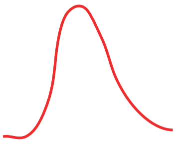
⟶ EM ALGUM SENTIDO GRANDE

$A >> 1$  $\Rightarrow \quad A^{-1} << 1 \Rightarrow \langle \phi_A \phi_B \rangle$ CURTO

$A << 1$  $\Rightarrow \quad A^{-1} >> 1 \Rightarrow \langle \phi_A \phi_B \rangle$ LONGO

Voltando para o espaço de Minkowsky isto nos permite entender porque a parte "on-shell" do propagador é reponsável por partículas se propagando por longas distâncias:

$$\Delta_F(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \, \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

Quantização do Campo Eletromagnético

(Peskin 9.4, Ryder 7.1)

Comecemos tentando o caminho ingênuo, análogo ao que fizemos no campo escalar:

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int D\phi \; e^{i\int (\mathcal{L} + J\phi)\, dx} = \frac{1}{N} \int D\phi \; e^{-i\int d^4x \left[\frac{1}{2}\phi \underbrace{(\Box + m^2 + i\varepsilon)}_{\hat{A}} \phi - \phi J\right]} =$$

$$= \exp\left[-\frac{i}{2} \int d^4x \, d^4y \, J(x) \underbrace{\Delta_F(x-y)}_{\text{KER}[\hat{A}^{-1}]} J(y)\right]$$

No caso do campo eletromagnético (sem interação com a matéria):

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int DA_\mu \; e^{i\int (\mathcal{L} + J^\mu A_\mu)\, d^4x}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$\int d^4x\, (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) = \int d^4x\, \underbrace{\partial_\mu (A_\nu \partial^\mu A^\nu)}_{\to 0} - \int d^4x\, A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = - \int d^4x\, g_{\mu\nu} A^\mu \Box A^\nu$$

$$\int d^4x\, (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu) = \int d^4x\, \underbrace{\partial_\nu (A_\mu \partial^\mu A^\nu)}_{\to 0} - \int d^4x\, A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu = - \int d^4x\, A^\mu \partial_\nu \partial_\mu A^\nu$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu\, \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu\, \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu\, \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu\, \partial^\nu A^\mu \right)$$

$$= \frac{1}{2} A^\mu \left(g_{\mu\nu} \Box - \partial_\nu \partial_\mu \right) A^\nu$$

$$\left(g_{\mu\nu} \Box - \partial_\mu \partial_\nu \right) A^\nu = 0 \quad \text{(eq. de Maxwell)}$$

Em princípio só precisaríamos inverter este operador, mas aí esbarramos em um problema: imagine uma configuração de campo específica (estamos somando sobre TODAS ELAS):

$$A^\mu(x) = \partial^\mu \alpha(x)$$

$$\left(g_{\mu\nu} \Box - \partial_\nu \partial_\mu \right) \partial^\mu \alpha = \left(\Box \partial_\nu - \partial_\nu \Box \right) \alpha = 0$$

O operador tem autovalores zero, e portanto é singular. De fato, a integral:

$$\int \mathcal{D}A_\mu \, \exp\left\{ \frac{i}{2} \int d^4x\, A_\mu(x) \left(\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu(x) \right\}$$

vai receber uma contribuição igual a "1" cada vez que considerarmos uma contribuição deste tipo. É divergente. Podemos ver que esta divergência é transmitida para o que seria a função de Green:

$$\left(g_{\mu\nu} \Box - \partial_\mu \partial_\nu \right) D^{\nu\lambda}(x-y) = \delta^\lambda_\mu\, \delta^4(x-y)$$

$$\partial^\mu \downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow \partial^\mu$$

$$\left(0 \cdot \partial_\nu \right) \overbrace{D^{\nu\lambda}}^{\text{(tem que ser realmente grande para satizfazer isto)}}(x-y) = \partial^\lambda\, \delta^4(x-y)$$

A raiz do problema está na invariância de gauge. Quando somamos sobre diversas configurações de A_μ, somamos inclusive aquelas equivalentes (ligadas por uma transformação de gauge) o que é uma forma de "multipla contagem".

$$
A_\mu \longleftrightarrow
\begin{cases}
\cancel{A_\mu + \partial_\mu \alpha_1} \\
\cancel{A_\mu + \partial_\mu \alpha_2} \\
\cancel{A_\mu + \partial_\mu \alpha_3} \ \ldots
\end{cases}
$$

já incluimos esta configuração

não devemos incluir estas

Temos que forçar a nossa integral de trajetória a considerar somente estados inequivalentes por uma transformação de gauge. Uma forma óbvia de fazê-lo é fixar o gauge, mas como fazemos isto em uma integral de trajetória?

O truque que resolve foi proposto por Faddeev e Popov. Suponha que queiramos fazer nossa integral de trajetória com um vínculo qualquer, uma função do campo que queremos que seja zero:

Vínculo: $G(A_\mu) = 0$

Podemos usar isso como fixação de gauge, ex: $G(A_\mu) = \partial_\mu A^\mu = 0$

Gauge de Lorenz

Podemos forçar a integral de trajetória a só considerar "caminhos" em que G = 0, fazendo:

$$\int DA_\mu \, e^{iS} \longrightarrow \int DA_\mu \, \underbrace{\delta(G(A))}_{\prod_i \delta[G(A_\mu(x_i))]} \, e^{iS}$$

É claro que não podemos simplesmente inserir esta delta, mas:

$$1 = \int D\alpha \; \delta\left(G(A_\mu^\alpha)\right) \, \mathrm{DET}\left[\frac{\delta G(A_\mu^\alpha)}{\delta \alpha}\right]$$

$$A_\mu^\alpha = A_\mu + \partial_\mu \alpha$$

(!!!) para entender porque isso é verdade e como proceder, vamos pensar num caso mais simples:

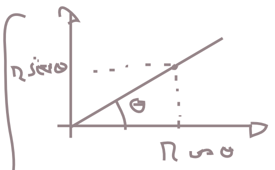
$$I = \iint dx\,dy\; e^{-(x^2+y^2)} = \underbrace{\int d\theta \underbrace{\int dr\, r\, e^{-r^2}}}_{} =$$

queremos uma expressão geral para fazer separações deste tipo

$$= \int d\theta \iiint dr\, d\theta'\, r\, e^{-r^2}\, \underbrace{\delta(\theta')}_{\text{força a integral ao eixo x}} =$$

$$1 = \int d\theta'\, \delta(\theta')$$

Como escrever a identidade se escolhemos outro eixo?



$$\delta(\rho(\theta')) \quad \left\{ \begin{array}{l} y \cos\theta = x \,\text{sen}\,\theta \\ \Downarrow \\ \rho(\theta) = y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta \end{array} \right.$$

$$\delta(\rho(\theta')) = \sum_i \frac{1}{\left|\frac{d\rho(\theta_i)}{d\theta'}\right|}\, \delta(\theta' - \theta_i) \qquad \rho(\theta_i) = 0$$

$$y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta = 0 \implies \begin{array}{l} \theta_1 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta_2 = \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{array}$$

$$\left.\frac{d\rho}{d\theta}\right|_{\theta_1,\theta_2} = r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\delta(\rho(\theta')) = \frac{1}{r}\left[\delta(\theta - \theta_1) + \delta(\theta - \theta_2)\right]$$

$$\int d\theta\, \delta[\rho(\theta)] = \frac{2}{r} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} \implies 1 = \Delta(r) \int \delta(\rho(\theta))\, d\theta$$

$$\Delta(r) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

Fazendo a rotação dos eixos: $\left\{ \begin{array}{l} y' = y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta \\ x' = x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta \end{array} \right.$

$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$

$\rho(\theta) = y'$

$$1 = \Delta\left(\sqrt{x'^2+y'^2}\right)\int \delta(y')\, d\theta$$

voltando na integral original:

$$I = \iint dx'dy'\, e^{-(x'^2+y'^2)} = \underbrace{\int d\theta}\ \underbrace{\iint dx'\, dy'\, e^{-(x'^2+y'^2)}\, \Delta\left(\sqrt{x'^2+y'^2}\right)\delta(y')}$$

aí está a separação que queríamos, possível por conta da invariância rotacional da integral inicial. Aprimorando um pouco a identidade:

$$\Delta(r)^{-1} = \int \delta(\rho(\theta))\, d\theta = \int \delta(\rho(\theta))\, \mathrm{DET}\left|\frac{d\theta}{d\rho}\right| d\rho = \mathrm{DET}\left|\frac{d\theta}{d\rho}\right|_{\rho=0}$$

$$\Delta(r) = \mathrm{DET}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right|_{\rho=0}$$

$$1 = \int d\theta\, \delta(\rho(\theta))\, \mathrm{DET}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right|_{\rho=0}$$

podemos generalizar este procedimento para integrais em mais variáveis. Com infinitas delas obtemos:

$$1 = \int D\alpha\ \delta\left(G(A_\mu^\alpha)\right)\underbrace{\mathrm{DET}\left[\frac{\delta G(A_\mu^\alpha)}{\delta\alpha}\right]}_{\Delta_G[A_\mu]}$$

$$\Delta_G^{-1}[A_\mu] = \int D\alpha\ \delta\left(G(A_\mu^\alpha)\right)$$

$$A_\mu^\alpha = A_\mu + \partial_\mu\alpha$$

$$A_\mu^{\alpha'\alpha} = A_\mu + \partial_\mu\underbrace{(\alpha+\alpha')}_{\alpha''}$$

$$\Delta_G^{-1}[A_\mu^{\alpha'}] = \int D\alpha\ \delta\left(G(A_\mu^{\alpha'\alpha})\right)$$

$$\alpha'' = \alpha+\alpha' \qquad \alpha \to \alpha'' \qquad D\alpha = D\alpha''$$

$$\Delta_G^{-1}[A_\mu^{\alpha'}] = \int D\alpha''\ \delta\left(G(A_\mu^{\alpha''})\right) \leftarrow \Delta_G^{-1}$$

é inv. de Gauge, logo não depende de α

$$\Delta_G^{-1}[A_\mu^\alpha] = \Delta_G^{-1}[A_\mu]$$

Notem que todo o "truque" só se aplica se pudermos aproveitar alguma simetria (a rotacional no exemplo simples, aqui a de Gauge), então temos que fazê-lo antes de introduzir as fontes:

$$\int DA_\mu \, e^{i\int \mathcal{L} \, d^4x} =$$

$$= \int D\alpha \underbrace{\int DA_\mu \, e^{i\int \mathcal{L} \, d^4x} \, \delta\left(G(A_\mu^\alpha)\right) \Delta_G[A_\mu]}_{} =$$

$$A_\mu \to A_\mu' - \partial_\mu \alpha \Rightarrow A_\mu^\alpha = A_\mu + \partial_\mu \alpha \to A_\mu'$$

$$DA_\mu = DA_\mu'$$

$$\mathcal{L}(A_\mu) = \mathcal{L}(A_\mu')$$

$$= \underbrace{\int D\alpha}_{} \underbrace{\int DA_\mu' \, e^{i\int \mathcal{L} \, d^4x} \, \delta\left(G(A_\mu')\right) \Delta_G[A_\mu]}_{\text{note que nada aqui depende de } \alpha}$$

infinito multiplicativo que queríamos separar do resto (vai embora na normalização)

Ainda falta entender como calcular: $\Delta_G[A_\mu]$

Não precisamos (POR ENQUANTO*) nos preocupar com este determinante, basta notar que além de invariante de Gauge ele é (PARA TEORIAS ABELIANAS*) independente de A_μ. Por exemplo, no Gauge de Lorentz :

Gauge de Lorentz

$$G(A_\mu) = \partial^\mu A_\mu \qquad G(A_\mu^\alpha) = \partial^\mu A_\mu + \partial^2 \alpha$$

$$\frac{\delta G(A_\mu^\alpha)}{\delta \alpha} = \frac{\delta}{\delta \alpha}\left(\partial^\mu A_\mu + \partial^2 \alpha\right) = \frac{\delta}{\delta \alpha}\left(\partial^2 \alpha\right)$$

*se você ficou curioso, dê uma olhada na sessão 7.2 do Ryder, entre as eqs. 7.35 e 7.46. Quantizaremos teorias não-abelianas mais a frente

$$\int \mathcal{D}A_\mu \, e^{i\int \mathcal{L}\, d^4x} = \left(\int \mathcal{D}\alpha\right)\left(\Delta_G\right)\int \mathcal{D}A_\mu \, e^{i\int \mathcal{L}\, d^4x}\,\delta(G(A_\mu))$$

Tomando uma função de fixação de Gauge genérica:

$$G(A) = \partial^\mu A_\mu(x) - \omega(x)$$

$$\int \mathcal{D}A_\mu \, e^{i\int \mathcal{L}\, d^4x} = \left(\int \mathcal{D}\alpha\right)\left(\Delta_G\right)\int \mathcal{D}A_\mu \, e^{i\int \mathcal{L}\, d^4x}\,\delta(\partial^\mu A_\mu - \omega)$$

A expressão vale para qualquer ω. Posso inclusive integrar em ω de ambos os lados, usando uma função que escolherei gaussiana para a distribuição dos $\omega(x)$

$$N(\xi)\int \mathcal{D}\omega \, e^{-i\int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi}} \int \mathcal{D}A_\mu \, e^{i\int \mathcal{L}\, d^4x} =$$

$$= N(\xi)\int \mathcal{D}\omega \, e^{-i\int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi}} \left(\int \mathcal{D}\alpha\right)\left(\Delta_G\right)\int \mathcal{D}A_\mu \, e^{i\int \mathcal{L}\, d^4x}\,\delta(\partial^\mu A_\mu - \omega)$$

$N(\xi)$ é uma normalização, que garante que $N(\xi)\int \mathcal{D}\omega \, e^{-i\int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi}} = 1$

Nada muda no lado esquerdo da equação a cima, mas posso integrar em ω do lado direito, usando a função δ

$$\int \mathcal{D}A_\mu \, e^{i\int \mathcal{L}\, d^4x} = \left(N(\xi)\right)\left(\int \mathcal{D}\alpha\right)\left(\Delta_G\right)\int \mathcal{D}A_\mu \, e^{i\int \mathcal{L}\, d^4x}\, e^{-i\int d^4x \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2}$$

O resultado final é equivalente a simplesmente modificar a Lagrangeana:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_{EFF} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF}$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2}$$ Termo de fixação de gauge (gauge fixing)

Obs.: para lembrar como o problema (e a solução) aparecem no contexto da quantização canônica, veja o Ryder (pgs 146-147)

Então temos agora:

$$\int \mathcal{D}A_\mu \, e^{i\int \mathcal{L}\, d^4x} = N(\xi)\left(\int \mathcal{D}\alpha\right)\Delta_G \int \mathcal{D}A_\mu \, e^{i\int \mathcal{L}_{EFF}\, d^4x}$$

Para esta nova lagrangeana introduzimos a fonte e obtemos o funcional gerador devidamente normalizado:

$$Z[J] = \frac{1}{N_Z} N(\xi)\left(\int \mathcal{D}\alpha\right)\Delta_G \int \mathcal{D}A_\mu \, e^{i\int (\mathcal{L}_{EFF} + J_\mu A^\mu)\, d^4x}$$

$$N_Z = N(\xi)\left(\int \mathcal{D}\alpha\right)\Delta_G \int \mathcal{D}A_\mu \, e^{i\int \mathcal{L}_{EFF}\, d^4x}$$

$$\boxed{Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}A_\mu \, e^{i\int (\mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF} + J^\mu A_\mu)\, d^4x}}{\int \mathcal{D}A_\mu \, e^{i\int (\mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF})\, d^4x}}}$$

Podemos então tentar novamente o procedimento de completar quadrados e separar a parte da fonte. A parte quadrática nos campos agora fica:

$$\int d^4x\, \mathcal{L} = \int d^4x \left[\frac{1}{2} A^\mu (g_{\mu\nu}\Box - \partial_\nu \partial_\mu) A^\nu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\right] =$$

$$= \int d^4x \left[\frac{1}{2} A^\mu (g_{\mu\nu}\Box - \partial_\nu \partial_\mu) A^\nu + \frac{1}{2\xi} A^\mu (\partial_\mu \partial_\nu) A^\nu\right]$$

$$= \int d^4x \, \frac{1}{2} A^\mu \underbrace{\left[g_{\mu\nu}\Box + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\partial_\mu \partial_\nu\right]}_{\text{temos que inverter este operador}} A^\nu =$$

No espaço dos momentos temos:

$$= \int d^4x \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{A}^\mu(k_1) e^{-ik_1x} \left[g_{\mu\nu} \Box + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \partial_\mu \partial_\nu \right] \tilde{A}^\nu(k_2) e^{-ik_2x} =$$

$$= \int d^4x \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{A}^\mu(k_1) e^{-ik_1x} \left[-g_{\mu\nu} (k_2)^2 - \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) k_{2\mu} k_{2\nu} \right] \tilde{A}^\nu(k_2) e^{-ik_2x} =$$

$$= \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} d^4k_2 \, \delta^4(k_1 + k_2) \frac{1}{2} \tilde{A}^\mu(k_1) \left[\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k_{2\mu} k_{2\nu} - g_{\mu\nu} (k_2)^2 \right] \tilde{A}^\nu(k_2) =$$

$$k \equiv k_1$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{A}(k) \left[\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2 \right] \tilde{A}^\nu(-k)$$

Este operador tem inverso e podemos mostrar que este é:

$$\tilde{D}(k)_{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]$$

> atenção: aqui segui a notação do Peskin - incluindo um fator "i" na definição do propagador. No caso do escalar, usei a do Ryder, de forma que
>
> $\Delta_F(p) = \frac{1}{p^2 - m^2}$ $\quad \langle T\{\phi\phi\}\rangle = i\Delta_F(x-y)$
>
> No Peskin é definido:
>
> $D_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}$ $\quad \langle T\{\phi\phi\}\rangle = D_F(x-y)$
>
> No caso do fóton o Ryder faz:
>
> $\left[\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2 \right] D(k)^{\nu\beta} = -\delta_\mu^\beta$
>
> $\tilde{D}(k)_{\mu\nu} = \frac{-1}{k^2 + i\varepsilon} \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]$

$$\hat{A}_{\mu\nu} \tilde{D}(k)^{\nu\rho} = \left[\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2 \right] \frac{-i}{k^2} \left[g^{\mu\rho} + (\xi - 1) \frac{k^\mu k^\rho}{k^2} \right] =$$

$$= -\frac{i}{k^2} \left[\left(\cancel{1} - \cancel{\frac{1}{\xi}}\right) k^\rho k_\nu - \delta_\nu^\rho k^2 + \left(\cancel{\xi} \cancel{-1} + \cancel{\frac{1}{\xi}}\right) k^\rho k_\nu + \left(\cancel{-\xi} \cancel{+1}\right) k_\nu k^\rho \right] = i \delta_\nu^\rho$$

Assim temos o propagador em alguns Gauges conhecidos:

$$\xi = 1 \implies \tilde{D}(k)_{\mu\nu} = \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon}$$

(Gauge de Feynman)

$$\xi = 0 \implies \tilde{D}(k)_{\mu\nu} = -\frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \left[g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]$$

(Gauge de Landau)

Como estamos falando de uma teoria livre, a única regra de Feynman que podemos obter é mesmo a do propagador