\{ \begin{array}{l} \text{irrelevante para momentos pequenos} \\ |p| \ll \Lambda \Rightarrow \left( \frac{|p|}{\Lambda} \right)^{d_{N,M} - d} \sim 0 \end{array} \right.$$

$$d > d_{N,M} \Rightarrow C_{COEF.} \sim \Lambda^{|d - d_{N,M}|} \quad \text{importante mesmo em pequenos momentos porque } \Lambda \text{ é grande}$$

Este é um resultado importante porque nos diz que, pelo menos em regiões próximas ao ponto fixo da lagrangeana livre, qualquer lagrangeana, não importa o quão complicada, acabará se tornando uma lagrangeana com um numero finito de interações renormalizáveis.

Isto muda um pouco nosso ponto de vista sobre teorias renormalizáveis, anteriormente seguimos o seguinte raciocínio:

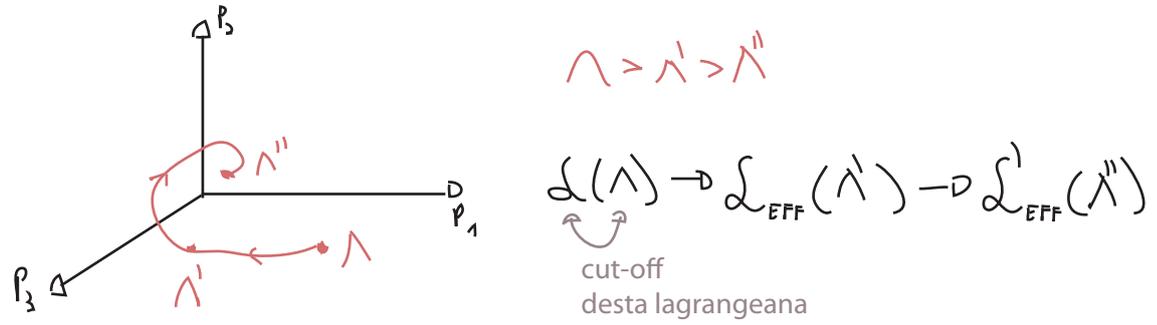


Só consigo uma teoria preditiva se não houver termos não-renormalizáveis

↳ Só teorias renormalizáveis são boas (é uma "sorte" que a QED o seja)

sorte no sentido que, nesta visão, não há motivo para uma teoria independente do cut-off ter sido realizada na natureza ↴

Agora temos uma outra perspectiva, suponha que qualquer teoria de campo tenha um cut-off - mesmo que não saibamos onde ele fica ou qual teoria começa ali (gravidade quântica?) - e que ele esteja bem acima do nosso alcance experimental. O que fazemos é usar as transformações do RG para "trazer" o cut-off para perto da escala em que estamos calculando o espalhamento, e incluímos os efeitos das altas energias na lagrangeana efetiva.



Se neste processo as interações não-renormalizáveis forem suprimidas, então as equações do RG nos dão **uma razão para que a QED seja renormalizável**: qualquer teoria com acoplamentos suficientemente fracos se comportará como uma teoria renormalizável em baixas energias.

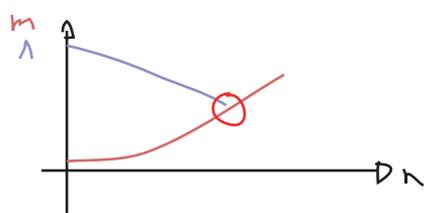
É claro que temos que tomar cuidado com os casos em que os acoplamentos crescem, ou que estamos um pouco mais longe do ponto fixo, vamos ver isso com um pouco mais de detalhe:

$\lambda \phi^4$   
 $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}_0$   
 $d > 4$

⇒ Apenas o termo de massa é relevante, começamos com  $m_0 \ll \Lambda_0$

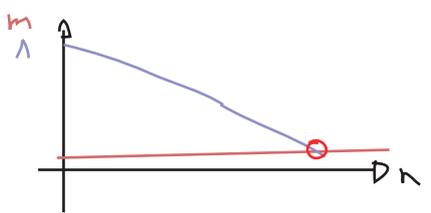
$$m_0^2 \xrightarrow{n \text{ integrações}} m'^2 = m_0^2 e^{-2n}$$

$$\Lambda_0 \longrightarrow \Lambda'$$



Em algum ponto  $m'^2 \sim \Lambda'^2$  e temos que parar aí. Exigir que  $m'$  seja uma massa "pequena" significa exigir que a massa:

(a) comece perto do ponto fixo da teoria livre e mude muito pouco com as transformações do RG, e somente o cut-off é que vai baixando;



ou: (b) se ela começar longe de  $\mathcal{L}_0$ , então ela flue para lá e então se comporta como em (a)

A situação (a) exige que a  $m$  passe extremamente perto do ponto fixo, e para conseguir (b) precisamos escolher o ponto onde começa a trajetória com muita precisão. Caso consigamos fazer isso, então a previsão é de que mesmo lagrangeanas com operadores altamente não lineares (longe de  $\mathcal{L}_0$ ) terão correlatores a baixas energias que se comportam como teorias praticamente livres de escalares leves. No caso de sistemas magnéticos (onde podemos de fato ajustar as "condições iniciais") este comportamento aparece em modelos com mais de 4 dimensões, perto da transição de fase de segunda ordem temos exatamente esta situação.

$\lambda\phi^4$   
 $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}_0$   
 $d = 4$

Neste caso temos que ficar atentos ao operador  $\phi^4$

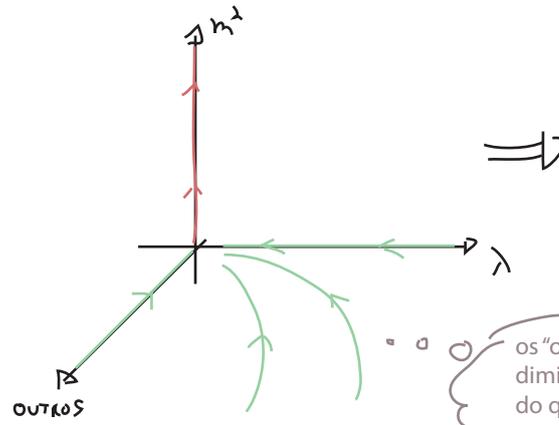
$$\lambda' = (\lambda + \Delta\lambda)(1 + \Delta z)^{-1} \mu^{d-4}$$

eq. 167.1

$\Delta z \sim \frac{\mu^2}{\Lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^2)$   
 só corrige a massa (veja pg 152, eq. 152.1)

$$\lambda' \approx \lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

$\rightarrow \lambda'$  diminui lentamente conforme "integramos"



$\Rightarrow$  isso quer dizer que  $\lambda\phi^4$  acaba sempre se tornando livre muito longe do cut-off (ou quando fazemos o cut-off ir para infinito). Esta é a trivialidade de  $\lambda\phi^4$  sem cut-off (é claro que a teoria continua útil se temos um cut-off)

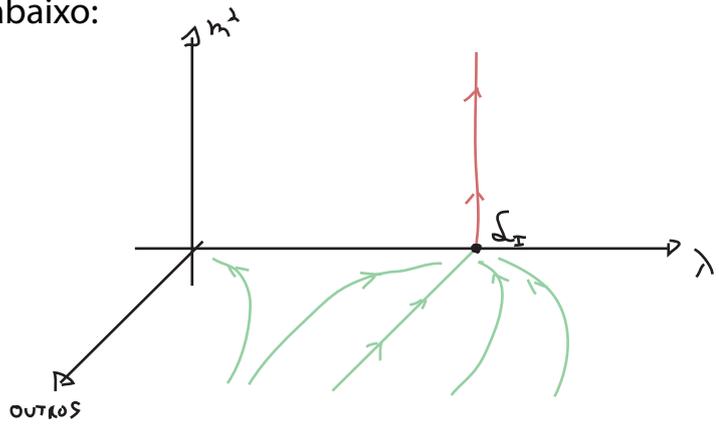
$\lambda\phi^4$   
 $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}_0$   
 $d < 4$

O operador  $\phi^4$  agora é relevante. Mesmo que comecemos perto da teoria livre o valor de  $\lambda$  vai fluir para valores maiores. Assim que nos afastamos da origem, temos que considerar as correções de ordem  $\lambda$  (da eq. 167.1). Para  $d < 4$  temos:

$$\lambda' = \left( \lambda - \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{(1 - \mu^{d-4})}{d-4} \mu^{d-4} \right) \mu^{d-4}$$

$\lambda' \sim \lambda \mu^{d-4}$

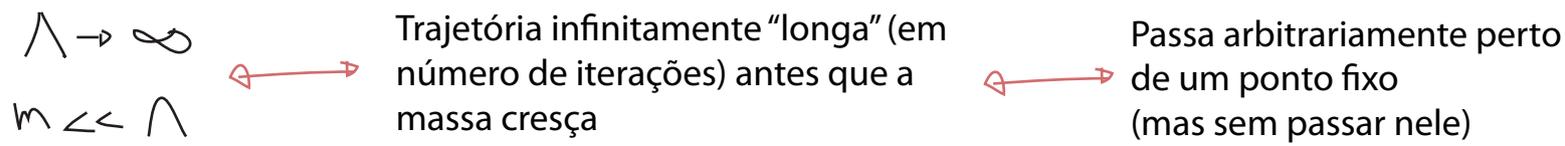
este sinal sugere que em algum ponto o crescimento causado pelo scaling vai ser cancelado pela contribuição do termo não-linear, neste ponto  $\lambda$  pára de mudar - há um segundo ponto fixo. Este ponto se funde como o ponto da lagrangeana livre se fazemos  $d \rightarrow 4$ , e os dois vão ter a mesma propriedade em relação ao crescimento da massa. Então, perto de  $d = 4$  temos o diagrama abaixo:



## A equação de Callan-Symanzik

(Peskin 12.2, Ryder 9.4)

Embora o tratamento que fizemos para o campo escalar seja bastante claro do ponto de vista físico ele pode se tornar bastante difícil tecnicamente se formos tratar teorias mais complicadas do que o campo escalar (sabemos, por exemplo, que a QED tem problemas com regularização por cut-off). Vamos então tentar achar formas mais gerais de encontrar as equações que estabelecem o fluxo dos parâmetros da lagrangeana. Para isso voltaremos ao formalismo das teorias renormalizadas (em que fizemos  $\Lambda \rightarrow \infty$  e inserimos os contratermos)



Perto do ponto fixo, cada iteração a mais move a massa muito pouco, mas vai desaparecendo com todos os operadores irrelevantes. Acabamos com uma teoria que só tem operadores relevantes (os termos originais + contratermos) mas com coeficientes que foram corrigidos uma infinidade de vezes (os  $\delta$ 's são divergentes). Fica claro que as lagrangeanas que estão nestas trajetórias são um subconjunto de todas as lagrangeanas possíveis.

- toda informação sobre o fluxo dos coeficientes irrelevantes foi jogado fora
- ainda podemos estudar os relevantes e marginais, mas não em função de  $\Lambda$  e  $b\Lambda$

Neste caso usamos as **condições de renormalização** que são definidas em uma **escala de renormalização** (na pg 148, por exemplo, esta escala foi escolhida como  $p^2 = 0$ ). Vendo como os coeficientes dependem desta escala  $\mu$ , podemos recuperar a informação do fluxo.

Começemos com uma teoria escalar sem massa (o termo  $m^2$  renormalizado é exatamente zero). As condições da página 148 não servem mais (o  $\delta\lambda$  obtido destas condições, por exemplo, tem singularidades para  $m^2 = 0$ , veja pgs 149/150). Usaremos então uma escala arbitrária  $M$ :

$p^2 = -M^2$

$= -i\lambda$

$(p_1 + p_2)^2 = (p_1 + p_3)^2 = (p_1 + p_4)^2 = -M^2$

ficando na região  $p^2 < 0$  temos uma análise análoga ao que faríamos no espaço euclidiano, onde tudo é mais simples. O comportamento para  $p^2 > 0$  é mais complicado pois temos que tomar cuidado com singularidades advindas de estados ligados e ramificações

Com estas novas condições:

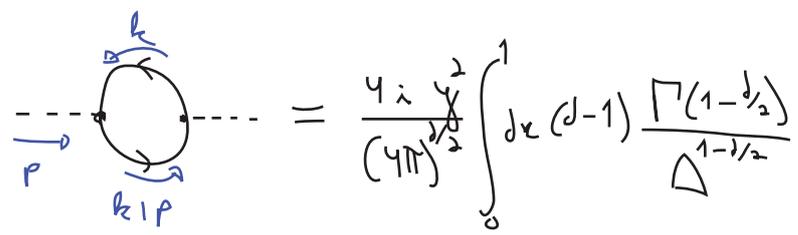
$$\langle \Omega | \phi(p) \phi(-p) | \Omega \rangle = \frac{i}{p^2} \quad / \quad p^2 = -m^2$$

$$\phi = Z^{-1/2} \phi_0$$

$$\hookrightarrow \langle \Omega | \phi_0(p) \phi_0(-p) | \Omega \rangle = \frac{iZ}{p^2} \quad / \quad p^2 = -m^2$$

(Z não é mais o resíduo do polo da função de dois pontos)

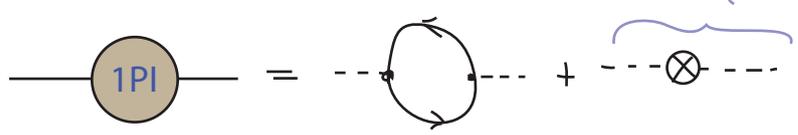
Para ver o efeito destas condições, considere que a teoria tem uma interação de Yukawa, das pgs. 152/153 temos:



$$= \frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (d-1) \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Delta^{1-d/2}}$$

$\Delta = m^2 - x(1-x)p^2$

$$m_p^2 = 0 \Rightarrow \Delta \propto p^2$$



$$= \frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 \frac{dx}{[-x(1-x)p^2]^{1-d/2}} (d-1) \Gamma(1-d/2) - (p^2 \delta Z - \delta m)$$

$$\underbrace{\frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^{d/2}} \left[ \frac{2}{\epsilon} - 2 - \gamma - \text{LN}(-p^2) + \text{LN}(4\pi) \right]}_{d \sim 2} \int_0^1 \frac{dx}{[x(1-x)]^{1-d/2}}$$

↳ a parte que diverge não depende de  $p^2$  portanto será cancelada por algo equivalente em  $\delta m$ .

$$d \sim 4 \Rightarrow \frac{12i\gamma^2}{(4\pi)^2} \left[ -p^2 \left( \frac{1}{2-\frac{d}{2}} + \text{Loc}(\pi\pi) - \gamma + 1 - \text{LN}(-p^2) \right) \right] \int_0^1 \frac{dx}{x(x-1)}$$

↳ não contribui para  $\delta m$ , apenas para  $\delta z$ .

$$\rightarrow -p^2 \left( \frac{1}{2-\frac{d}{2}} + \text{LN} \left( \frac{1}{-p^2} \right) + C \right)$$

Se fizermos esta regularização por cut-off, as contribuições para  $\delta z$  e  $\delta m$ , se misturam e não fica tão fácil ver que a massa não sai de zero, por isso continuaremos usando reg. dimensional. No entanto, para deixar claro o papel do cut-off, faremos a troca:

$$-\rho^2 \left( \frac{1}{2-d/2} + \text{LN} \left( \frac{1}{-\rho^2} \right) + C \right) \xrightarrow{\text{EQ.}} -\rho^2 \left( \text{LN} \left( \frac{\Lambda^2}{-\rho^2} \right) + C \right)$$

se comportam da mesma forma são diferentes, mas não nos importam

O mesmo seria válido para  $\lambda\phi^4$ , mas teríamos que ir até dois loops para ver a primeira correção em  $\delta Z$ . Essa separação nos permite esquecer totalmente da massa e analisar o acoplamento e nos diz que (como só temos polos em  $d = 4$ ) as divergências de  $\delta Z$  (e  $\delta\lambda$ ) serão logarítmicas.

Note que poderíamos ter escolhido outra escala de renormalização,  $M'$  para a mesma teoria. As funções de Green da teoria dependem apenas de  $m_0, \lambda_0$  e  $\Lambda$ .  $M$  só aparece quando fazemos a troca:

$$\left. \begin{matrix} \lambda_0 \\ \phi_0 \\ \Lambda \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \phi \\ M \end{matrix} \right.$$

$$\underbrace{\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle}_{G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)} = Z^{-n/2} \underbrace{\langle \Omega | T \{ \phi_0(x_1) \phi_0(x_2) \dots \phi_0(x_n) \} | \Omega \rangle}_{G_0^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

O que acontece se fizermos uma pequena mudança em  $M$ ?

$$\begin{aligned} M &\rightarrow M + \delta M \\ \lambda &\rightarrow \lambda + \delta \lambda \\ \phi &\rightarrow \underbrace{(1 + \delta \eta)}_{Z^{-\gamma_2}} \phi \end{aligned}$$

Na função de Green só importa a mudança em  $Z$  (já que  $G_0$  só depende dos parâmetros nús):

$$\begin{aligned} Z^{-1/2} &\rightarrow (1 + \delta \eta) Z^{-\gamma_2} \rightarrow Z^{-n/2} \rightarrow (1 + \delta \eta)^n Z^{-n/2} \sim (1 + n \delta \eta) Z^{-n/2} \\ G^{(n)} &\rightarrow (1 + n \delta \eta) G^{(n)} \end{aligned}$$

Pensando em  $G$  como uma função de  $M$  e  $\lambda$ , esta transformação é dada por:

$$dG^{(n)} = \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} \delta \lambda = n \delta \eta G^{(n)}$$

(eq. 177.1)

Definindo os parâmetros adimensionais:

$$\beta \equiv \frac{M}{\delta M} \delta \lambda \quad \text{Função beta} \quad (\text{eq. 178.1})$$

$$\gamma \equiv -\frac{M}{\delta M} \delta \eta \quad \text{Função gama} \quad (\text{eq. 178.2})$$

Temos:

$$\left( \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} \delta \lambda - n \delta \eta G^{(n)} = 0 \right) \times \frac{M}{\delta M}$$

$$M \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} + \underbrace{\frac{M}{\delta M} \delta \lambda}_{\beta} \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} - n \underbrace{\frac{M}{\delta M} \delta \eta}_{-\gamma} G^{(n)} = 0$$

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + n \gamma \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; M, \lambda) = 0$$

Pensemos sobre  $\beta$  e  $\gamma$ :

→ são os mesmo para qualquer n  
 → são adimensionais, e não há qualquer outro parâmetro com dimensão de massa  
 $\beta(x, M, \lambda) \Rightarrow \beta = \beta(\lambda) \quad \gamma = \gamma(\lambda)$

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + n \gamma(\lambda) \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; M, \lambda) = 0$$

Equação de Callan- Symanzik (eq. 178.3)

$\beta(\lambda) \leftrightarrow$  ligada a mudança na constante de acoplamento

$\gamma(\lambda) \leftrightarrow$  ligada a mudança no campo (field strength)

Esta equação nos diz que a mudança em M será sempre acompanhada e compensada pelas outras duas.

Podemos generalizar o argumento acima para outras teorias renormalizáveis (com acoplamentos adimensionais). Haverá uma função g para cada campo e uma função b para cada acoplamento. No caso da QED (sem massa,  $m_e = 0$ ) (n é o número de elétrons e m o de fótons):

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(e) \frac{\partial}{\partial e} + n \gamma_2(e) + m \gamma_3(e) \right] G^{(n, m)}(x_1, \dots, x_{n+m}; M, e) = 0 \quad (\text{eq. 178.4})$$

### Calculando as funções $\beta$ e $\gamma$

Mais uma vez, fiquemos na teoria  $\lambda\phi^4$  sem massa. Como estas funções não dependem de qual função de Green usamos na equação de Callan-Symanzik (CS), podemos escolher as mais simples:

$$G^{(2)}(p) = \text{---}^{\lambda^0} + \underbrace{\text{---}^{\lambda^1} \text{---}^{\lambda^1}}_{\text{sabemos que daqui só saem contribuições para } \delta m} + \text{---}^{\lambda^1} \text{---}^{\lambda^1} \otimes + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

Como o cálculo de dois loops é trabalhoso, acaba sendo mais simples usar a função de 4 pontos. No entanto podemos obter alguma informação sobre  $\gamma$  daqui: como não há correções a  $G^{(2)}$  em ordem  $\lambda$ , só introduzimos a dependência em  $M$  e  $\lambda$  em  $G^{(2)}$  em ordem  $\lambda^2$ . Assim a equação de CS para  $G^{(2)}$  fica:

$$\left[ M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + 2\gamma(\lambda) \right] G^{(2)}(p) = 0$$

$\mathcal{O}(\lambda) \Rightarrow \circ$        $\mathcal{O}(\lambda) \Rightarrow \circ$        $\gamma(\lambda) = 0 + \mathcal{O}(\lambda^2)$

Passando então para a função de 4 pontos, temos:

$$G^4 = \text{---}^{\lambda^1} \text{---}^{\lambda^1} + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} \otimes + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} \otimes + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$\left[ M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + 4\gamma(\lambda) \right] G^4(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0$$

Já calculamos esta função de Green (na verdade a versão amputada dela, pgs 149-150):

$$G^4 = \left[ -i\lambda + (-i\lambda)^2 \left[ \underbrace{iV(s) + iV(t) + iV(u)}_{\text{definido na eq. 149.3}} \right] - i\delta_\lambda \right] \cdot \prod_{i=1}^4 \underbrace{\frac{i}{p_i^2}}_{\substack{\text{propagadores da pernas} \\ \text{externas} \\ \text{(que tem correções } \sim \lambda^2 \text{)}}}$$

Nossa condição de renormalização agora exige que as correções a  $\lambda$  se cancelem em:

$$s = t = u = -M^2$$

O que nos dá um contratermo:



De uma forma mais geral (qualquer teoria escalar renormalizável sem massa), teremos sempre:

$$G^{(2)}(p) = \text{---} + \underbrace{(\text{LEAD. LOOP})}_{\text{contribuição não-nula com o menor número de loops}} + \text{---} \otimes \text{---} + \dots$$

$$= \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} \left[ -i p^2 A \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right) + \text{termos finitos} \right] \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} (i p^2 \delta z) \frac{i}{p^2} + \dots$$

$$\frac{dG^{(2)}}{dM} = -\frac{i}{p^2} \frac{d}{dM} \delta z$$

→ depende da teoria

$$A \sim \mathcal{O}(\lambda^n) \left\{ \begin{array}{l} G \sim \underline{1} + \mathcal{O}(\lambda^n) \\ \frac{dG}{d\lambda} \sim \mathcal{O}(\lambda^{n-1}) \end{array} \right.$$

$$\left[ M \frac{d}{dM} G^{(2)} + \underbrace{\beta(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda)} \frac{d}{d\lambda} G^{(2)} + \underbrace{2\gamma(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda)} G^{(2)} \right] = 0$$

$\mathcal{O}(\lambda) \quad \mathcal{O}(\lambda^{n-1}) \quad \mathcal{O}(\lambda) \quad 1 + \mathcal{O}(\lambda^n)$

$n > 1 \Rightarrow$  A contribuição do termo envolvendo  $\beta$  vai ser sempre menor que a que envolve  $\gamma$

$$-\frac{i}{p^2} M \frac{d}{dM} \delta z + 2\gamma(\lambda) \frac{i}{p^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta z} \quad (\text{eq. 181.1})$$

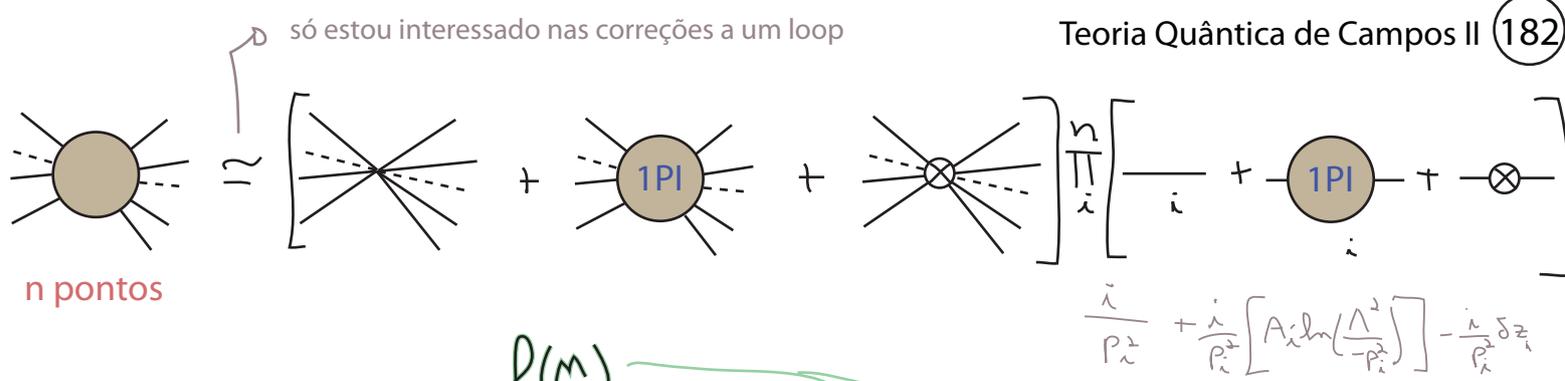
Se lembrarmos que  $\delta z$  tem que cancelar a divergência dos loops em alguma escala  $-p^2 = M$ , concluímos que:

$$\left\{ \frac{i}{p^2} \left[ A \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right) \right] + \frac{i}{p^2} (i p^2 \delta z) \frac{i}{p^2} \right\}_{p^2 = -M^2} = 0$$

$$\delta z = A \ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} M \cdot A \cdot \left(-\frac{2}{M}\right) = \underline{-A}$$

coeficiente do logaritmo divergente que contribuí para  $\delta z$  (o mesmo ocorre na QED ou Yukawa)

Podemos obter algo análogo para a função  $\beta$ . Pensemos numa teoria com um acoplamento  $g$  de um vértice com  $n$  linhas, a função de  $n$  pontos será dada por:



$G^{(n)}$

$$G^{(n)} \approx \left( \prod_i \frac{i}{P_i^2} \right) \left[ -i\gamma - i\beta \ln \left[ \frac{\Lambda^2}{-P^2} \right] - i\delta\gamma - i\gamma \sum_i^n \left( A_i \ln \left( \frac{\Lambda^2}{-P_i^2} \right) - \delta z_i \right) \right]$$

algum invariante do tipo das variáveis de Mandelstam estamos assumindo que as condições de renorm. são para todas as variáveis deste tipo  $\sim -M^2$

$$\left[ M \frac{d}{dM} + \beta(\gamma) \frac{d}{d\gamma} + n \delta(\gamma) \right] G^{(n)}(P) = 0$$

$n \delta(\gamma) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta z_i$

$$\left( \prod_i \frac{i}{P_i^2} \right) \left\{ M \frac{d}{dM} \left( -i\delta\gamma + i\gamma \sum_i^n \delta z_i \right) + \beta(\gamma) \frac{dG^{(n)}}{d\gamma} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta z_i G^{(n)} \right\} = 0$$

$[-i + \mathcal{O}(\gamma^2)]$        $-i\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2)$

Não sabemos, a priori, em que ordem de  $\gamma$  temos a primeira contribuição a  $\delta\gamma$  ou  $\delta z_i$ , mas para que  $\beta$  possa cancelar estas contribuições ele tem que começar a receber contribuições na mesma ordem em que  $\delta\gamma$  ou  $\gamma \delta z_i$  e, em L.O., podemos ignorar estes termos

$$M \frac{d}{dM} \left( -i\delta\gamma + i\gamma \sum_i^n \delta z_i \right) - i\beta(\gamma) - i\gamma \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta z_i = 0$$

$$\beta(\gamma) = M \frac{d}{dM} \left( -\delta\gamma + \frac{1}{2} \gamma \sum_i^n \delta z_i \right)$$

(eq. 182.1)

Mais uma vez as condições de renormalização nos dizem quem são  $\delta\gamma$  e  $\delta z$

$$\delta\gamma = -\beta \ln \left( \frac{\Lambda^2}{M^2} \right) + \dots$$

as partes finitas independem de M

$$\beta(g) = -2\beta - g \sum_i A_i \quad (\text{eq. 183.1})$$

Um fato importante a ser notado é que, como não estamos interessados na parte finita (de fato somente no coeficiente da divergência) - não precisamos ser muito cuidadosos ao especificar as condições de normalização, basta fazer qualquer invariante (que fixa a escala dos logaritmos) igual a  $-M^2$ . É claro que isso só vale em L.O.

Argumentos semelhantes se aplicam para teorias mais complicadas. No caso da QED temos (gauge de Feynman):

$$\gamma_2(e) = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta_2 \quad (\text{eq. 183.2})$$

$$\gamma_3(e) = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta_3 \quad (\text{eq. 183.3})$$



$$\beta(e) = M \frac{d}{dM} \left( -e\delta_1 + e\delta_2 + \frac{e}{2}\delta_3 \right) \quad (\text{eq. 183.3})$$



Se modificarmos os  $\delta$ 's calculados nas páginas 156 a 158 para férmions sem massa e para a condição de renormalização em  $-M^2$ , temos:

$$\delta_1 = \delta_2 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2 - \frac{d}{2}}} + \dots \sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2} L_N \left( \frac{\Lambda^2}{M^2} \right)$$

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2 - \frac{d}{2}}} + \dots \sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} L_N \left( \frac{\Lambda^2}{M^2} \right)$$

De forma que:

$$\gamma_2(e) = \frac{1}{2} M \left[ -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \left( -\frac{2}{M} \right) \right] = \frac{e^2}{(4\pi)^2}$$

$$\gamma_3(e) = \frac{e^2}{12\pi^2}$$

$$\beta(e) = M \frac{e}{2} \left[ -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \left( -\frac{2}{M} \right) \right] \frac{4}{3} = \frac{e^3}{12\pi^2}$$

Importante: a sutileza aqui é que escolhemos um gauge específico, então algumas destas funções mudam se mudarmos o gauge, outras não.  $\delta_2$ , por exemplo, não é invariante de gauge,  $\delta_3$  e  $\beta$  são.

O significado de  $\gamma$  e  $\beta$

Vamos tentar entender a e b, escrevendo-os em termos dos parâmetros da lagrangeana nua:

$$\lambda\phi^\gamma: \quad \phi(p) = Z(m)^{-1/2} \phi_0(p)$$

$$m \rightarrow m + \delta m \Rightarrow \phi \rightarrow \phi + \delta\eta \phi$$

$$\phi' = (1 + \delta\eta)\phi \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi' = Z(m + \delta m)^{-1/2} \phi_0 \\ \phi = Z(m)^{-1/2} \phi_0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \delta\eta = \frac{\phi'}{\phi} = \frac{Z(m + \delta m)^{-1/2} \phi_0}{Z(m)^{-1/2} \phi_0}$$

$$\delta\eta = \frac{Z(m + \delta m)^{-1/2}}{Z(m)^{-1/2}} - 1$$

Da definição de  $g$  (eq 178.2) temos:

$$\gamma = -\frac{m}{\delta m} \delta\eta = -\frac{m}{\delta m} \left( \frac{Z(m + \delta m)^{-1/2}}{Z(m)^{-1/2}} - 1 \right) = -\frac{m}{Z^{-1/2}} \left( \frac{Z(m + \delta m)^{-1/2} - Z^{-1/2}(m)}{\delta m} \right) = \frac{1}{2} \frac{m}{Z^{-1/2}} Z^{-3/2} \frac{dZ}{dm}$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{m}{Z} \frac{dZ}{dm}$$

$$\sim \frac{1}{2} m (1 - \delta_Z + O(\delta_Z^2)) \frac{d\delta_Z}{dm}$$

que reproduz o resultado em L.O. de 181.1

↳ mostra a ligação entre  $\gamma$  e a mudança de  $Z$

No caso de  $\beta$ , nossa definição original já era suficientemente clara (eq 178.1):

$$\beta = \frac{m}{\delta m} \delta\lambda \quad \left\{ \begin{array}{l} m \rightarrow m + \delta m \\ \lambda(m + \delta m) = \lambda(m) + \delta\lambda \end{array} \right.$$

$$\beta = m \frac{d}{dm} \lambda(m)$$

(eq. 184.2)

, o que mostra que  $\beta$  nos fala como o acoplamento muda com esta escala que escolhemos para a cond. de renorm. Veremos em seguida que podemos interpretar isso como a mudança (o *running*) do acoplamento com a escala de energia do evento

### Solução da equação de Callan-Symanzik

(Peskin 12.3)

Para estudar as implicações da equação CS, vamos resolvê-la para uma função de dois pontos de uma teoria com um único campo escalar (sem massa)

$$\text{Dim} [G^{(2)}] = \text{Dim} \left[ \frac{1}{p^2} \right] = -2 \quad \therefore \quad G^{(2)} \equiv \frac{i}{p^2} g \left( -\frac{p^2}{M^2} \right) = -\frac{i}{k^2} g \left( \frac{k^2}{M^2} \right)$$

$$k \equiv \sqrt{-p^2} \quad \circ \quad k^2 = -p^2 > 0$$

↳ número (e não um quadrivetor)

$\text{Dim}[g] = 0$

$$\kappa \equiv \frac{k}{M} \Rightarrow \frac{d}{dM} f(x) = \frac{dx}{dM} \frac{d}{dx} f(x) = -\frac{k}{M^2} \frac{dk}{dx} \frac{d}{dk} f(x) = -\frac{k}{M} \frac{d}{dk} f(x)$$

$$M \frac{d}{dM} G^{(2)} = -M \frac{i}{k^2} \left( \frac{d}{dM} g \right) = -\frac{i}{k^2} \left( -k \frac{d}{dk} g \right) = -k \left[ -\frac{i}{k^2} \frac{d}{dk} g \right]$$

$$\frac{d}{dk} \left( -\frac{i}{k^2} g \right) = -\frac{2i}{k^3} g - \frac{i}{k^2} \frac{d}{dk} g$$

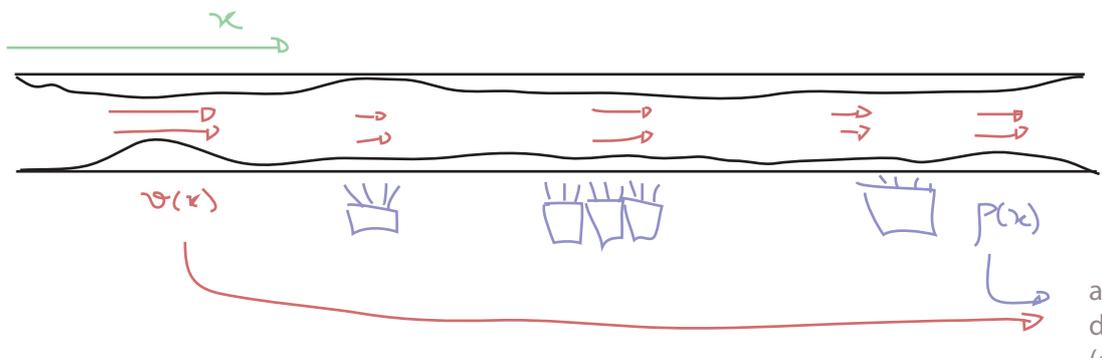
$$M \frac{d}{dM} G^{(2)} = -k \left[ \frac{d}{dk} \left( -\frac{i}{k^2} g \right) - \frac{2i}{k^3} g \right] = -k \left[ \frac{d}{dk} G^{(2)} + \frac{2}{k} G^{(2)} \right] = \left[ -k \frac{d}{dk} - 2 \right] G^{(2)}$$

$$\text{CS: } \left[ M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + 2\gamma(\lambda) \right] G^{(2)} = 0$$

$$\boxed{\left[ k \frac{d}{dk} + 2 - \beta \frac{d}{d\lambda} - 2\gamma \right] G^{(2)} = 0} \quad (\text{eq. 185.1})$$

Teoria livre:  $\beta = \gamma = 0 \quad k \frac{d}{dk} G^{(2)} = -2G^{(2)} \Rightarrow G^{(2)} = -\frac{i}{k^2}$

Para vislumbrar como podemos resolver um caso mais geral, vamos pensar em bactérias (!!!). Imagine um tubo estreito por onde corre um fluido com velocidade  $v(x)$  ( $x$  é a coordenada ao longo do comprimento do tubo). O tubo está infectado por bactérias, cuja população é dada pela densidade  $D(t,x)$  e cuja taxa de crescimento é  $\rho(x)$



as bactérias são arrastadas

$$\frac{\partial}{\partial t} D(t, x) = -v(x) \frac{\partial}{\partial x} D(t, x) + \underbrace{P(x) D(t, x)}_{\text{crescimento}}$$

$$\hookrightarrow \left[ \frac{\partial}{\partial t} + v(x) \frac{\partial}{\partial x} - P(x) \right] D(t, x) = 0$$

Esta é exatamente a equação que temos fazendo: (eq. 185.1)

$$\left[ k \frac{d}{dk} + 2 - \beta \frac{d}{d\lambda} - 2\gamma \right] G^{(2)} = 0$$

- $\text{Log}\left(\frac{k}{M}\right) \leftrightarrow t$
- $dt \leftrightarrow \frac{1}{k} dk$
- $\frac{d}{dt} \leftrightarrow k \frac{d}{dk}$
- $\lambda \leftrightarrow v(x)$
- $-\beta(\lambda) \leftrightarrow P(x)$
- $2\gamma(\lambda) - 2 \leftrightarrow P(x)$
- $G^{(2)}(k, \lambda) \leftrightarrow D(t, x)$

Suponha que conheçamos:  $D(t=0, x) = D_i(x)$

Para saber a densidade bacteriana de um elemento de fluido em  $(t_1 > 0, x_1)$  temos que olhar a história dele. Sabemos onde ele estava em  $t = 0$  integrando sobre o seu movimento passado. Podemos pensar neste elemento fluindo para trás no tempo e definir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{x}(t; x_1) = -v(\bar{x})$$

↪ elemento de fluido indo na direção errada (-v)

$$\bar{x}(0; x_1) = x_1 \quad \rightarrow \text{este começa em } x_1$$

$$\bar{x}(t_1; x_1) \quad \rightarrow \text{posição dele em } t = 0$$

Portanto a densidade bacteriana inicial dele era:  $D_i(\bar{x}(t_1, x_1))$

E a densidade em  $(t_1, x_1)$  será:

$$D(t_1, x_1) = D_i(\bar{x}(t_1; x_1)) \cdot \text{Exp} \left[ \int_0^{t_1} dt' P(\bar{x}(t'; x_1)) \right]$$

No referencial deste elemento a velocidade é zero e só o que as bactérias notam é que a iluminação muda com o tempo:  
 $\frac{dD(t)}{dt} = P(t) D(t) \Rightarrow D(t) = D_i e^{\int_0^t P(t') dt'}$

posição dele em  $t = t'$

$$\left\{ \begin{aligned} dt' &= -\frac{1}{v(\bar{x}')} d\bar{x}' & \bar{x}(t') &= \bar{x}' \\ \bar{x}(0, x_1) &= x_1 & \bar{x}(t_1, x_1) &= \bar{x} \end{aligned} \right.$$

$$D(t_1, x_1) = D_i(\bar{x}(t_1; x_1)) \cdot \text{Exp} \left[ \int_{\bar{x}}^{x_1} d\bar{x}' \frac{P(\bar{x}')}{v(\bar{x}')} \right]$$

notação

Voltando a mundo menos infeccioso dos campos, podemos usar esta solução fazendo as substituições adequadas

$$\left. \begin{aligned} L_N(\frac{k}{M}) &\leftrightarrow t \\ \lambda &\leftrightarrow x \\ G^{(2)}(k, \lambda) &\leftrightarrow P(t, x) \\ -\beta(\lambda) &\leftrightarrow v(x) \\ 2\gamma(\lambda) - 2 &\leftrightarrow P(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} t=0 &\leftrightarrow k=M \\ D_i(x) &\leftrightarrow \hat{G}_i^{(2)}(\lambda) \end{aligned} \right.$$

$$G^{(2)}(k, \lambda) = \hat{G}_i^{(2)}(\bar{\lambda}(k; \lambda)) \text{Exp} \left\{ \int_{k'=M}^{k'=k} d[L_N(\frac{k'}{M})] \cdot \left[ 2 \delta[\bar{\lambda}(k'; \lambda)] - 2 \right] \right\}$$

redefino  $\hat{G}_i^{(2)} \frac{M^2}{k^2} \equiv -i \frac{\hat{G}_i^{(2)}}{k^2}$

$\text{Exp} \left[ -2 \int_M^k d[L_N(\frac{k'}{M})] \right] = \frac{M^2}{k^2}$

(eq. 187.1)

$$G^{(2)}(k, \lambda) = -\frac{i}{k^2} \hat{G}_i^{(2)}(\bar{\lambda}(k; \lambda)) \text{Exp} \left\{ 2 \int_{k'=M}^{k'=k} d[L_N(\frac{k'}{M})] \delta[\bar{\lambda}(k'; \lambda)] \right\}$$

(eq. 187.2)

Onde:

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) \iff \frac{d}{d\left[L_N\left(\frac{k}{M}\right)\right]} \bar{\lambda}(k; \lambda) = \beta(\bar{\lambda}(k; \lambda))$$

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t; x_1) = -v(\bar{x})$$

$$\bar{x}(0; x_1) = x_1$$

$$\bar{\lambda}(M; \lambda) = \lambda$$

$\bar{x}(t; x_1) \Rightarrow$  descrevia a posição de elemento de fluido em t unidades de tempo atrás baseado em um ponto de referência  $x_1$  em que ele está "agora" (usamos  $t = 0$  para agora e  $t = t_1$  para o início, mas de fato quaisquer dois tempos poderiam ser usados)

$\bar{\lambda}(k; \lambda) \Rightarrow$  Vai descrever o valor de uma constante de acoplamento modificada: que muda quando mudamos k (a intensidade do momento) a partir de um ponto de referência (que foi tomado como  $k = M$ ). Note que a taxa de mudança é dada pela função  $\beta$

$\Rightarrow$  Isto é um parâmetro da função, apenas nos diz quanto ela vale no ponto de referência

$\bar{\lambda}(k) \Rightarrow$  "running coupling constant"

A única forma que temos de determinar a função desconhecida  $G_i$  é obtendo a função  $G(2)$  em alguma ordem de perturbação e expandir o lado direito de 187.2 no mesmo parâmetro. Por exemplo, em  $\lambda\phi^4$

$$G^{(2)}(k_2 = M, \lambda) = -\frac{i}{M^2} + \mathcal{O}(\lambda^2) \Rightarrow G_i^{(2)}(\bar{\lambda}(k=M; \lambda)) = G_i^{(2)}(\lambda) = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

(estamos supondo que podemos expandir em  $\bar{\lambda}$ )  $\therefore \hookrightarrow G_i^{(2)}(\bar{\lambda}) = 1 + \mathcal{O}(\bar{\lambda}^2)$

Também podemos usar este procedimento para a função de quatro pontos. Calculemos esta função num regime cinemático bem específico:

$$G^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) \rightarrow p_i^2 = -P^2 > 0 \quad (\text{os quatro momentos são spacelike})$$

$$p_i \cdot p_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

Neste caso temos uma única grandeza dimensional relevante  $P^2$  e podemos escrever  $G^{(4)}$  na forma:

$$G^{(4)}(P) = \left(\frac{\lambda}{P^2}\right)^4 g\left(\frac{P^2}{M^2}\right) \Rightarrow \text{podemos de novo fazer a troca } \frac{d}{dM} \rightarrow \frac{d}{dP}$$

$\text{Dim}[G^{(4)}] = -8 \quad \text{Dim} = -8 \quad \text{Dim} = 0$

$$\left[ p \frac{\partial}{\partial p} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + 8 - \gamma(\lambda) \right] G^{(4)}(p, \lambda) = 0$$

Lembrando das bactérias:

$$G^{(4)}(p, \lambda) = \left( \frac{\lambda}{p^2} \right)^4 G_i^{(4)}(\bar{\lambda}(p; \lambda)) \text{Exp} \left\{ 4 \int_M^p d \left[ L_N \left( \frac{p'}{M} \right) \right] r[\bar{\lambda}(p'; \lambda)] \right\}$$

(eq. 189.1)

De novo a função "inicial" é fixada por:

$$G^{(4)}(p, \lambda) = -\lambda \lambda \left( \frac{\lambda}{p^2} \right)^4 + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

~~X~~ + ...

$$G_i^{(4)}(\bar{\lambda}(p=M; \lambda)) = G_i^{(4)}(\lambda^{(M)}) = -\lambda \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$\hookrightarrow G_i^{(4)}(\bar{\lambda}) = -\lambda \bar{\lambda} + \mathcal{O}(\bar{\lambda}^2)$$

(eq. 189.2)

Agora podemos ver as consequências da eq. CS. Qualquer função de Green, quando expandida perturbativamente, vai ter a forma:

$$G \sim \bar{\lambda}^n \left( L_N \left( -\frac{p^2}{M^2} \right) \right)^m$$

Para que a perturbação faça sentido precisamos que  $\lambda$  seja pequeno, mas também temos que evitar que

$$\left| \frac{p^2}{M^2} \right| \gg 1$$

As soluções que encontramos organizam a dependência nestes dois parâmetros ( $\lambda$  e o logaritmo de  $p$ ) em uma função do acoplamento ( $G_i$ ) e uma exponencial que leva em conta a "distância" para o ponto de referência  $M$ . Quando esta "distância" é zero (estamos fazendo um espalhamento com momento da ordem da escala  $M$ ) vemos que  $G_i^{(n)} = G^{(n)}$ , mas se nos afastamos deste regime o que as soluções 187.2 e 189.1 nos dizem é que devemos substituir  $\lambda$  por um acoplamento mais apropriado para aquela escala:  $\bar{\lambda}$ , o que reforça a idéia de que este novo acoplamento é justamente o acoplamento efetivo que obtivemos quando pensando no grupo de renormalização. Esta identificação fica bem clara na equação 189.2 - já que a função de quatro pontos será diretamente proporcional a  $\bar{\lambda}$ .

O fator exponencial dá conta de acumular todos os re-scalings do campo entre M e a escala de momento k (ou P). Cada mudança destas vira um fator que multiplica a função e Green e em cada escala levamos em conta o acoplamento correto para a escala. O número que multiplica a integral é o número de linhas externas (2 no caso de 187.2 e 4 para 189.1), como era de se esperar.

Para verificar estas afirmações, vamos obter  $\bar{\lambda}$  no caso da teoria  $\lambda\phi^4$

(180.1)  $\Rightarrow \beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$        $\bar{\lambda}(k; \lambda) = ?$

$$\frac{d}{d[\ln(\frac{k}{M})]} \bar{\lambda} = \beta(\bar{\lambda}) \rightarrow \frac{d}{d[\ln(\frac{k}{M})]} \bar{\lambda} = \frac{3\bar{\lambda}^2}{(4\pi)^2}$$

$\bar{\lambda}(M; \lambda) = \lambda$

$$\frac{1}{\lambda^2} d\bar{\lambda} = \frac{3}{(4\pi)^2} d[\ln(\frac{k}{M})]$$

$$-\frac{1}{\lambda} + C = \frac{3}{(4\pi)^2} \ln\left(\frac{k}{M}\right)$$

$C = \frac{1}{\lambda}$

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}} = \frac{3}{(4\pi)^2} \ln\left(\frac{k}{M}\right)$$

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \frac{\lambda}{1 - \frac{3\lambda}{(4\pi)^2} \ln\left(\frac{k}{M}\right)}$$

(eq. 190.1)

Note que, expandindo em  $\lambda$ :

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \lambda + \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} \ln\left(\frac{k}{M}\right) + \mathcal{O}(\lambda^3) = \lambda - \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} \ln\left(\frac{1}{k}\right) + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$k = k M$

que é exatamente o que obtivemos na pg 174 usando o fluxo do grupo de renormalização. Temos também o fato que para k muito pequeno o denominador fica enorme e o acoplamento desaparece, o que confirma nossa expectativa de que função  $\beta$  positiva significa uma teoria com acoplamento fraco para baixos momentos.

Levando a frente a expansão em l, temos:

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \lambda + C \lambda^2 \ln\left(\frac{k}{M}\right) + C^2 \lambda^3 \ln^2\left(\frac{k}{M}\right) + \dots$$

$$C = \frac{3}{(4\pi)^2}$$

Ou seja, teremos termos do tipo:

$$\lambda^{n+1} L_N^n \left( \frac{k}{M} \right)$$

O que nos mostra que a expansão perturbativa vai ter problemas para  $k$  muito longe de  $M$ . Para o caso em que o acoplamento efetivo é pequeno (caso contrário a expansão perturbativa realmente falha) equação de CS nos dá um meio de evitar este problema, já que a expressão 190.1 representa a soma de todos estes logaritmos e sua inclusão direto na contante de acoplamento.

### Aplicação para QED

Vamos pensar na QED a curtíssimas distâncias (altos momentos para o fóton) quando podemos ignorar massa do elétron. Se seguirmos a mesma lógica que usamos para deduzir as equações de CS (pgs 177 e 178), podemos obter uma equação análoga para o potencial elétrico. Como o potencial entre cargas estáticas é observável sua normalização é fixada e portanto não temos a função  $\gamma$  (como tínhamos nas funções de Green). Podemos então escrever a seguinte equação de Callan-Symanzik (para a transformada de Fourier do potencial):

$$\left[ M \frac{d}{dM} + \beta(e_r) \frac{d}{de_r} \right] V(q; M, e_r) = 0$$

Dim = -2

↳ podemos fazer o mesmo que na pág. 185 e trocar a derivada em  $M$  por derivadas em  $q$

$$\left[ q \frac{d}{dq} - \beta(e_r) \frac{d}{de_r} + 2 \right] V(q; M, e_r) = 0$$

Lembrando que:

(eq. 185.1)  $\Rightarrow \left[ k \frac{d}{dk} + 2 - \beta \frac{d}{d\lambda} - 2\gamma \right] G^{(2)} = 0$

$$G^{(2)}(k, \lambda) = -\frac{i}{k^2} G_i^{(2)}(\bar{\lambda}(k; \lambda)) E \times r \left\{ \int_{k'=M}^{k'=k} d \left[ L_N \left( \frac{k'}{M} \right) \right] \right\} \Phi[\bar{\lambda}(k'; \lambda)] \quad (\text{eq. 187.2})$$

$$V(q; M, e_r) = \frac{1}{q^2} V_i(\bar{e}(q; e_r))$$

(eq. 191.1)

↳  $\bar{e}(q; e_r) \Rightarrow \frac{d}{d \left[ \text{Log} \left( \frac{q}{M} \right) \right]} \bar{e}(q; e_r) = \beta(\bar{e})$

$$\bar{e}(M; e_r) = e_r$$

Sabemos que, em primeira ordem:

$$V(\varphi) \approx \frac{e^2}{\varphi^2} \iff V_i(\varphi) = \bar{e}^2 + \mathcal{O}(\bar{e}^4)$$

$$\therefore V(\varphi, e_R) = \frac{\bar{e}^2(\varphi; e_R)}{\varphi^2}$$

Usando a função  $\beta$  da QED (pg. 183),  $\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}$ , temos:

$$\frac{d}{d[\text{Log}(\varphi/m)]} \bar{e}(\varphi; e_R) = \frac{\bar{e}^3}{12\pi^2} \implies \frac{1}{\bar{e}^3} d\bar{e} = \frac{1}{12\pi^2} d[\text{Log}(\varphi/m)]$$

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{\bar{e}^2} = \frac{\text{Log}(\varphi/m)}{12\pi^2} + C \xrightarrow{\bar{e}(\varphi; e_R) = e_R} C = -\frac{6\pi^2}{e_R^2}$$

$$6\pi^2 \left( \frac{1}{e_R^2} - \frac{1}{\bar{e}^2} \right) = \text{Log}(\varphi/m)$$

$$\bar{e}^2(\varphi) = \frac{e_R^2}{1 - \left( \frac{e_R^2}{6\pi^2} \right) \text{Log}(\varphi/m)} \quad (\text{eq. 192.1})$$

O que é muito similar à expressão obtida no fim da página 136, e fica idêntica se escolhermos  $M$  da ordem da massa do elétron  $M^2 = A m^2$ ,  $e_r = e$  e  $A = e^{(5/3)}$ .

### Evolução (*running*) das Constantes de Acoplamento

De uma forma bem geral, a evolução das constantes de acoplamento de teorias renormalizáveis no limite de massa zero será dado por:

$$\bar{\lambda}(\rho) \implies \frac{d}{d[\text{Log}(\varphi/m)]} \bar{\lambda} = \beta(\bar{\lambda})$$

Na região perturbativa, temos basicamente três comportamentos possíveis:

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \beta(\lambda) > 0 & & \beta(\lambda) < 0 \end{array}$$

$\beta(\lambda) = 0$

$$\beta(\lambda) > 0$$

$$p \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda \rightarrow 0$$

↳ teoria preditiva a baixas energias (ou grandes distâncias)

Teoria fica não perturbativa para curtas distâncias, altos momentos.

$$\beta(\lambda) = 0$$

⇒ A constante de acoplamento efetiva é, de fato, constante (não depende do momento). A constante renormalizada é igual a nua e portanto os únicos infinitos possíveis na teoria estão em contribuição para a *field strength* ( $Z$ ), que somem de qualquer elemento de matriz  $S$ . São chamadas de **QFTs finitas**.

$$\beta(\lambda) < 0$$

⇒ Suponha que o sinal da função  $\beta$  da QED fosse invertido:

$$\beta = -\frac{1}{2} C e^3 \Rightarrow \bar{e}^2(p) = \frac{e^2}{1 + C e^2 L_n(p/m)}$$

$$p \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{e}^2 \rightarrow 0 \quad \text{Liberdade assintótica!}$$

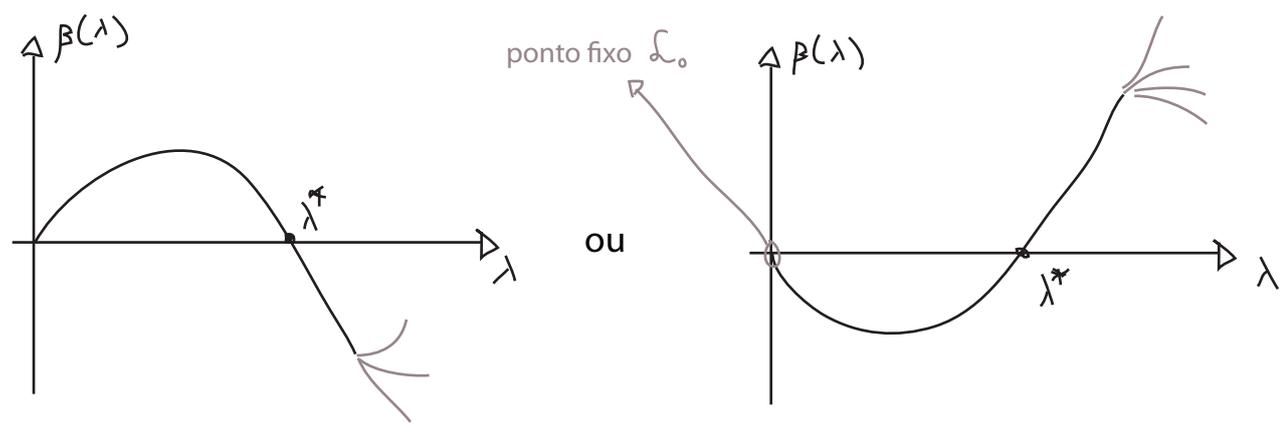
↳ teoria preditiva a altas energias (ou curtas distâncias)

Todas as divergências que aparecem para momentos grandes de alguma forma se somam para dar um resultado inócuo, a teoria é bem comportada para energias arbitrariamente grandes.

Fica não perturbativa para grandes distâncias, pequenos momentos.

Os resultados acima indicam que tanto para  $\beta$  positivo quando negativo, temos uma escala finita em que os acoplamentos divergem. Mas antes de chegar nesta divergência o acoplamento fica grande demais para que a expansão perturbativa faça sentido. O que acontece se sairmos da região perturbativa? Neste caso não temos como calcular a função  $\beta$ , mas as equações do grupo de renorm. continuam valendo e podemos usá-las para uma discussão qualitativa.

Conforme nos aproximamos desta região de acoplamento forte temos que levar em conta mais termos na expansão de  $\beta$ , estes termos podem ter todos o mesmo sinal inicial, mas suponha que a contribuição deles seja de sinal oposto. Neste caso poderíamos obter funções  $\beta$  da seguinte forma:

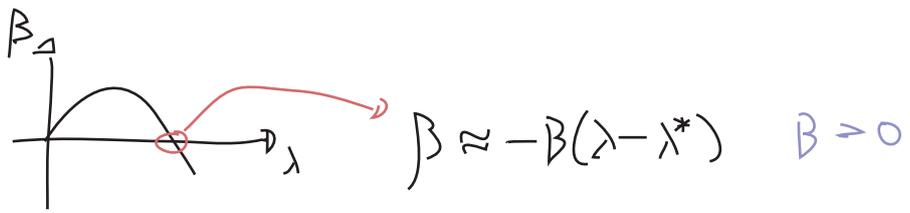


Quando  $\bar{\lambda}$  chega perto deste ponto  $\lambda^*$ ,  $\beta$  vai para zero e a constante de acoplamento para de evoluir. Temos um novo ponto fixo, e:

$$p \rightarrow \infty \quad \bar{\lambda} \rightarrow \lambda^*$$

teorias com ponto fixo no ultravioleta ou infravermelho  
(infrared stable e ultraviolet stable fixed points)

Perto deste ponto fixo (assumindo o caso  $\beta(\lambda \sim 0) > 0$ , com região não perturbativa no UV):



$$\frac{d}{d[\text{Log}(p/M)]} \bar{\lambda} \approx -\beta(\bar{\lambda} - \lambda^*) \Rightarrow \bar{\lambda}(p) = \lambda_* + C \left(\frac{M}{p}\right)^\beta$$

$$\frac{1}{(\bar{\lambda} - \lambda^*)} d\bar{\lambda} = -\beta d[\text{Log}(p/M)]$$

$$\text{Log}(\bar{\lambda} - \lambda^*) = -\beta \text{Log}\left(\frac{p}{M}\right) + C$$

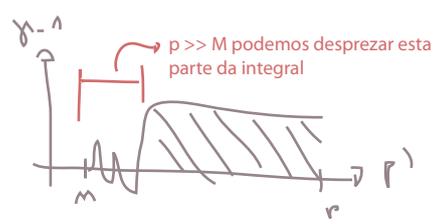
$$\bar{\lambda} - \lambda^* = C' \left(\frac{p}{M}\right)^{-\beta}$$

$p \rightarrow \infty$   
 $\bar{\lambda} \rightarrow \lambda_*$  } e a velocidade é determinada pela inclinação local de  $\beta$

Vejamos o que acontece com a função de 2 pontos de um campo escalar neste caso. De 187.1 temos:

$$G^{(2)}(p, \lambda) = \hat{G}_i^{(2)}(\bar{\lambda}(p; \lambda)) \text{Exp} \left\{ 2 \int_{p'=M}^{p'=p} d[\text{Ln}\left(\frac{p'}{M}\right)] \cdot \left[ \gamma[\bar{\lambda}(p'; \lambda)] - 1 \right] \right\}$$

para p grande a integral será dominada por  $\bar{\lambda} \sim \lambda^*$



$$G^{(2)}(p \rightarrow \infty, \lambda) \approx \hat{G}_i^{(2)}(\lambda^*) \text{Exp} \left\{ 2 \text{Ln}\left(\frac{p}{M}\right) [\gamma(\lambda^*) - 1] \right\} \approx C \left(\frac{1}{p^2}\right)^{1-\gamma(\lambda^*)}$$

Perto deste ponto fixo a função de dois pontos volta a se comportar como uma simples potência de  $p^2$ , só que é a **potência errada** (do ponto de vista de análise dimensional). Chamamos  $\gamma(\lambda^*)$  de **dimensão anômala** do campo (de fato a função  $\gamma$  acabou "pegando" este nome mesmo quando não há ponto fixo na teoria)

## Renormalização de operadores locais

Suponha que queiramos obter o comportamento de um operador local obtido como o produto de dois ou mais campos conforme renormalizamos a teoria.

$\mathcal{O}(x) \equiv$  operador composto de campos escalares

Da mesma forma que fizemos para o campo, podemos definir um processo de renormalização para este operador, re-escrevendo a Lagrangeana de forma a obter um contra termo:

$$\int_0 \mathcal{O}(x)$$

que garante o operador renormalizado  $\mathcal{O}_M \equiv Z_{\mathcal{O}}^{-1}(M) \mathcal{O}_0$  satisfaça as condições de normalização em uma escala  $M$ . A função de green em que estamos interessados é:

$$G^{(n;1)}(p_1, \dots, p_n; k) = \langle \phi(p_1) \dots \phi(p_n) \hat{\mathcal{O}}_M(k) \rangle$$

Escrevendo-a em função dos campos nós, temos:

$$G^{(n;1)}(p_1, \dots, p_n; k) = Z(M)^{-n/2} Z_{\mathcal{O}}(M)^{-1} \langle \phi_0(p_1) \dots \phi_0(p_n) \mathcal{O}_0(k) \rangle$$

Repetindo a dedução da equação de CS, temos:

$$\left[ M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) \right] G^{(n;1)} = 0 \quad (\text{eq. 195.1})$$

$$\gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) = M \frac{d}{dM} \ln[Z_{\mathcal{O}}(M)]$$

Em muitas teorias temos mais de um operador com os mesmos números quânticos e a mesma dimensão, e neste caso podemos ter misturas entre estes operadores (as correções quânticas de um deles vai gerar contribuições aos outros). Por exemplo:

$$\mathcal{O}^1 = \bar{\psi} [\gamma^{\mu} \mathcal{D}^{\nu} + \gamma^{\nu} \mathcal{D}^{\mu}] \psi$$

$$\mathcal{O}^2 = F^{\mu\lambda} F^{\nu}_{\lambda}$$

Neste caso temos que definir um conjunto de operadores  $\{\mathcal{O}^i\}$  de forma que:

$$\mathcal{O}_0^i \equiv Z_{\mathcal{O}}^i(m) \mathcal{O}_m^i$$

o que também transforma a dimensão anômala  $\gamma$  em uma matriz:

$$\gamma_{\mathcal{O}}^{ij} = [Z_{\mathcal{O}}^{-1}(m)]^{ik} m \frac{d}{dm} [Z_{\mathcal{O}}(m)]^{kj}$$

Para obter uma expressão para  $\gamma$ , calculemos a função de green com m campos escalares e o operador:

$$G^{(m;1)} = \langle \phi(p_1) \dots \phi(p_m) \mathcal{O}_m(k) \rangle$$

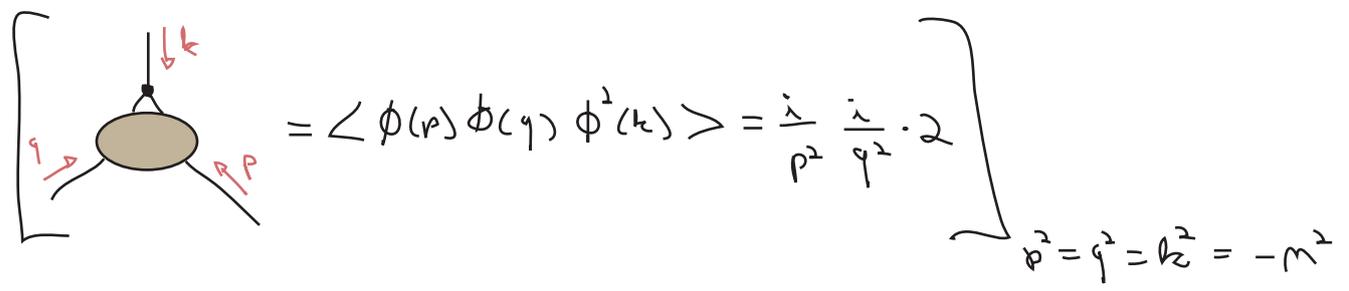


Usando a mesma lógica das páginas 181 a 183, se esta função de Green obedece as equações de CS (eq 195.1), então:

$$\gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) = m \frac{d}{dm} \left( -\delta_{\mathcal{O}} + \frac{m}{2} \delta_z \right) \quad (\text{eq. 196.1})$$

↑ número de linhas externas escalares

Um exemplo seria analisar o operador  $\phi^2$ , para evitar confusão entre a massa introduzida por este operador e a massa do campo escalar (que está sendo renormalizada para zero) vamos olhar uma função de green onde este operador carrega um momento diferente de zero, e definir sua normalização por:



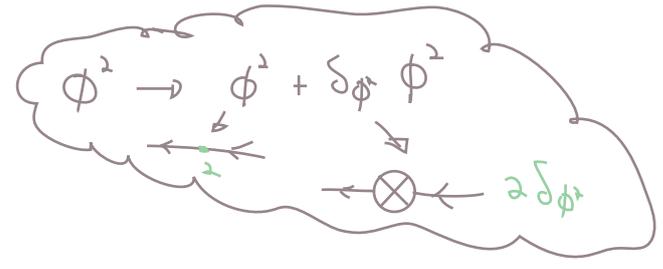
A primeiro loop a contribuir para esta função de Green é (de novo, estamos falando de  $\lambda\phi^4$ ):

$$\left[ \dots = \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} (-i\lambda) \frac{i}{\ell^2} \frac{i}{(k+\ell)^2} = \dots \right]$$

$$= \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} \left[ -\frac{\lambda}{4\pi^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \right]$$

$$\Delta = \Delta(p, q, k) \rightarrow \Delta(p^2=q^2=k^2=-M^2) = M^2$$

Em  $-M^2$  este loop deve ser cancelado por:



$$\text{loop with cross} = \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} 2\delta\phi^2$$

$$\delta\phi^2 = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-\frac{d}{2}}} \quad (\text{eq. 197.1})$$

$$\sim \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\epsilon} - \text{Log}(M^2) + \dots \right)$$

Como em  $\lambda\phi^4$  não temos contribuição de ordem  $\lambda$  para  $\delta z$ , então:

$$\gamma_{\phi^2} = M \frac{d}{dM} (-\delta\phi^2) = M \frac{-\lambda}{2(4\pi)^2} \left( -\frac{2}{M} \right) \Rightarrow$$

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{16\pi^2} \quad (\text{eq. 197.2})$$

### Evolução dos parâmetros de massa

(Peskin 12.5)

Podemos usar a evolução de operadores acima para estudar a evolução da massa na teoria. Para tanto introduziremos a massa como uma pequena perturbação na teoria sem massa, esta aproximação é boa desde que a massa física seja comparável aos momentos típicos (fica ruim para momentos menores que a massa).

$\mathcal{L}_m \leftarrow$  lagrangeana sem massas, renormalizada na escala M

$$\downarrow$$

$$\mathcal{L}_m + \frac{1}{2} m^2 \phi_m^2$$

$$G^{(n)} = G^{(n;0)} + m^2 G^{(n;1)} + (m^2)^2 G^{(n;2)} + \dots + (m^2)^l G^{(n;l)}$$

A generalização de 195.1 para várias inserções do operador é bastante óbvia:

$$\left[ m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \gamma_{\phi^2}(\lambda) \right] G^{(n;l)} = 0 \quad (\text{eq. 197.1})$$

Se escrevemos:  $G^{(n)} = \sum_l (m^2)^l G^{(n;l)}$

Então:  $m^2 \frac{d}{dm^2} G^{(n)} = \sum_i l(m^2)^i G^{(n); i}$

de forma que a seguinte equação garante 197.1 para cada ordem de  $m^2$ :

$$\left[ m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \gamma_\rho m^2 \frac{d}{dm^2} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, m) = 0 \quad (\text{eq. 198.1})$$

Este argumento vale para qualquer operador que eu adicione perturbativamente, e:

$$\mathcal{L}(C_i) = \mathcal{L}_m + \sum_i C_i \mathcal{O}_m^i(x)$$

$$\left[ m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \sum_i \gamma_i(\lambda) C_i \frac{d}{dC_i} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, \{C_i\}) = 0 \quad (\text{eq. 198.2})$$

Podemos escrever isso de forma mais conveniente:

$$\begin{aligned} d_i &\equiv \text{Dim}[\mathcal{O}^i] \\ \downarrow \\ C_i &\equiv p_i M^{4-d_i} \\ \hookrightarrow \text{Dim}[p_i] &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(P_i) = \mathcal{L}_m + \sum_i P_i M^{4-d_i} \mathcal{O}_m^i(x)$$

estamos introduzindo uma dependência em M  
esta nova dependência é compensada por  $p_i$

Com isso 198.2 fica:

$$\left[ m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \sum_i (\gamma_i(\lambda) + d_i - 4) P_i \frac{d}{dP_i} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, \{P_i\}) = 0$$

$G^{(n)}$

... +  $\underbrace{\text{PC}(M)}_{\text{diagrama}} + \dots + \frac{P_i M^{4-d_i}}{\lambda} + \dots$

$M \frac{d}{dM} \left( \frac{P_i}{\lambda} \right) \sim (1-d_i) M^{4-d_i} P_i$

$(d_i-4) P_i \frac{d}{dP_i} \left( \frac{P_i}{\lambda} \right) \sim (d_i-4) M^{4-d_i} P_i$

cancelamento

$$\beta_i \equiv (d_i - \gamma + \delta_i) \rho_i$$

$$\left[ m \frac{d}{dm} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \delta(\lambda) + \sum_i \beta_i \frac{d}{d\rho_i} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, \{\rho_i\}) = 0 \quad (\text{eq. 198.3})$$

Perceba que agora todos os acoplamentos (adimensionais)  $\rho_i$ , aparecem com a mesma forma de  $\lambda$ . Podemos voltar às nossas bactérias para resolver o problema, só que agora elas fluem num espaço multidimensional com velocidades  $\beta$  e  $\beta_i$ . O resultado vai depender de constante de acoplamento efetivas que evoluem segundo equações:

$$\frac{d}{d[\text{Log}(\rho/m)]} \bar{\rho}_i = \beta_i(\bar{\rho}, \bar{\lambda}) \quad (\text{eq. 190.1})$$

Em suma, temos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \text{C.T.} \Rightarrow \bar{\lambda} \leftrightarrow \beta(\lambda)$$

$$+ \rho_i M^{4-d_i} \mathcal{O}_i(\phi) \Rightarrow \rho_i \leftrightarrow \beta_i(\rho_i) \dots \beta_i = (d_i - \gamma + \delta_i) \rho_i$$

No limite em que todas as correções são muito pequenas (perto da teoria livre), podemos ignorar as contribuições de  $\gamma_i$  para  $\beta_i$  ( $\gamma_i$  depende de  $\rho_i$  ou  $\lambda$ , portanto  $\gamma_i \rho_i \sim O(\text{pert}^2)$ ); neste caso:

$$\frac{d}{d[\text{Log}(\rho/m)]} \bar{\rho}_i = [d_i - \gamma] \bar{\rho}_i \rightarrow \beta_i(\bar{\rho}_i)$$

$$\bar{\rho}_i = \rho_i \left(\frac{\rho}{m}\right)^{d_i - \gamma}$$

O que nos fornece o comportamento que esperávamos depois da análise pelo método do Wilson: operadores com dimensão maior que 4 (não-renormalizáveis, em quatro dimensões) tem acoplamentos que diminuem para momentos pequenos.

Em  $d$  dimensões, temos que tomar cuidado com o termo  $\lambda \phi^4$ , que fica com acoplamento dimensional. Fazemos então:

$$\text{Dim}[\phi] = \frac{d-2}{2} \quad \text{Dim}[\phi^4] = 2d - 4$$

$$\hookrightarrow \text{Dim}[\lambda] = d - (2d - 4) = 4 - d$$

$$\lambda \rightarrow \lambda' m^{4-d} \quad (\text{definindo um novo } \lambda \text{ adimensional})$$

$$M^{4-d} \rightarrow M^{d-4}$$

$$\text{Dim}[\phi_M^2] = d-2 \rightarrow P_m M^{d-(d-2)} \phi_m^2 = P_m M^2 \phi_m^2 \quad (\text{no caso do operador de massa, nada muda})$$

finalmente

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2} P_m M^2 \phi_m^2 - \frac{1}{4} \lambda M^{4-d} \phi_m^4 + \dots$$

Também precisamos calcular os contratermos em  $d'$  dimensões. O cálculo que fizemos para  $\int \phi^2$  muda da seguinte forma, para  $d'$  próximo a 4:

$$\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} \stackrel{d \rightarrow 4}{\sim} (\dots - \text{Log}(M^2) + \dots)$$

$$\frac{\Gamma(2-d'/2)}{(M^2)^{2-d'/2}} \stackrel{d \rightarrow d'}{\sim} M^{2(d'/2-2)} (\dots - \text{Log}(M^2) + \dots)$$

$$\begin{aligned} M \frac{d}{dM} \frac{\Gamma(2-d'/2)}{(M^2)^{2-d'/2}} &\sim (d'-4) M^{d'-4} (\dots - \text{Log}(M^2) + \dots) - 2 M^{d'-4} \\ &= M^{d'-4} [-2 + (d'-4)(\dots - \text{Log}(M^2) + \dots)] \end{aligned}$$

$$d' \sim 4 \Rightarrow M^{d'-4} \sim 1 + \mathcal{O}(d'-4)$$

$$M \frac{d}{dM} \frac{\Gamma(2-d'/2)}{(M^2)^{2-d'/2}} \sim -2 + \mathcal{O}(d'-4)$$

o que tínhamos antes (em  $d=4$ )

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} [2 - \mathcal{O}(d'-4)] = \left[ \gamma_{\phi^2}^{(4)} + \mathcal{O}[\lambda(d'-4)] \right]$$

$$\beta_i = (d_i - d + \gamma_i) P_i \rightarrow \beta_m = \left\{ 2 - (d'-4) + \gamma_{\phi^2}^{(4)} + \mathcal{O}[\lambda(d'-4)] \right\} P_m = \left\{ -2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)} - (d'-4) + \mathcal{O}[\lambda(d'-4)] \right\} P_m$$

$$\lambda(d'-4) \sim 0 \quad P_i(d'-4) \sim 0 \quad \rightarrow \quad \beta_m = (-2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)}) P_m + \dots \quad (\text{eq. 200.1})$$

Algo similar ocorre com as outras funções:  $\beta_i = [d_i - d + \gamma_i^{(4)}] P_i + \dots$

No caso da função  $\beta$  temos um contrinuição da dimensão de massa de  $\lambda$ :

o que tínhamos antes (em  $d = 4$ )

$$\beta = (d-4)\lambda + \beta^{(4)}(\lambda) \quad (\text{eq. 201.1})$$

$G^{(4)} \sim \lambda M^{4-d} + \dots \rightarrow [M \frac{d}{dM} + \beta \frac{d}{d\lambda}] G^{(4)} = 0 \Rightarrow [\lambda(d-4)M^{4-d} + \beta M^{4-d} + O(\lambda^2)] = 0$

$$\beta = (d-4)\lambda + O(\lambda^2)$$

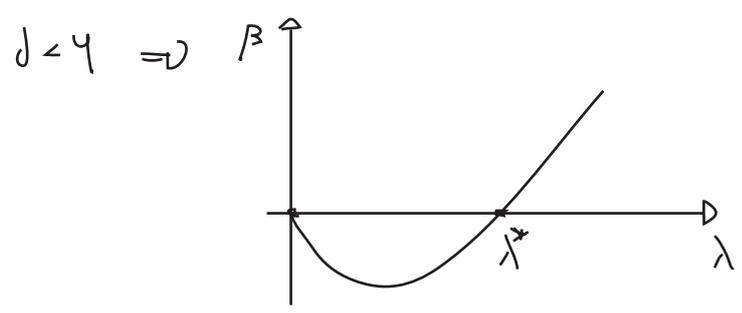
$\lambda^2(d-4) \sim 0 \rightarrow \beta^{(4)}(\lambda)$

Usando o resultado 180.1:  $\beta = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + O(\lambda^3)$

temos:

$$\beta = -(4-d)\lambda + \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2}$$

$$d \geq 4 \Rightarrow \beta > 0 \quad \therefore \lambda \rightarrow 0 / p \rightarrow 0$$



$$\lambda_* = \frac{16\pi^2}{3} (4-d)$$

o que é o comportamento que previmos nas págs 193-194, com um ponto fixo em  $\lambda^*$

### Conexão com os expoentes críticos

Usando o resultado 200.1, podemos obter a evolução do parâmetro de massa em  $\lambda\phi^4$ :

$$\beta_m = (-2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)}) \bar{p}_m \rightarrow \frac{d}{d[\text{Log}(M/m)]} \bar{p}_m = \beta_m(\bar{p}_m) = (-2 + \underbrace{\gamma_{\phi^2}^{(4)}}_{\frac{\lambda}{16\pi^2}}) \bar{p}_m \quad (\text{eq. 197.2})$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \frac{1}{\bar{p}_m} d \bar{p}_m = -2 d[\text{Log}(M/m)] \Rightarrow \bar{p}_m = p_m \left(\frac{M}{p}\right)^2 \quad (\text{eq. 201.2})$$

Lembrando que  $p_m = \frac{m^2}{M^2} \Rightarrow \bar{p}_m = \frac{m^2}{p^2}$  (o que apenas nos diz que quando  $p \sim m$  o termo de massa se torna importante, e é pouco importante para  $p \gg m$ )

Pensando em um sistema de mecânica estatística, lembremos que o comprimento de correlação desempenha o papel da massa deste campo escalar. Levando em conta a evolução desta massa podemos definir:

$$\xi \sim P_0^{-1} \quad / \quad \bar{P}_m(P_0) = 1 \quad \dots \Rightarrow \quad \bar{P}_m = 1 \Leftrightarrow P_0^2 = P_m M^2$$

um momento específico (não confundir com a componente zero do momento)

$$\xi \sim (M^2 P_m)^{-1/2} = m^{-1}$$

Usando o mesmo critério para definir  $\xi$  perto do ponto fixo  $\lambda^*$ , obtemos:

$$\frac{d}{d[\text{Log}(M/\mu)} \bar{P}_m = \left( -2 + \gamma_{\phi^2}(\lambda^*) \right) \bar{P}_m \Rightarrow \bar{P}_m = P_m \left( \frac{M}{P} \right)^{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda^*)} \quad (\text{eq. 202.1})$$

$$\bar{P}_m(P_0) = 1 \Rightarrow P_m \left( \frac{M}{P_0} \right)^{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda^*)} = 1 \Rightarrow P_0^{V^{-1}} = P_m M^{V^{-1}}$$

$$P_0 = P_m^V M$$

$$\xi \sim P_m^{-V}$$

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{16\pi^2} \quad \lambda_* = \frac{16\pi^2}{3} (4-d)$$

$$V^{-1} = 2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda^*) = 2 - \frac{\lambda^*}{16\pi^2} = 2 - \frac{1}{3} (4-d) + \mathcal{O}[(4-d)^2]$$

Wilson & Fisher mostraram que podemos obter o resto da expansão.

Comparando com o que obtivemos para o modelo de Landau:

$$\xi = [2k(T - T_c)]^{-1/2}$$

vemos que  $P_m$  é que desempenha o papel do parâmetro que mede a distância para a temperatura crítica, e  $n$  mede como o comprimento de correlação cresce conforme nos aproximamos desta temperatura:

$$P_m \sim (T - T_c) \Rightarrow \xi \sim (T - T_c)^{-V}$$

$$V = \frac{1}{2 - \frac{1}{3}(\gamma - d) + \mathcal{O}[(\gamma - d)^2]}$$

$$V \approx \frac{1}{2} \quad (\text{de acordo com o modelo de Landau})$$

↳ contruindo uma teoria escalar com simetria  $O(N)$  é possível mostrar que:

$$V^{-1} = 2 - \frac{N+2}{N+8} (\gamma - d)$$

↳ com N campos escalares

O que nos permite descrever o comportamento perto do ponto crítico de diferentes materiais magnéticos:

$N = 1 \Rightarrow$  com eixo preferencial de magnetização

$N = 2 \Rightarrow$  com plano preferencial de magnetização

$N = 3 \Rightarrow$  isotrópicos

E os valores previstos concordam bem com experimentos ( $d = 3$ ):

N	1	2	3
$V_{\text{TEOR}}$	0,6	0,63	0,65
$V_{\text{EXP}}$	0,64	0,67	0,71

Curiosamente, o comportamento crítico pode ser estudado para uma grande variedade de sistemas (fluidos, ligas binárias, superfluidos, ...). É um fato experimental que os expoentes perto do ponto crítico dependem apenas da dimensão da variável que flutua e não dos detalhes microscópicos. Isso pode parecer um milagre, mas do ponto de vista da teoria quântica de campos, é um fato natural, uma consequência direta do grupo de renormalização. Quando o sistema passa a ser dominado pela dinâmica de grandes distâncias restam apenas alguns operadores relevantes, e tudo fica muito simples. Esta idéia, levada para as teorias relativísticas, nos explica porque as teorias interessantes para física de partículas são renormalizáveis. Isto indica apenas que estamos longe do cut-off destas teorias.

Exponent	Landau	QFT	Lattice	Experiment
----------	--------	-----	---------	------------

$N = 1$  Systems:

$\gamma$	1.0	1.241 (2)	1.239 (3)	1.240 (7)	binary liquid
				1.22 (3)	liquid-gas
				1.24 (2)	$\beta$ -brass
$\nu$	0.5	0.630 (2)	0.631 (3)	0.625 (5)	binary liquid
				0.65 (2)	$\beta$ -brass
$\alpha$	0.0	0.110 (5)	0.103 (6)	0.113 (5)	binary liquid
				0.12 (2)	liquid-gas
$\beta$	0.5	0.325 (2)	0.329 (9)	0.325 (5)	binary liquid
				0.34 (1)	liquid-gas
$\eta$	0.0	0.032 (3)	0.027(5)	0.016 (7)	binary liquid
				0.04 (2)	$\beta$ -brass

$N = 2$  Systems:

$\gamma$	1.0	1.316 (3)	1.32 (1)		
$\nu$	0.5	0.670 (3)	0.674 (6)	0.672 (1)	superfluid $^4\text{He}$
$\alpha$	0.0	-0.007 (6)	0.01 (3)	-0.013 (3)	superfluid $^4\text{He}$

 $N = 3$  Systems:

$\gamma$	1.0	1.386 (4)	1.40 (3)	1.40 (3)	EuO, EuS
				1.33 (3)	Ni
				1.40 (3)	RbMnF <sub>3</sub>
$\nu$	0.5	0.705 (3)	0.711 (8)	0.70 (2)	EuO, EuS
				0.724 (8)	RbMnF <sub>3</sub>
$\alpha$	0.0	-0.115 (9)	-0.09 (6)	-0.011 (2)	Ni
$\beta$	0.5	0.365 (3)	0.37 (5)	0.37 (2)	EuO, EuS
				0.348 (5)	Ni
				0.316 (8)	RbMnF <sub>3</sub>
$\eta$	0.0	0.033 (4)	0.041 (14)		.