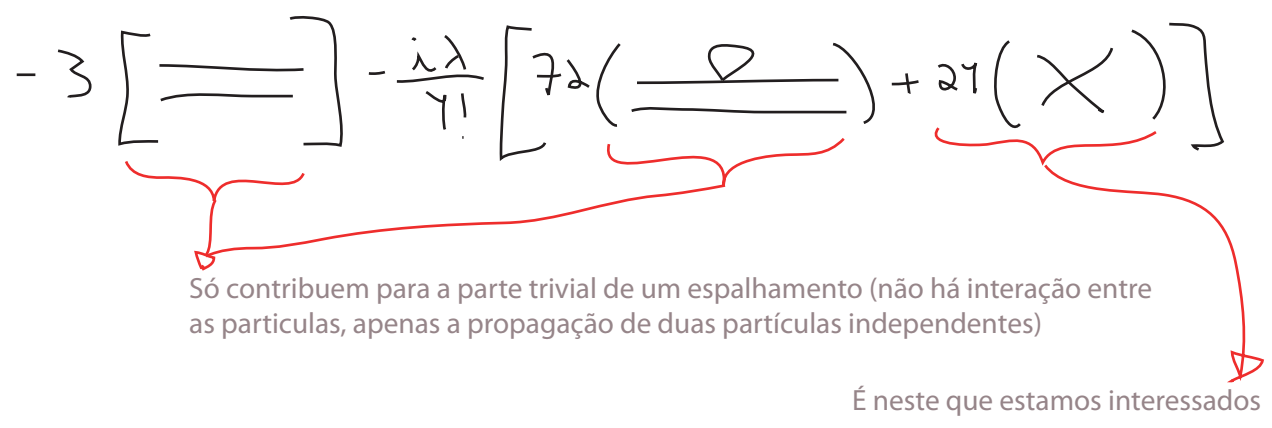


Notem que temos em 40.1, diagramas conexos e desconexos:



Podemos definir um funcional gerador que produz apenas os termos conexos:

$$Z[J] = e^{iW[J]} \quad W[J] = -i \ln Z[J]$$

correlator de 2-pontos:

$$\frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} = -i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left\{ \left[\frac{1}{Z[J]} \right] \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)} \right\} = -i \left\{ \left[\frac{-1}{Z[J]} \right] \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)} + \left[\frac{1}{Z[J]} \right] \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right\}$$

$$\left. \frac{\delta Z}{\delta J(x)} \right|_{J=0} = 0 \quad Z[J=0] = 1 \quad \text{normalização}$$

$\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle$

$$\left. \frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = -i \left. \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = i \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | 0 \rangle$$

No caso da função de 2-pontos, W e Z são equivalentes (o que queríamos, já que não havia diagramas desconexos na função de 2 pontos)

$$\frac{\delta^4 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \Big|_{J=0} = \frac{\delta^2}{\delta J(x_3) \delta J(x_4)} \left\{ \left[\frac{i}{z[J]} \right] \frac{\delta z[J]}{\delta J(x_3)} + \left[\frac{-i}{z[J]} \right] \frac{\delta^2 z[J]}{\delta J(x_2) \delta J(x_3)} \right\} = (\dots) =$$

(derivadas de ordem 1 e 3 desaparecem quando J = 0)

$$= \frac{1}{z^2} \left[\frac{\delta^2 z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \frac{\delta^2 z}{\delta J(x_3) \delta J(x_4)} + \frac{\delta^2 z}{\delta J(x_1) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 z}{\delta J(x_2) \delta J(x_4)} + \dots \right]$$

$$\left[\frac{1}{z^2} \frac{\delta^2 z}{\delta J(x_1) \delta J(x_4)} \frac{\delta^2 z}{\delta J(x_2) \delta J(x_3)} - \frac{1}{z} \frac{\delta^4 z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \right]_{J=0} =$$

(eq. 42.1)

$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_4) \} | 0 \rangle$ $\langle 0 | T \{ \phi(x_2) \phi(x_3) \} | 0 \rangle$ $\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \} | 0 \rangle$
 (aqui estão contidos os diagramas conexos e desconexos)



$$\rightarrow A \rightarrow \left(\bar{1} \text{---} 4 \text{---} \frac{-\lambda}{2} \text{---} 1 \text{---} 4 \right) \left(\bar{2} \text{---} 3 \text{---} \frac{-\lambda}{2} \text{---} 2 \text{---} 3 \right) =$$

$$= - \frac{1}{2} \frac{1}{3} - \frac{i\lambda}{2} \frac{2}{1} \frac{0}{4} - \frac{i\lambda}{2} \frac{1}{2} \frac{0}{3} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

A + B Cancelamentos:

$$\rightarrow - \left[- \frac{1}{3} \frac{2}{4} - \frac{1}{2} \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \frac{4}{3} - \frac{i\lambda}{4!} \left(\frac{1}{3} \frac{0}{4} + \frac{1}{2} \frac{0}{4} \right) \right]$$

$$\left(\frac{1}{2} \frac{0}{3} + \frac{3}{1} \frac{0}{4} + \frac{2}{1} \frac{0}{3} + \frac{2}{1} \frac{0}{4} \right) - \frac{i\lambda}{4!} \left(\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right)$$

4! TERMOS

Fica claro que os termos dentro de [] também serão cancelados (pelos dois termos de derivadas de segunda ordem que ainda não consideramos em 42.1)

Podemos então definir um correlator de n-pontos **conexa** ou **irredutível**:

(não confundir com *one particle irreducible*, 1 PI, que é outra coisa que veremos mais a frente)

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}$$

No caso da função de quatro pontos:

$$i \phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \} | 0 \rangle +$$

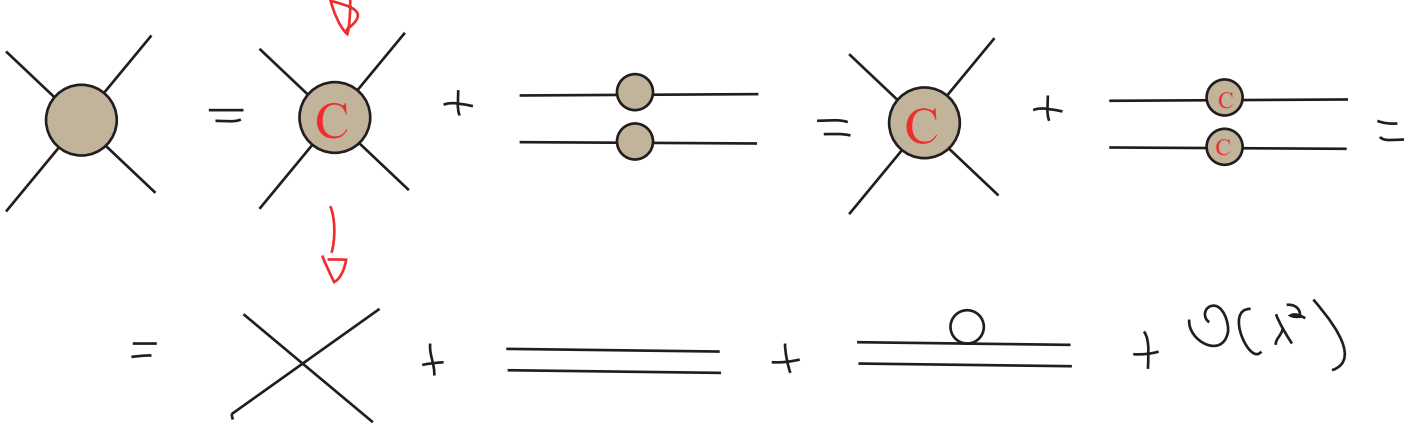
$$- \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | 0 \rangle \langle 0 | T \{ \phi(x_3) \phi(x_4) \} | 0 \rangle$$

$$- \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_3) \} | 0 \rangle \langle 0 | T \{ \phi(x_2) \phi(x_4) \} | 0 \rangle$$

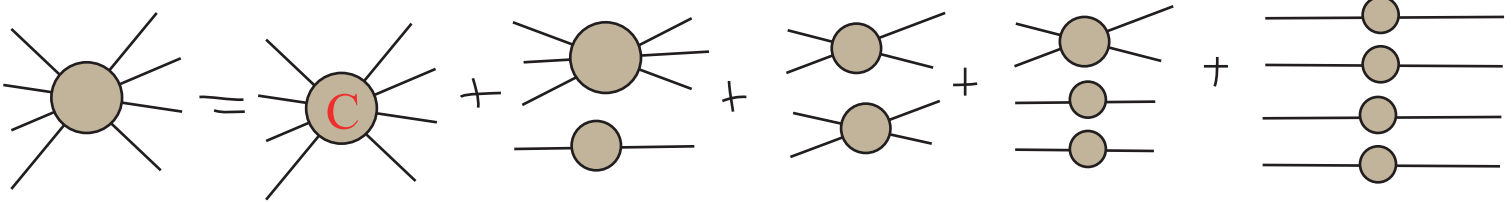
$$- \underbrace{\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_4) \} | 0 \rangle}_{i \phi(x_1, x_2)} \langle 0 | T \{ \phi(x_3) \phi(x_2) \} | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \} | 0 \rangle = i \phi(x_1, \dots, x_4) - \sum_{\text{PERMUT}} \phi(x_a, x_b) \phi(x_c, x_d)$$

parte conexa
parte desconexa



Para funções com n pontos, vale a mesma lógica:



Paralelos entre Mecânica Estatística e Mec. Quântica

Interlúdio: um pouco de Quântica Estatística

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q)$$

$$\langle q_f | U(t) | q_i \rangle = \int \mathcal{D}q \, e^{\frac{i}{\hbar} S[q]}$$

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$$

$$S[q] = \int_0^t dt' \left[\frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q) \right]$$

Vamos supor que esta partícula está em contato com um banho térmico em temperatura T . As propriedades do sistema serão dadas pela matriz densidade:

(Não é essencial saber exatamente de onde vem isso para o que vamos ver, mas se você estiver interessado: em Mecânica Estatística Quântica: K. Huang, Statistical Mechanics, caps. 8.1 a 8.3)

para um sistema em equilíbrio: $\hat{\rho}_\beta = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}}$

$\beta = \frac{1}{k_B T}$ fator de Boltzman
 normalização

Esta é uma probabilidade e diz que, se o SISTEMA está em um dado autoestado de energia E , a probabilidade de encontrar a PARTÍCULA neste estado é

$$\frac{1}{Z} e^{-\beta E}$$

$$\text{Tr}[\hat{\rho}_\beta] = 1 \iff Z = \text{Tr}[\text{EXP}(-\beta \hat{H})] \quad \text{função de partição}$$

O valor esperado de qualquer observável \hat{O} é dado por:

$$\langle \hat{O} \rangle_\beta = \text{Tr}(\hat{\rho}_\beta \cdot \hat{O})$$

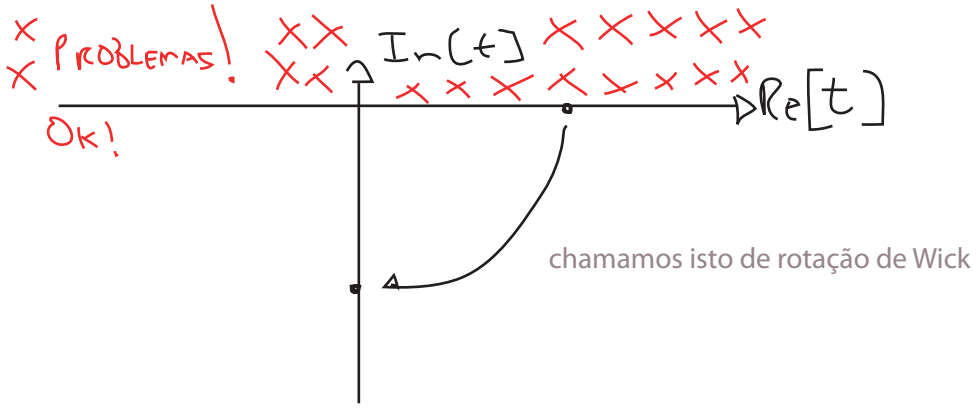
(fim do interlúdio)

Consideremos o operador de evolução:

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} = e^{-\frac{i}{\hbar} H \text{Re}[t]} e^{\frac{H \text{Im}[t]}{\hbar}}$$

$\left. \begin{matrix} > 1 \\ < 1 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{Im}[t] > 0 \\ \text{Im}[t] < 0 \end{matrix}$

O que acontece se fizermos a continuação analítica para o plano complexo em t? - U só é limitado para valores negativos de Im[t]:



$$\langle \Psi | U^\dagger U | \Psi \rangle \leq C \langle \Psi | \Psi \rangle$$

Olhemos o eixo imaginário: $t = -i\tau$ $\tau > 0$

$$U(-i\tau) = e^{-\frac{\tau}{\hbar} H}$$

Obtemos uma exponencial do tipo que aparece na matriz densidade, então se fizermos:

$$\tau = \beta = \frac{\hbar}{k_B T} \quad \begin{cases} \rightarrow \rho = \frac{1}{Z} U(-i\tau) \\ \rightarrow Z = \text{Tr} [U(-i\tau)] \end{cases}$$

Vemos que a "evolução" de um sistema neste "tempo imaginário" serve para descrever as propriedades deste mesmo sistema em equilíbrio com um banho térmico.

Vejamos o que acontece com o elemento de matriz de U, definido por um integral de trajetória

$$\left. \begin{aligned} q(t) &\rightarrow q_E(\tau) \\ \frac{dq(t)}{dt} &\rightarrow \frac{dq_E(\tau)}{-i d\tau} = i \dot{q}_E(\tau) \\ \int dt &\rightarrow -i \int d\tau \end{aligned} \right\} S[q] \rightarrow -i \int_0^\tau d\tau' \left[-\frac{m \dot{q}_E^2}{2} - V(q_E) \right] =$$

$$= \int_0^\tau d\tau' \left[\frac{m \dot{q}_E^2}{2} + V(q_E) \right] = S_E[q]$$

(poderíamos refazer todo o processo de discretização para o tempo complexo, mas o procedimento "inocente" de fazer isto direto na integral de trajetória funciona)

$$Z_\beta = \int dq_a \langle q_a | U(-i\tau) | q_a \rangle =$$

TRAÇO

notem que estamos interessados na evolução que leva de um ponto a ele mesmo

$$= \int Dq_E \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S_E[q]\right)$$

$$q(\tau + \tau) = q(\tau)$$

A ação agora é a soma K + V (é uma hamiltoniana clássica)

Temos uma condição periódica cujo período τ está relacionado com a temperatura:

$$\tau = \frac{\hbar}{k_B T}$$

Recapitulando:

Partícula (quântica) em temperatura T $\rightarrow \int_\beta (e^{-\beta H})$, $Z = \text{Tr} [e^{-\beta H}]$

↕

Partícula (quântica) em tempo imaginário $\rightarrow U(-i\tau)$

isto é tudo que preciso saber, e posso obtê-lo daqui

... mas vai além. Pensemos num sistema relativístico (clássico):

$$ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2 \quad (- + + +)$$

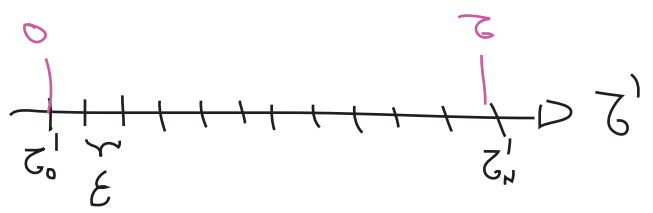
$$\downarrow t = -i\tau \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$ds_e^2 = d\tau^2 + d\vec{x}^2 \Rightarrow \text{distância Euclideana em } \mathbb{R}^{n+1}$$

Voltando ao sistema anterior, estávamos descrevendo uma partícula (não relativística) em 1 dimensão (espacial). Vejamos o que acontece se pensamos no parâmetro τ' como uma distância, além disso, consideraremos um sistema simples (oscilador harmônico):

$$V(q) = \frac{m}{2} \omega^2 q^2$$

Discretizando o "tempo Euclideano":



$$\tau'_i = i \epsilon$$

$$q(\tau'_i) = q_i$$

$$\int \mathcal{D}q_E \text{EXP} \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta} dt \left[\frac{m \dot{q}_E^2}{2} + \frac{m}{2} \omega^2 q_E^2 \right] \right\}$$



$$\int \prod dq_i \text{EXP} \left\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_i \mathcal{E} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{\mathcal{E}} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q_i^2 \right] \right\}$$

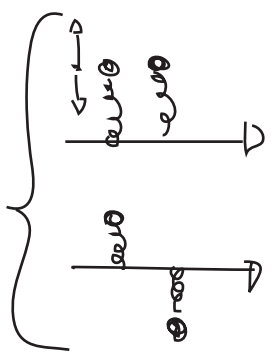
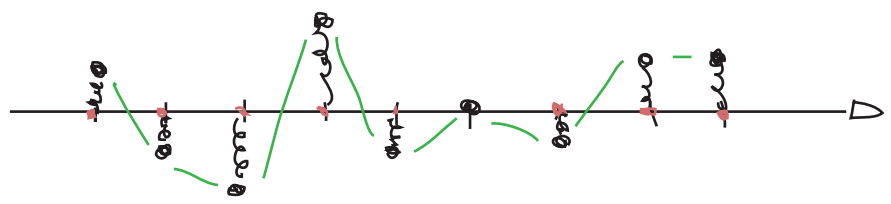
$$Z = \int \prod dq_i \text{EXP} \left\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_i \mathcal{E} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{\mathcal{E}} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q_i^2 \right] \right\}$$

"soma" todas as configurações $\{q_i\}$

$\frac{1}{\hbar}$

energia
acoplamento entre vizinhos
energia

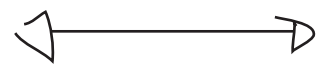
Na prática temos um sistema de osciladores:



$q_{i+1} - q_i$
PEQ
GRANDE

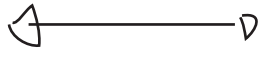
O termo de acoplamento entre vizinhos favorece "sincronização"

1 Oscilador Quântico
(em Temp finita ou tempo imaginário)



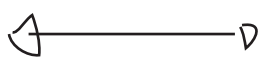
Cadeia de osciladores clássicos acoplados

Futuações quânticas



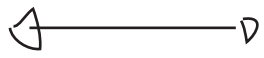
Futuações térmicas

\hbar



$k_B T$

1 grau de liberdade



número grande graus de liberdade clássicos

Temperatura

$$T = \frac{\hbar}{k_B \tau}$$

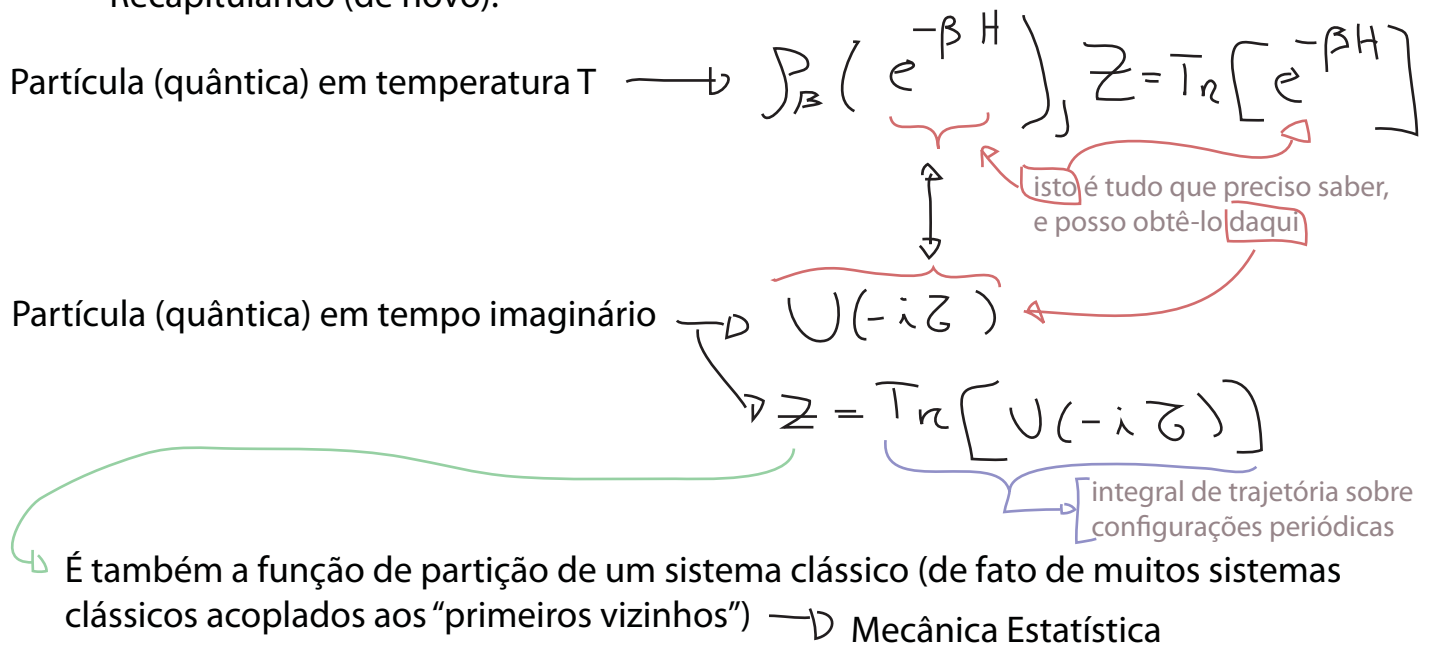
período



(Comprimento da Cadeia)⁻¹

$$\tau^{-1}$$

Recapitulando (de novo):



Até agora vimos a relação entre o operador de evolução e a função de partição. E os observáveis?

$$\hat{A}(q) \xrightarrow{\text{quântica em } T}$$

$$\langle \hat{A}(q_{\epsilon}) \rangle_{\beta} = \text{Tr} [\rho_{\beta} \cdot A(q_{\epsilon})] =$$

$$\beta = \frac{1}{k_B T_Q}$$

$$= \frac{\text{Tr} [U_{\epsilon}(\tau) A(q_{\epsilon})]}{\text{Tr} [U_{\epsilon}(\tau)]}$$

$$\int \mathcal{D}q_{\epsilon} e^{-\frac{1}{\hbar} S_{\epsilon}[q_{\epsilon}]}$$

(em caminhos periódicos)

$$\text{Tr} [\hat{U}_{\epsilon}(\tau) \hat{A}(q_{\epsilon})] = \int \mathcal{D}q_{\epsilon} e^{-\frac{1}{\hbar} S_{\epsilon}[q_{\epsilon}]} A(q_{\epsilon}(\tau_1))$$

período $\frac{\tau}{\hbar} = \frac{1}{k_B T_Q}$

Notem que, pensando em $\int \mathcal{D}q_{\epsilon}$ como a soma sobre as configurações de uma cadeia clássica, esta mesma definição dá o valor esperado em Mecânica Estatística para observáveis de um sistema de temperatura $T_s = \frac{\hbar}{k_B}$

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}q_{\epsilon} e^{-\frac{1}{\hbar} S_{\epsilon}[q_{\epsilon}]} A(q_{\epsilon}(\tau_1))}{\int \mathcal{D}q_{\epsilon} e^{-\frac{1}{\hbar} S_{\epsilon}[q_{\epsilon}]}}$$

$$T_Q \rightarrow 0 \begin{cases} \beta \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau)] = \sum_n e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_n}$$

$$\tau \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_0} \gg e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_1} \gg e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_2}$$

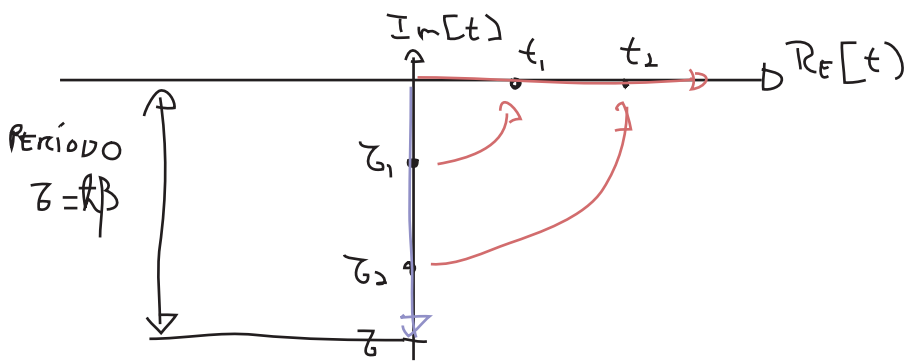
$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau \rightarrow \infty)] = \langle 0 | e^{-\frac{\tau}{\hbar} H} | 0 \rangle$$

$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau) \hat{A}(q_E)] = \langle 0 | \hat{A}(q_E) | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | \hat{A}(q_E) | 0 \rangle = \langle \hat{A} \rangle_{\beta \rightarrow \infty}$$

Mandar a temperatura para zero projeta os operadores no vácuo (estado fundamental) da teoria. Com isso podemos entender outra forma de obter os propagadores de Feynman:

$$\langle 0 | T [q(t_1) q(t_2)] | 0 \rangle$$



Podemos obter primeiro o valor

$$\langle q_E(\tau_1) q_E(\tau_2) \rangle_{\tau/\hbar} = \int_{\text{PERÍODO}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E} q_E(\tau_1) q_E(\tau_2)$$

$$(\tau_1 < \tau_2) \Rightarrow (t_1 < t_2)$$

e então voltar ao tempo real fazendo:

$$\tau_1 \rightarrow i t_1$$

$$\tau_2 \rightarrow i t_2$$

$$\Rightarrow \langle q(t_1) q(t_2) \rangle_{\tau/\hbar}$$

Se tivéssemos calculado a mesma coisa com $\tau_2 < \tau_1$ (note que na integral de trajetória não há diferença, teríamos voltado para:

$$\langle q(t_2) q(t_1) \rangle_{\tau/\hbar}$$

ou seja, voltamos sempre no produto temporalmente ordenado:

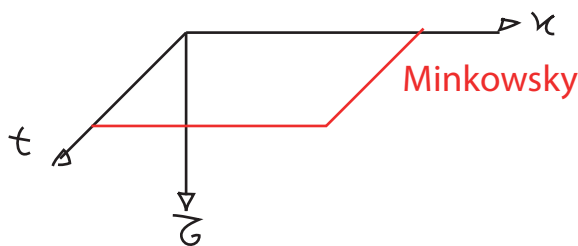
$$\langle T \{ \varphi(t_1) \varphi(t_2) \} \rangle_{z/\mu}$$

Para projetar no vácuo basta tomar temperatura zero

$$\left. \begin{array}{l} \beta \rightarrow \infty \\ T \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \langle 0 | T \{ \varphi(t_1) \varphi(t_2) \} | 0 \rangle$$

Paralelos no caso do campo escalar

$$\phi(x^\mu) \quad x^\mu = (t, \vec{x}) \quad ds^2 = -dt^2 + |\vec{x}|^2$$



$$S[\phi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \right)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + J\phi \right] \right\}$$

$$\downarrow \quad z = it$$

$$S[\phi] = \int -i d^4x_E \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \right)^2 - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \right)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + J\phi \right] \right\} =$$

$$= i \int d^4x_E \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \right)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 - J\phi \right\}$$

S_E

Que é análogo a um sistema clássico (só que em 4 dimensões):

$$G = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\nabla \cdot s)^2 + Q(T - T_c) s^2 + c s^4 - H s \right]$$

$G \rightarrow$ energia livre de Gibbs

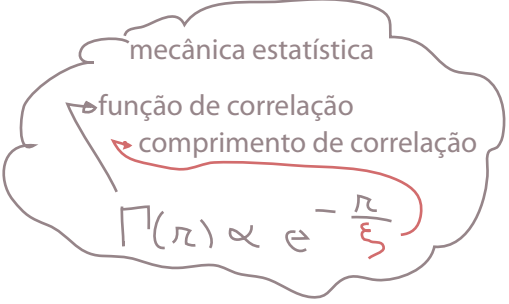
$S(x) \rightarrow$ densidade de spin

$H \rightarrow$ campo magnético

$T, T_c \rightarrow$ temperatura, temp. crítica

$Q, c \rightarrow$ constantes

$$\langle \phi(x_{E_1}) \phi(x_{E_2}) \rangle = \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{i k_E (x_{E_1} - x_{E_2})}}{k_E^2 + m^2} \underset{\substack{\approx \\ \uparrow \\ |x_{E_1} - x_{E_2}| \rightarrow \infty}}{\sim} e^{-m |x_{E_1} - x_{E_2}|}$$



Vemos que o comprimento de onda Compton dos quanta do campo (m^{-1}) faz o papel do comprimento de correlação do sistema clássico análogo.

Finalmente, notamos que uma das formas em que podemos escrever os correlatores é:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) e^{i \int d^4x \phi(x) \hat{A} \phi(x)}}{\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \phi(x) \hat{A} \phi(x)}} = i \Delta_F(x_1 - x_2)$$

$$\underbrace{\hat{A}}_{(D + m^2 - i\epsilon)} \Delta_F(x_1 - x_2) = -\delta^4(x_1 - x_2)$$

"integral kernel" de A^{-1}

$A^{-1} \phi(x) = \int \Delta_F(x-y) \phi(y) dy$

ROTAÇÃO

$$\langle \phi(x_{E_1}) \phi(x_{E_2}) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_{E_1}) \phi(x_{E_2}) e^{-\int d^4x_E \phi(x_E) \hat{A} \phi(x_E)}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^4x_E \phi(x_E) \hat{A} \phi(x_E)}}$$

Isto é análogo ao cálculo de uma média de uma variável aleatória, variando conforme uma distribuição gaussiana Z:

$$\vec{\phi} = (\phi^a; a=1 \dots N) \quad \text{aleatório} \quad \langle \phi^a \phi^b \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\vec{\phi} \exp\left(-\frac{\phi^a A_{ab} \phi^b}{2}\right) = (A^{-1})_{ab}$$

A matriz N x N simétrica

$$Z = \int \mathcal{D}\vec{\phi} \exp\left\{-\frac{\phi^a A_{ab} \phi^b}{2}\right\}$$