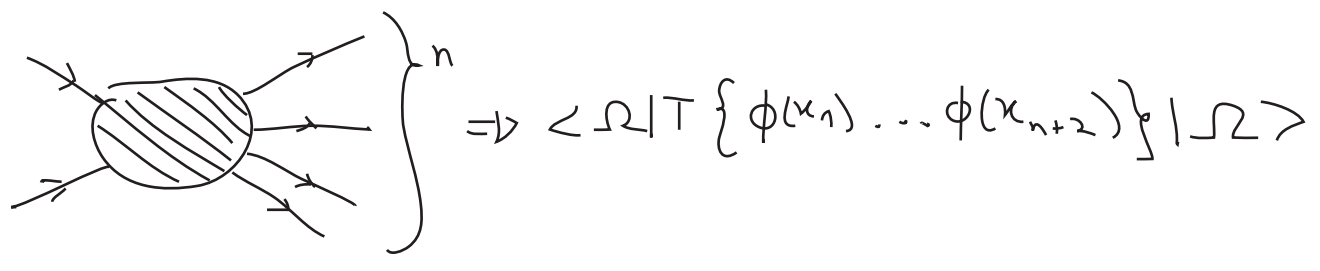


PS2: obter de fato a forma da densidade espectral é uma tarefa árdua por se tratar de um cálculo não-perturbativo. Um método envolve a utilização de relações de dispersão. Quem estiver interessado pode ler: Weinberg, sec 10.8 ou Peskin, sec 18.4

A matriz S e a fórmula de redução LSZ (Lehmann, Symanzik, Zimmerman)

(Peskin 7.2, Ryder 6.8 e 7.3)

Vamos ver o que acontece quando generalizamos estas idéias para correlatores maiores



Vamos escolher um dos pontos acima (que chamaremos de x) e fazer a transformada de Fourier nele:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\int d^4x = \underbrace{\int_{T_+}^{\infty} dx^0}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{T_-}^{T_+} dx^0}_{\text{II}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{T_-} dx^0}_{\text{III}}$$

$$T_+ > \forall z_i^0 > T_-$$

A integral na região II é uma função analítica de p^0 (não contribui para os polos)

Na região I o tempo x^0 é maior que os outros, portanto:

$$\int_{T_+}^{\infty} d^4x \int d^3k e^{iP^0 x^0} e^{-i\vec{P} \cdot \vec{x}} \langle \Omega | \phi(x) T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{k}}(\lambda)} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\vec{k}} \rangle \langle \lambda_{\vec{k}} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\langle \Omega | \phi(x) | \lambda_k \rangle = \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle e^{-i k x} \quad \left. \begin{array}{l} \text{v. p. } \neq \gamma \\ k^0 = E_k(\lambda) \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{\lambda} \int_{T_+}^{\infty} dx^0 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \underbrace{\int d^3 x e^{+i \vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x}}}_{(2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{p})} \frac{1}{2E_p(\lambda)} e^{i p^0 x^0} e^{-i E_k x^0} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \times \langle \lambda_k | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

$$= \sum_{\lambda} \int_{T_+}^{\infty} dx^0 \frac{1}{2E_p(\lambda)} e^{-i(E_p - p^0)x^0 - \epsilon x^0} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \times \langle \lambda_p | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

Para garantir convergência

$$x^0 \rightarrow x^0 - T_+ \quad \begin{cases} dx^0 \rightarrow dx^0 \\ x^0 = T_+ \rightarrow 0 \quad x^0 = 0 \\ x^0 = \infty \rightarrow x^0 = \infty \end{cases} \Rightarrow e^{-i(E_p - p^0)x^0 - \epsilon x^0} \rightarrow e^{-i(E_p - p^0)x^0 - \epsilon x^0} e^{i(E_p - p^0)T_+ + \epsilon T_+}$$

$$= \sum_{\lambda} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \frac{i}{[p^0 - E_p(\lambda) + i\epsilon]} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_p | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

Esta é uma função de p_0 com singularidades em todos os pontos $E_p(\lambda)$. Se estas singularidades são polos isolados ou cortes vai depender da teoria específica. Vamos nos interessar com o que ocorre próximo ao polo que equivale a uma partícula de massa (física) m .

$$p^2 - m^2 = p_0^2 - |\vec{p}|^2 - m^2 = p_0^2 - \underbrace{(|\vec{p}|^2 + m^2)}_{E_p^2} = (p_0 + E_p)(p_0 - E_p)$$

$$\lim_{p_0 \rightarrow +E_p} p^2 - m^2 = 2E_p(p_0 - E_p)$$

$$\int d^4 x e^{i p x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{p_0 \rightarrow E_p}_{\text{estado de 1 partícula com momento } \vec{p}} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \vec{p} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$\langle \Omega | \phi_0 | \Omega \rangle$ estado de 1 partícula com momento zero

este símbolo quer dizer "tem polos iguais a" (estamos desprezando os termos finitos)

Se fizermos o mesmo para a região III, veremos que

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{p_0 \rightarrow -E_p}_{\sim} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \Omega | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | -\vec{p} \rangle$$

Gostaríamos de continuar fazendo isso para todos os outros campos dentro do produto temporalmente ordenado, mas temos que ter cuidado com o isolamento das partículas externas. A forma de fazer isso é voltar na página 78 e, ao invés da transformada de Fourier, usamos um pacote de onda estreito:

$$\int d^4x e^{i p^0 x_0} e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x}} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^4x e^{i p^0 x_0} e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}} \psi(\vec{k})$$

$\psi(\vec{k})$: distribuição estreita centrada em \vec{p} (voltamos a transformada de Fourier se fizemos esta distribuição virar uma delta de Dirac)

Esta pequena indeterminação no momento da partícula associada faz com que ela fique com a posição contida em uma região do tamanho deste pacote. Retraçando todo o raciocínio acima teremos agora:

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi(\vec{k}) \frac{1}{2E_k(\lambda)} \frac{i}{p^0 - E_k(\lambda) + i\epsilon} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_k | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{\sim}_{\vec{p} \rightarrow E_p} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i \psi(\vec{k})}{\vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \vec{k} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

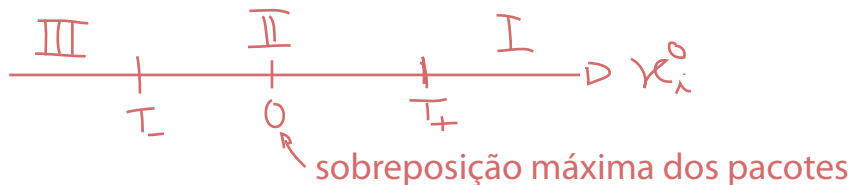
$$\vec{p} = (p_0, \vec{k})$$

Na prática agora o polo "anda" conforme variamos \vec{k} , ou seja, o polo de uma partícula virou um pequeno corte cujo comprimento é a largura de $\psi(\vec{k})$. A volta ao caso anterior é bem definida conforme estreitamos $\psi(\vec{k})$ até que vire uma delta e o corte volta a ser um polo.

Se fizermos o mesmo para todos os pontos na função de $n+2$ pontos da página 78, obteremos:

$$\int \prod_{i=1}^{n+2} \left(\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} d^4 x_i e^{i \tilde{P}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

De novo temos três regiões:



Se tomarmos os tempos que dividem as regiões suficientemente grandes (para o passado ou futuro) podemos assumir que nestas regiões já não há mais sobreposição alguma dos pacotes e dividir cada uma das integrais anteriores em três regiões, assim como fizemos antes. Mais uma vez, não precisamos nos preocupar com a região II, pois as integrais nessa região resultam em funções analíticas. Pensemos nas regiões I e III, e no caso em que só "empacotamos" dois campos:

$$x_1^0, x_2^0 \in I$$

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \int \prod_{i=1,2} \left(\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} d^4 x_i e^{i \tilde{P}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right)$$

$$\times \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_k \rangle \langle \lambda_k | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

É aqui os pacotes de onda se tornam importantes. Como este estado tem que ser aniquilado por campo que sofrem a restrição de só serem diferentes de zero em locais isolados do espaço ele tem que ser composto de duas excitações distintas e isoladas espacialmente. Neste caso podemos fazer a aproximação:

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_k \rangle \langle \lambda_k | =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_1}} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_2}} \langle \Omega | \phi(x_1) | \lambda_{k_1} \rangle \langle \Omega | \phi(x_2) | \lambda_{k_2} \rangle \langle \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} |$$

Agora podemos separar a contribuição dos "polos" de uma partícula (que na verdade agora são pequenos cortes):

$$\int \prod_{\lambda=1}^2 \left(\frac{\int d^3k_i}{(2\pi)^3} \int d^4x_i e^{i\tilde{p}_i x_i} \varphi_i(k_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle \sim$$

$$\underbrace{\left(\begin{matrix} \tilde{p}_1^0 \rightarrow E_{k_1} \\ \tilde{p}_2^0 \rightarrow E_{k_2} \end{matrix} \right)} \int \prod_{\lambda=1}^2 \left(\frac{\int d^3k_i}{(2\pi)^3} \varphi_i(k_i) \frac{i\sqrt{z^1}}{\tilde{p}_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | 0 \rangle$$

Para voltarmos em estados assintóticos de momento bem definido, basta tomar o limite em que os pacotes viram funções delta. A expressão acima se torna:

$$\prod_{\lambda=1}^2 \left(\frac{i\sqrt{z^1}}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right)_{out} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

Finalmente, podemos fazer o mesmo para as funções que restam (colocando-as na região III - passado) e vemos que o termo mais singular de:

$$\int \prod_{\lambda=1}^{n+2} \left(\frac{\int d^3k_i}{(2\pi)^3} \int d^4x_i e^{i\tilde{p}_i x_i} \varphi_i(k_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

$$\sim \prod_{\lambda=1}^{n+2} \left(\frac{i\sqrt{z^1}}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right)_{out} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | (-\vec{p}_3) (-\vec{p}_4) \dots \rangle_{in}$$

contém em si elementos de matriz de S

Resumindo

$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$
 ↓ pacotes de onda

$\prod (\text{propagadores completos}) \langle S \rangle$
 ↑ volta ao pacote estreito

$\int \prod \frac{\int d^3k_i}{m} \varphi_i(\vec{k}_i) \langle \phi_1 \dots \phi_{n+2} \rangle$
polos
termo mais singular
 $\int \prod \int d^3k_i \frac{\varphi_i(\vec{k}_i) \sqrt{z^1}}{p_i^2 - \vec{k}_i^2 - m^2} \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | \vec{k}_3 \dots \rangle$

* se pudermos inverter a ordem das duas operações indicadas, fica bem fácil obter os elementos da matriz S. Na prática esquecemos todo o caminho que envolve os pacotes e calculamos o correlator da teoria interagente no espaço dos momentos:

$$\prod_{i=1}^n \int d^4x_i e^{i p_i x_i} \prod_{j=1}^m \int d^4y_j e^{-i k_j y_j} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(y_1) \dots \phi(y_m) \} | \Omega \rangle$$

$$\underset{\substack{p_i^0 \rightarrow E_{p_i} \\ q_j^0 \rightarrow E_{q_j}}}{\sim} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{Z}^i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\prod_{j=1}^m \frac{\sqrt{Z}^i}{k_j^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | S | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_m \rangle$$

(eq. 83.1)

ai basta olhar a função resultante na região em que todas as partículas externas estão "on-shell", perto de seus polos. O coeficiente do produto de todos os polos é o elemento de matriz S.

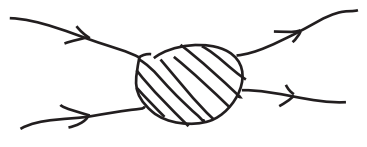
ps: no caso de partículas com spin, teremos fatores tais como $u^s(p)$ acompanhando os propagadores, neste caso temos também que separar estes fatores da matriz S, multiplicando por polarizações que projetem nos estados de spin finais e iniciais do espalhamento que queremos calcular

ps2: também temos que lidar com o fator \sqrt{Z} , podemos identificar quanto ele vale na função de dois pontos de cada partícula e "separá-lo" junto com os propagadores para obter a matriz S

Importante: note que o fator Z e a massa física apareceram neste desenvolvimento geral, mesmo sem termos identificado qualquer divergência nas correções radiativas. Suponha que estivessemos trabalhando em poucas dimensões e as integrais de loop convergissem. Teríamos que introduzir Z e uma massa m diferente daquela na lagrangeana (m_0)?

De fato, a possibilidade de fazer esta inversão foi provada por Lehmann, Symanzik, and Zimmermann e a equação 83.1 acima é conhecida como **Fórmula de Redução de LSZ**

Vamos tentar expressar esta fórmula por meio de diagramas de Feynman. Consideremos um caso simples:



Consideramos apenas os diagramas conectados, já que os desconectados não possuem a multiplicação de 4 polos que procuramos.

lembre-se, por exemplo, da teoria $\lambda\phi^4$ -

$$\text{X} = \Delta_F(x_1-z) \Delta_F(x_2-z) \Delta_F(x_3-z) \Delta_F(x_4-z) \quad (\text{pg 38-40})$$

$$\text{---} + \text{---} \sim \Delta_F \Delta_F$$