Simetrias no formalismo funcional

(Peskin 9.6)

Considere a função de três pontos:

$$\langle \Omega | T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\} | \Omega \rangle = \frac{1}{N}\int \mathcal{D}\phi \, e^{iS} \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)$$

(eq. 69.1)

Pensemos em uma pequena mudança de variáveis (exigir que a ação fosse estacionária perante tal mudança nos levaria as equações de movimento clássicas):

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \underbrace{\varepsilon(x)}_{\text{PEQUENO}}$$

$$\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$$

$$\int \mathcal{D}\phi \, e^{i\int d^4x \mathcal{L}(\phi)} \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) = \int \mathcal{D}\phi \, e^{i\int d^4x \mathcal{L}(\phi')} \phi'(x_1)\phi'(x_2)\phi'(x_3)$$

Espandindo o lado direito para ε(x) pequeno, temos:

$$\boxed{\mathcal{L}'(\phi(x)) = \frac{\delta}{\delta\phi(x)}\int d^4y \, \mathcal{L}(\phi(y))}$$

$$\int \mathcal{D}\phi \, e^{i\int d^4x \left[\mathcal{L}(\phi) + \varepsilon(x)\mathcal{L}'(\phi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right]} \left(\phi(x_1)+\varepsilon(x_1)\right)\left(\phi(x_2)+\varepsilon(x_2)\right)\left(\phi(x_3)+\varepsilon(x_3)\right) =$$

$$= \int \mathcal{D}\phi \, e^{i\int d^4x \mathcal{L}(\phi)} \left(1 + i\int d^4x \, \varepsilon(x)\mathcal{L}'(\phi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)\Big[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + \varepsilon(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) +$$

$$+ \phi(x_1)\varepsilon(x_2)\phi(x_3) + \phi(x_1)\phi(x_2)\varepsilon(x_3) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\Big] =$$

$$= \underbrace{\int \mathcal{D}\phi \, e^{i\int d^4x \mathcal{L}(\phi)} \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)}_{\text{é o mesmo que temos do lado esquerdo de 69.1}} + \int \mathcal{D}\phi \, e^{i\int d^4x \mathcal{L}(\phi)} \Big\{ i\int d^4x \left(\varepsilon(x)\mathcal{L}'(\phi)\,\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\right) +$$

$$+ \varepsilon(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + \phi(x_1)\varepsilon(x_2)\phi(x_3) + \phi(x_1)\phi(x_2)\varepsilon(x_3) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\Big\}$$

Portanto:

$$0=\int D\phi\, e^{i\int d^4x \mathcal{L}(\phi)}\Big\{ i\int d^4x\, \varepsilon(x)\mathcal{L}'(\phi)\,\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + \varepsilon(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + \phi(x_1)\varepsilon(x_2)\phi(x_3) + \phi(x_1)\phi(x_2)\varepsilon(x_3) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\Big\}$$

$$\varepsilon(x_1) = \int d^4x\; \delta(x-x_1)\,\varepsilon(x)$$

$$0=-i\int D\phi\, e^{i\int d^4x \mathcal{L}(\phi)}\int d^4x\, \varepsilon(x)\Big[-\mathcal{L}'(\phi)\,\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + i\delta(x-x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + i\phi(x_1)\delta(x-x_2)\phi(x_3) + i\phi(x_1)\phi(x_2)\delta(x-x_3) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\Big]$$

Como esta expressão tem que valer para qualquer $\varepsilon(x)$, temos (em ordem ε):

$$0=\int D\phi\, e^{i\int d^4x \mathcal{L}(\phi)}\Big[-\mathcal{L}'(\phi)\,\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + i\delta(x-x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + i\phi(x_1)\delta(x-x_2)\phi(x_3) + i\phi(x_1)\phi(x_2)\delta(x-x_3)\Big] \quad \text{(eq. 70.1)}$$

No caso em que $\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$

$$\mathcal{L}'(\phi) = -\Box\phi - m^2\phi$$

temos:

$$0=\int D\phi\, e^{i\int d^4x \mathcal{L}(\phi)}\Big[(\Box+m^2)\phi(x)\,\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + i\delta(x-x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + i\phi(x_1)\delta(x-x_2)\phi(x_3) + i\phi(x_1)\phi(x_2)\delta(x-x_3)\Big]$$

$$(\Box+m^2)\int D\phi\, e^{i\int d^4x \mathcal{L}(\phi)}\,\phi(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) = -i\int D\phi\, e^{i\int d^4x \mathcal{L}(\phi)}\Big[\delta(x-x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + \phi(x_1)\delta(x-x_2)\phi(x_3) + \phi(x_1)\phi(x_2)\delta(x-x_3)\Big]$$

que, dividido pela normalização, nos dá:

$$(\Box+m^2)\langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\}|\Omega\rangle = -i\langle\Omega|T\{\delta(x-x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\}|\Omega\rangle +$$

$$-i\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\,\delta(x-x_2)\phi(x_3)\}|\Omega\rangle - i\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\,\delta(x-x_3)\}|\Omega\rangle$$

o que também vale para um número arbitrário de campos:

$$\boxed{(\Box+m^2)\langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\}|\Omega\rangle = -i\sum_{i=1}^{n}\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\dots\delta(x-x_i)\dots\phi(x_n)\}|\Omega\rangle}$$

(eq. 71.1)

O que nos diz que $\phi(x)$ (lembrando que o operador age em x e não x_i) satisfaz a equação de Klein Gordon dentro de qualquer valor esperado a menos de termos onde x é igual a um dos x_i. Estes termos são chamados de termos de contato. A versão desta igualdade para n = 1 nos dá um resultado já conhecido:

$$(\Box+m^2)\underbrace{\langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(x_1)\}|\Omega\rangle}_{i\Delta_F(x-x_1)} = -i\,\delta^4(x-x_1)\underbrace{\langle\Omega|\Omega\rangle}_{1}$$

Para obter o que ocorre no caso de uma lagrangeana qualquer, com um campo genérico φ, voltamos na eq. 70.1(substituindo ϕ por φ) e notamos que:

$$\mathcal{L}'(\varphi(x),\partial_\nu\varphi(x)) = \frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left[\int d^4y\,\mathcal{L}(\varphi(y),\partial_\nu\varphi(y))\right] = \left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi)}\right)\right|_{\varphi=\varphi(x)}$$

Que é justamente o que seria zero nas equações de Euler-Lagrange para φ. A equação obtida é:

$$\boxed{\left\langle\left(\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\int d^4x'\,\mathcal{L}(\varphi(x'))\right)\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left\langle\varphi(x_1)\dots\left(i\delta(x-x_i)\right)\dots\varphi(x_n)\right\rangle}$$

Estas equações de movimento quânticas para os correlatores são conhecidas como Equações de Schwinger-Dyson.

$$\boxed{\text{PS: } \langle\hat{O}\rangle = \langle\Omega|T\{\hat{O}\}|\Omega\rangle}$$

Leis de Conservação

Novamente, vamos usar uma pequena mudança de variáveis na integral funcional, só que agora o faremos na direção de uma simetria da lagrangeana, para obter o análogo quântico do teorema de Noether. Vejamos um caso simples:

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2|\phi|^2 \qquad \phi(x) \in \mathbb{C}$$

$$\phi(x) \to e^{i\alpha}\phi(x)$$

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}$$

Faremos a seguinte mudança de variáveis nas integrais: $\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + i\alpha(x)\phi(x)$

$$\mathcal{D}\phi = \mathcal{D}\phi'$$ (a transformação é unitária e Det[U] = 1)

Pensando na função de dois pontos:

$$\int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}[\phi]} \phi(x_1)\phi^*(x_2) = \int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}[\phi']} \phi'(x_1)\phi'^*(x_2)\Big|_{\phi' = (1+i\alpha)\phi}$$

Expandindo para $\alpha(x)$ pequeno e considerando apenas os termos lineares em $\alpha(x)$ (análogo ao que fizemos nas pags 69-70):

$$0 = \int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}[\phi]} \Big\{ i\int \Big[(\partial_\mu \alpha)\, \overbrace{i\left(\phi\,\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi\right)}^{j^\mu(x)} \Big] \phi(x_1)\phi^*(x_2)\, d^4x \, +$$
$$+ \left[i\alpha(x_1)\phi(x_1)\right]\phi^*(x_2) + \phi(x_1)\left[-i\alpha(x_2)\phi^*(x_2)\right] \Big\}$$

$$\int d^4x\, (\partial_\mu \alpha(x))\, j^\mu(x) = -\int d^4x\, \alpha(x)\, \partial_\mu j^\mu$$

$$0 = \int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}[\phi]} \Big\{ -i\int d^4x \left[\alpha(x)\left(\partial_\mu j^\mu\right)\phi(x_1)\phi^*(x_2)\right] +$$
$$+ \left[i\alpha(x_1)\phi(x_1)\right]\phi^*(x_2) + \phi(x_1)\left[-i\alpha(x_2)\phi^*(x_2)\right] \Big\}$$

$$0 = i\int \mathcal{D}\phi \, e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}[\phi]} \int d^4x \, \alpha(x) \Big[-(\partial_\mu j^\mu)\, \phi(x_1)\, \phi^*(x_2) + \delta(x-x_1)\, \phi(x_1)\phi^*(x_2) + {} - \delta(x-x_2)\, \phi^*(x_2) \Big]$$

Como isto vale para qualquer $\alpha(x)$:

$$0 = i\int \mathcal{D}\phi \, e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}[\phi]} \Big[-(\partial_\mu j^\mu)\, \phi(x_1)\, \phi^*(x_2) + \delta(x-x_1)\, \phi(x_1)\phi^*(x_2) - \delta(x-x_2)\, \phi^*(x_2) \Big]$$

$$\langle \partial_\mu j^\mu \, \phi(x_1)\, \phi^*(x_2) \rangle = \langle \delta(x-x_1)\, \phi(x_1)\, \phi^*(x_2) \rangle - \langle \phi(x_1)\, \delta(x-x_2)\, \phi^*(x_2) \rangle$$

O que novamente nos dá a conservação clássica mais os termos de contato. Esta é a equação de Schwinger-Dyson para conservação de correntes.

Correções Radiativas

(Peskin 7.1, S. Weinberg QTF - Vol1 - 10.7)

Vamos agora olhar mais profundamente o que acontece com as funções de Green da teoria quando "ligamos" a interação. Comecemos com o seguinte objeto:

$$\langle \underline{\Omega} | \, T\{\phi(x)\, \phi(y)\} \, | \underline{\Omega} \rangle$$

estado fundamental (vácuo) da teoria interagente

Como interpretamos este objeto? Tomemos auto-estados de $\hat{H}$ e $\hat{\vec{P}}$: $\underline{|\lambda_p\rangle}$

podem ter uma ou mais partículas

Definamos: $|\lambda_0\rangle \rightarrow \hat{\vec{P}}\,|\lambda_0\rangle = 0$

$$|\lambda_0\rangle \xrightarrow{\text{Boost } \vec{P}} |\lambda_p\rangle$$

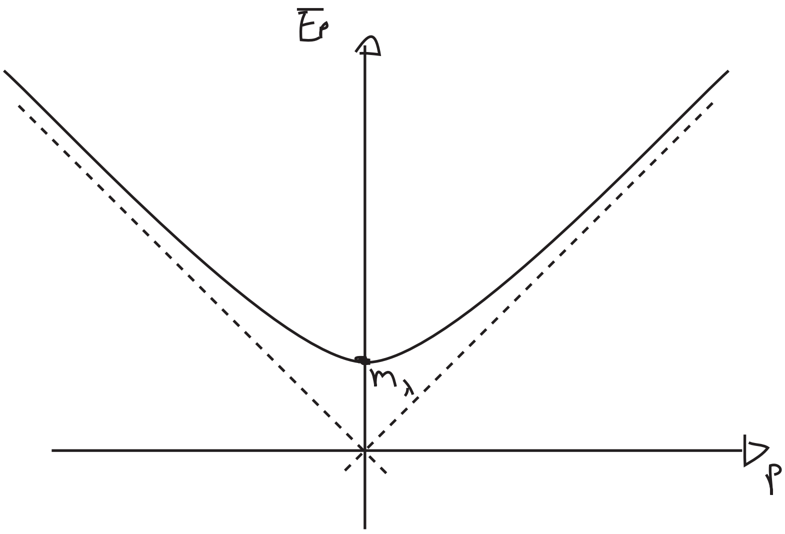
A invariancia de Lorentz de $\hat{H}$ me diz que $|\lambda_p\rangle$ é auto-estado de $\hat{H}$

$$\hat{H}\,|\lambda_p\rangle = E_p(\lambda)\,|\lambda_p\rangle$$

$$E_p(\lambda) \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + \underbrace{m_\lambda^2}}$$

Estou definindo como "massa", a energia do estado em seu referencial de repouso

(o que faz todo sentido para estados de 1 partícula ou mesmo estados ligados)



$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} |\lambda_p\rangle\langle\lambda_p|$$

$$x^0 > y^0$$

$$\langle\Omega| T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle = \langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle =$$

$$= \langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle \underbrace{\langle\Omega|\phi(y)|\Omega\rangle}_{0} + \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \langle\Omega|\phi(x)|\lambda_p\rangle\langle\lambda_p|\phi(y)|\Omega\rangle$$

$$\langle\Omega|\phi(x)|\lambda_p\rangle = \langle\Omega| \underbrace{e^{i\hat{P}x}\phi(0)e^{-i\hat{P}x}}_{\text{translação}} |\lambda_p\rangle = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_p\rangle e^{-ipx}\Big|_{p^0=E_p}$$

$$= \langle\Omega|U^{-1}U\phi(0)U^{-1}\underbrace{U}|\lambda_p\rangle e^{-ipx}\Big|_{p^0=E_p} = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle e^{-ipx}\Big|_{p^0=E_p}$$

boost de $\vec{p}$ para 0

$$U|\lambda_p\rangle = |\lambda_0\rangle$$

$$U\phi(0)U^{-1} = \phi(0) \qquad \langle\Omega|U^{-1} = \langle\Omega|$$

para campos de spin maior teríamos que ter mais cuidado aqui (vai para a lista)

$$\langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p(\lambda)}|\langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle|^2 e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}e^{-iE_p(x_0-y_0)} =$$

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}e^{-iE_p(x_0-y_0)}}{2E_p(\lambda)} \underset{x_0>y_0}{=} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip(x-y)}$$

Se você vem seguindo as ambiguidades de notação (pgs 60 e 68), aqui virtualmente acaba a diferença entre os livros pois o Ryder, na pag 255 define um propagador "conectado" que tem um fator "i". Manipulando as equações 7.66 e 7.68 dá para mostrar que:

$$i\,G_c^{(2)}(x_1,x_2) = i\,G^{(n)}(x_1,x_2)$$

$$i\,G_c^{(2)}(x_1,x_2) = i\,(i\Delta_F(x_1,x_2))$$

$$G_c^{(2)}(x_1,x_2) = i\,\Delta_F(x_2,x_1) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2}e^{-ik(x_2-x_1)}$$

Como é este o propagador usado para as discussões que se seguem, acaba a ambiguidade

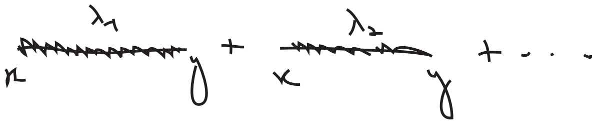
$$D_F(k) = \frac{i}{p^2-m^2}$$

$$= \sum_\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m_\lambda^2+i\varepsilon}e^{-ip(x-y)}|\langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle|^2$$

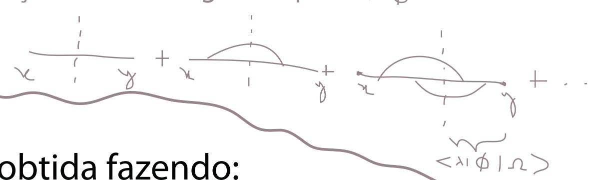
Poderíamos fazer o mesmo para o caso $y_0 > x_0$ e obter:

$$\langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle = \sum_\lambda |\langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle|^2 D_F(x-y, m_\lambda^2)$$

Note que obtemos o propagador de Feynman com a massa substituída por m_λ. Para cada estado λ contribuindo para a função de 2 pontos temos também um "peso" dado pela amplitude de criação daquele estado a partir do vácuo.



em teoria de perturbação isto seria algo do tipo: $(\lambda\phi^3)$



Uma forma útil de escrever esta soma pode ser obtida fazendo:

$$\langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi}\sum_\lambda (2\pi)\,\delta(M^2-m_\lambda^2)\,|\langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle|^2 D_F(x-y,M^2) =$$

$$\boxed{\rho(M^2) = \sum_\lambda (2\pi)\,\delta(M^2-m_\lambda^2)\,|\langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle|^2}$$

Densidade espectral

$$= \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi}\rho(M^2)\,D_F(x-y,M^2)$$

(representação espectral de Källén-Lehmann)

É importante notar que, para um estado intermediário de uma partícula:

$$x \xrightarrow{\ \phi\ } y$$

teremos $m_\lambda = m$, onde m é o autovalor de energia no referencial de repouso da partícula. Esse estado contribui com uma função $\delta(M^2 - m^2)$ para a densidade espectral

$$\rho(M^2) = 2\pi\,\delta(M^2 - m^2)\cdot\underbrace{Z}_{|\langle\Omega|\phi(0)|1_0\rangle|^2} + \underbrace{\sigma(M^2)}_{\text{contribuições de estados de 2 ou mais partículas.}}$$

estado de 1 partícula com momento zero

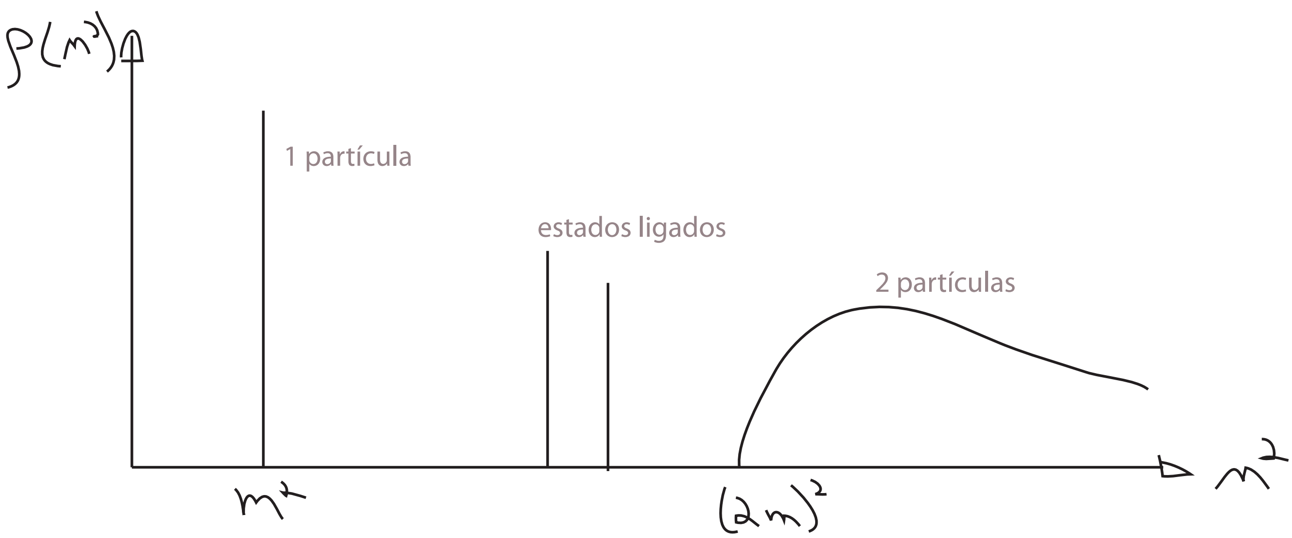
$Z \longrightarrow$ Field Strength Renormalization

Como já vimos, esta massa "m" é a massa observável da partícula interagente e vai, em geral, diferir daquela que aparece na lagrangeana, que chamaremos de m_0

$m \longrightarrow$ Massa física

$m_0 \longrightarrow$ Massa nua (*bare mass*)

Em relação às contribuições de mais partículas, $\sigma(M^2)$, temos essencialmente duas prossibilidades: a partir da energia em que possamos produzir duas ou mais partículas reais "livres" temos um espectro contínuo da massa m_λ. Mas abaixo desta energia podemos, dependendo da interação específica, ter estados ligados de duas ou mais partículas. Neste caso teremos polos adicionais em massas entre m e 2 m. Isto nos leva a uma forma tipicamente do tipo:

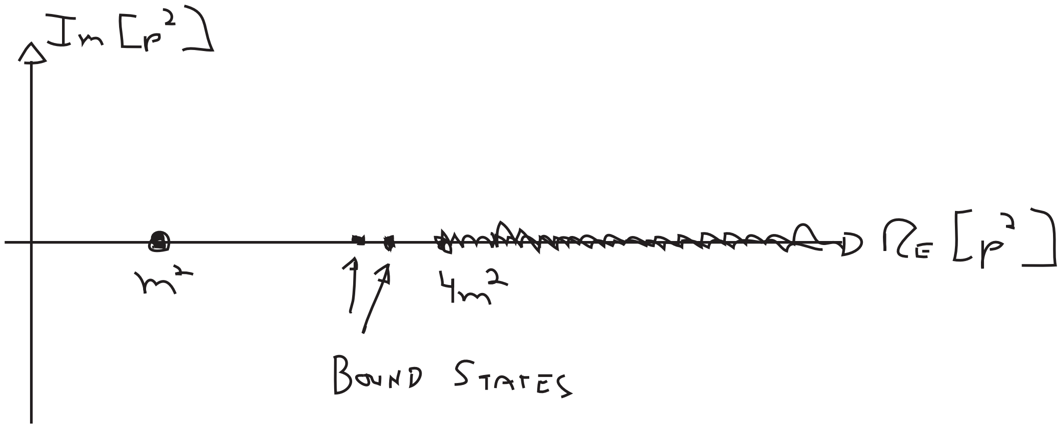


Passando para o espaço dos momentos:

$$\int d^4x\, e^{ipx}\langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(0)\}|\Omega\rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi}\,\rho(M^2)\,\frac{i}{p^2 - M^2 + i\varepsilon} =$$

$$= \frac{i Z}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + (\text{BOUND STATES}) + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi}\,\rho(M^2)\,\frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

Que tem a seguinte estrutura analítica no plano complexo:



Comparemos este resultado com o caso de um campo livre:

$$\int d^4x\, e^{ipx} \langle 0 | T\{\phi(x)\phi(0)\} | 0 \rangle = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

Os dois são semelhantes e fica claro que temos que levar Z para 1 quando "desligamos" a interação. De fato, é possível mostrar que (veja Weinberg, 10.7) :

$$\boxed{\int_0^{\infty} \rho(M^2)\, dM^2 = 1} \quad \& \quad \boxed{1 = Z + \int_0^{\infty} \sigma(M^2)\, dM^2}$$

O que também nos garante que a contribuição de estados de muitas partículas desaparece na teoria livre.

PS: no caso de espinores de Dirac, o mesmo raciocínio nos levaria a:

$$\int d^4x\, e^{ipx} \langle \Omega | T\{\psi(x)\bar{\psi}(0)\} | \Omega \rangle = \frac{i Z_2 \sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots =$$

$$= \frac{i Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

$$\boxed{\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2}\, u^s(p)}$$