$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^1 \left[2\epsilon f(x)\, \delta(x-y) + O(\epsilon^2) \right] = 2f(y)$$

$$\delta^2(x-y)$$

Ex 2: $F[f] = \int f(x)\, dx$

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(y)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \int [f(x) + \varepsilon\, \delta(x-y)]\, dx - \int f(x)\, dx \right\} =$$

$$= \int \delta(x-y)\, dx = 1$$

Ex 3: $F_x[f] = \int G(x,y) f(y)\, dy$

$$\frac{\delta F_x[f]}{\delta f(z)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int G(x,y)\, \varepsilon\, \delta(y-z)\, dy = G(x,z)$$

Ex 4: $F_a[f] = f(a)$ $\quad$ a fixo

$$\frac{\delta F_a[f]}{\delta f(x)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F_a[f(y) + \varepsilon\, \delta(y-x)] - F_a[f(y)]}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a) + \varepsilon\, \delta(a-x) - f(a)}{\varepsilon} = \delta(a-x)$$

$$f(x) = F_x[f] \Rightarrow \frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x-y)$$

Ex 5: $F_x[f] = g(f(x))$

$$\frac{\delta F_x[f]}{\delta f(y)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(f(x)+\varepsilon\delta(x-y)) - g(f(x))}{\varepsilon}$$

$$g[f(x)+\varepsilon\delta(x-y)] \simeq g(f(x)) + \varepsilon\delta(x-y)\left.\frac{dg}{df}\right|_{f=f(x)} + \dots$$

$$\frac{\delta g(f(x))}{\delta f(y)} = \delta(x-y)\left.\frac{dg}{df}\right|_{f=f(x)}$$

Ex 6: $F[y,z] = \int y^2(x)\, z^4(x)\, dx$

$$\frac{\delta F[y,z]}{\delta y(x)} = 2\, y(x)\, z^4(x) \qquad \frac{\delta F[y,z]}{\delta z(x)} = 4\, y(x)\, z^3(x)$$

Ex 7: $C^\infty(\mathbb{R}^n) \longmapsto \mathbb{R}$

$$\frac{\delta g(f(x_1,x_2,x_3))}{\delta f(y_1,y_2,y_3)} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\left.\frac{\partial g}{\partial f}\right|_{f=f(x_1,x_2,x_3)}$$

Ex 8:

$$\frac{\delta g(f(k,x_2,x_3))}{\delta f(k,y_2,y_3)} = \delta(x_2-y_2)\,\delta(x_3-y_3)\left.\frac{\partial g}{\partial f}\right|_{f=f(k,x_2,x_3)}$$

$\therefore f(k,x_2,x_3) = f'(x_2,x_3)$

PARÂMETRO VARIÁVEL

PARÂMETRO FIXO

$$\frac{\delta f(\phi(\vec{x}_i,x^0),\pi(\vec{x}_i,x^0))}{\delta\phi(\vec{x}_j,x^0)} = \delta^3(\vec{x}_i-\vec{x}_j)\left.\frac{\partial f(\phi,\pi)}{\partial\phi}\right|_{\phi=\phi(\vec{x}_i,x^0)}$$

Funções de Correlação

(Ryder 5.5)

Desejaremos usar este formalismo para obter funções de correlação e propagadores para as teorias de campo estudadas. Comecemos então pelo seguinte objeto:

$$t_f > t_{n_1} > t_i$$

$$\langle q_f, t_f | \hat{q}(t_{n_1}) | q_i, t_i \rangle =$$

$$= \int dq_1 \dots dq_n \langle q_f, t_f | q_n, t_n \rangle \dots \langle q_{n_1}, t_{n_1} | \hat{q}(t_{n_1}) | q_{n_1-1}, t_{n_1-1} \rangle \dots$$

$$\dots \langle q_1, t_1 | q_i, t_i \rangle =$$

$$\langle q_{n_1}, t_{n_1} | \hat{q}(t_{n_1}) | q_{n_1-1}, t_{n_1-1} \rangle = q(t_{n_1}) \langle q_{n_1} t_{n_1} | q_{n_1-1} t_{n_1-1} \rangle$$

Uma vez que transformamos este operador em uma função, podemos seguir o mesmo procedimento usado nas páginas 2 a 6 para obter:

$$\langle q_f, t_f | \hat{q}(t_1) | q_i, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q \; q(t_1) \; \mathrm{Exp}\left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \, L \right\}$$

(de agora em diante: $\hbar = 1$, $c = 1$)

No caso de dois operadores vale o mesmo:

$$\langle q_f\, t_f | \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) | q_i\, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q \; q(t_1) q(t_2) \; \mathrm{Exp}\left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \, L \right\}$$

$$\boxed{t_f > t_1 > t_2 > t_i}$$

$$\langle q_f\, t_f | \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_1) | q_i\, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q \; q(t_1) q(t_2) \; \mathrm{Exp}\left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \, L \right\}$$

$$\boxed{t_f > t_2 > t_1 > t_i}$$

$$N\int D_q\; q(t_1)\,q(t_2)\;\mathrm{Exp}\left\{ i\int_{t_i}^{t_f} dt\, L \right\} = \langle q_f t_f |\, T\{\hat q(t_1)\,\hat q(t_2)\}\,| q_i t_i\rangle$$

O ordenamento temporal aparece naturalmente na integral de trajetória

Este procedimento pode ser generalizado para:

$$\boxed{\langle q_f t_f |\, T\{\hat q(t_1)\,\hat q(t_2)\dots\hat q(t_n)\}\,| q_i t_i\rangle = N\int D_q\; q(t_1)\dots q(t_n)\; e^{i\int_{t_i}^{t_f} L\,dt}}$$

(eq. 12.1)

Isso é quase função de correlação que precisamos, a menos dos estados iniciais e finais, que deveriam ser o estado fundamental (vácuo). Gostaríamos de obter:

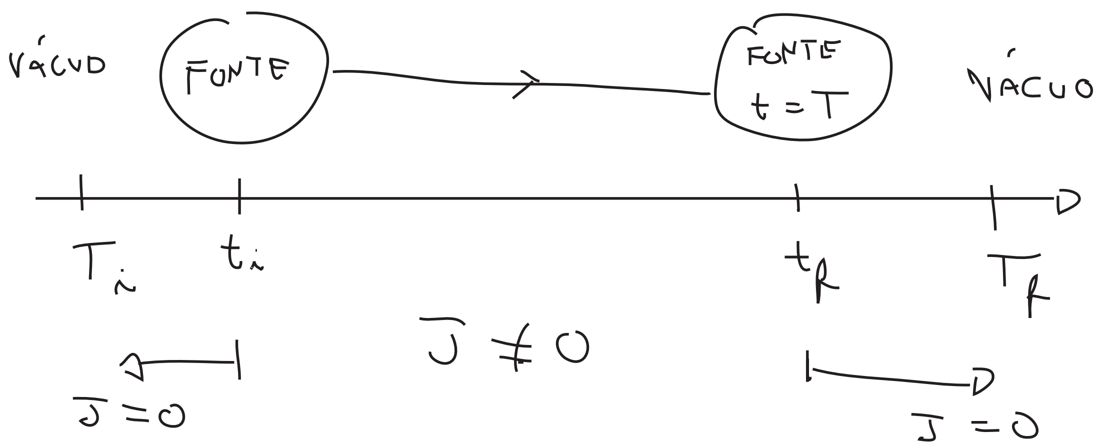
$$\underbrace{\langle 0,-\infty|}_{\text{vácuo}}\, T\{\hat q(t_1)\,\hat q(t_2)\dots\hat q(t_n)\}\, \underbrace{|0,+\infty\rangle}_{\text{vácuo}}$$

O que temos é uma transição de vácuo-vácuo, com estados mais excitados (partículas) criados e aniquilados em tempos intermediários. Isso é aproximadamente o que acontece em situações experimentais, com partículas criadas em um ponto (tipicamente por um choque) e aniquiladas em um outro (no momento da detecção). Podemos dar conta destas criações e aniquilações usando fontes:

$$L \to L + \underbrace{J(t)\,q(t)}_{\text{FONTE}} \qquad\qquad |q,t\rangle \to |q,t\rangle^J$$

Uma generalização da idéia de uma partícula carregada interage com o campo elétromagnético por meio de um termo $J_\mu A^\mu$ onde J_μ é a corrente associada à carga. Este corrente é a fonte do campo A_μ

Neste caso estamos interessados em estudar então o seguinte caso:



$$\langle Q_f\, T_f | Q_i\, T_i \rangle^J = N \int Dq \; \exp\left[i \int_{T_i}^{T_f} (L + Jq)\, dt \right]$$

$$\langle Q_f\, T_f | Q_i\, T_i \rangle^J = \int dq_f\, dq_i \, \langle Q_f T_f | q_f\, t_f \rangle^{\cancel{J}} \langle q_f\, t_f | q_i\, t_i \rangle^J \langle q_i t_i | Q_i T_i \rangle^{\cancel{J}}$$

J=0 ENTRE t_f E T_f

$$\langle Q_f T_f | q_f\, t_f \rangle = \langle Q_f | e^{-i\hat{H}\, T_f} | q_f, t_f \rangle =$$

$$= \sum_n \langle Q_f | e^{-i\hat{H}\, T_f} | E_n \rangle \langle E_n | q_f, t_f \rangle =$$

$$= \sum \phi_n^*(q_f, t_f)\, \phi_n(Q_f)\; e^{-iE_n\, T_f}$$

Estou buscando um elemento de matriz que envolva o estado fundamental da teoria (vácuo) isto pode ser obtido a partir do elemento acima de mais de uma forma:

$\boxed{1}$ Calculando a expressão acima no limite: $T_f \to \infty(1 - i\varepsilon)$

$$e^{-iE_n T_f} \longrightarrow e^{-iE_n T_f}\, \underbrace{e^{-E_n \varepsilon\, T_f}}$$

Com T_f grande, a soma de exponenciais deste tipo será dominada pela contribuição de menor energia.

$$\therefore \lim_{T_f \to \infty(1-i\varepsilon)} \langle Q_f T_f | q_f\, t_f \rangle = \phi_0^*(q_f, t_f)\, \phi_0(Q_f)\; e^{-iE_0\, T_f}$$

Fazendo o mesmo no elemento que envolve T_i, temos: $\left(T_i \to -\infty(1 - i\varepsilon) \right)$

$$\lim_{\substack{T_f \to \infty(1-i\varepsilon) \\ T_i \to -\infty(1-i\varepsilon)}} \langle Q_f\, T_f | Q_i\, T_i \rangle^J = \phi_0^*(Q_i)\, \phi_0(Q_f)\, \exp\left[-iE_0(T_f - T_i)\right] \times$$

$$\times \int dq_i\, dq_f\, \phi_0^*(q_f, t_f) \langle q_f\, t_f | q_i\, t_i \rangle^J \phi_0(q_i, t_i)$$

$$\underbrace{\int dq_i dq_f\, \phi_0^*(q_f,t_f) \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle^J \phi_0(q_i,t_i)}_{\substack{t_f \to \infty \\ t_i \to -\infty \quad \langle 0,\infty|0,-\infty\rangle^J}} = \frac{\lim\limits_{\substack{T_f \to \infty(1-i\varepsilon) \\ T_i \to -\infty(1-i\varepsilon)}} \langle Q_f T_f | Q_i T_i \rangle^J}{\phi_0^*(Q_i)\,\phi_0(Q_f)\, \mathrm{Exp}[-iE_0(T_f - T_i)]}$$

$$\langle 0,\infty|0,-\infty\rangle^J \propto \lim_{\substack{T_f \to \infty(1-i\varepsilon) \\ T_i \to -\infty(1-i\varepsilon)}} \langle Q_f T_f | Q_i T_i \rangle^J =$$

$$= N \int D_q\, \mathrm{Exp}\left[i \int_{-\infty(1-i\varepsilon)}^{+\infty(1-i\varepsilon)} (L + Jq)\, dt \right]$$

A conclusão é que a amplitude de transição vácuo-vácuo é proporcional a integral de trajetória acima. Definiremos então o FUNCIONAL GERADOR:

$$\boxed{Z[J] = \int D_q\, \mathrm{Exp}\left[i \int_{-\infty(1-i\varepsilon)}^{+\infty(1-i\varepsilon)} (L + Jq)\, dt \right]} \propto \langle 0,\infty|0,-\infty\rangle^J$$

(eq. 14.1)

(note que definimos Z de forma normalizada - jogamos fora qualquer número na frente deste - isto é o mesmo que dividir por Z[J=0] o que faz o Peskin eq. 9.35)

$\boxed{2}$ Uma outra forma de "separar o vácuo" seria modificar a Hamiltoniana

$$H \to H(1 - i\varepsilon)$$

$$\langle Q_f | e^{-i\hat{H} T_f} | q_f, t_f \rangle \to \sum \phi_n^*(q_f,t_f)\, \phi_n(Q_f)\, e^{-iE_n T_f}\, e^{-\varepsilon E_n T_f}$$

o que no leva ao mesmo resultado, só que agora $\begin{cases} T_f \to \infty \\ T_i \to -\infty \end{cases}$

A definição do funcional gerador fica:

$$Z[J] = \int Dq \, \mathrm{EXP}\left[i \int_{-\infty}^{+\infty} \left(L + Jq - i\varepsilon V(q) \right) dt \right]$$

(lembre-se que assumimos $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ toda vez que passamos de H para L)

ATENÇÃO: no Ryder ele define este funcional com $+\frac{i}{2}\varepsilon q^2$ (Ryder: eq 5.68), ele consegue sair "impune" disto pois só utilizará esta definição para o campo escalar, cujo potencial é $-\frac{m}{2}q^2$

$$\text{———} \ \ // \ \ \text{———}$$

Com esta definição em mente, notemos que:

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(t_1)} = \int Dq \, \underbrace{\frac{\delta}{\delta J(t_1)}\left[i \int_{-\infty}^{+\infty} \left(L + Jq \right) dt \right]}_{i\,q(t_1) \ \text{(VEJA EX 3 NA PÁG 9)}} \mathrm{EXP}\left[i \int_{-\infty(1-i\varepsilon)}^{+\infty(1-i\varepsilon)} \left(L + Jq \right) dt \right]$$

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(t_1)\ldots\delta J(t_n)} = i^n \int Dq \; q(t_1)\ldots q(t_n)\, \mathrm{EXP}\left[i \int_{-\infty(1-i\varepsilon)}^{+\infty(1-i\varepsilon)} \left(L + Jq \right) dt \right]$$

$$\left.\frac{\delta Z[J]}{\delta J(t_1)\ldots\delta J(t_n)}\right|_{J=0} = i^n \underbrace{\int Dq \; q(t_1)\ldots q(t_n)\, \mathrm{EXP}\left[i \int_{-\infty(1-i\varepsilon)}^{+\infty(1-i\varepsilon)} L \, dt \right]}_{\text{segundo a eq. 12.1, a menos dos limites de int.}}$$

$$\langle q_f t_f | T\{\hat{q}(t_1)\ldots\hat{q}(t_n)\} | q_i t_i \rangle$$

Lembrando que estes limites de integração têm o efeito de separar o estado fundamental:

$$\boxed{\left.\frac{\delta Z[J]}{\delta J(t_1)\ldots\delta J(t_n)}\right|_{J=0} \propto i^n \langle 0,\infty | T\{\hat{q}(t_1)\ldots\hat{q}(t_n)\} | 0,-\infty \rangle}$$

(eq. 15.1)