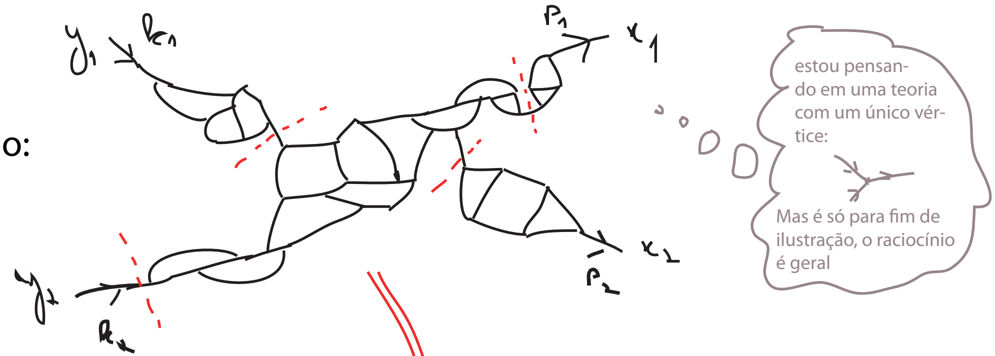
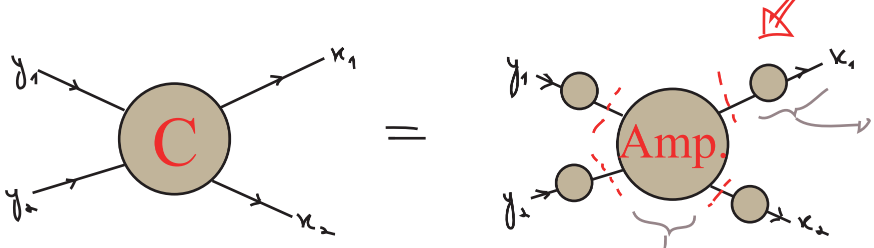
A função de quatro pontos no espaço dos momentos é:

$$\left(\prod_1^2 \int d^4x_i\, e^{ip_i x_i}\right)\left(\prod_1^2 d^4y_i\, e^{-ik_i y_i}\right)\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(y_1)\phi(y_2)\}|\Omega\rangle$$

Isso pode ser bem complicado:



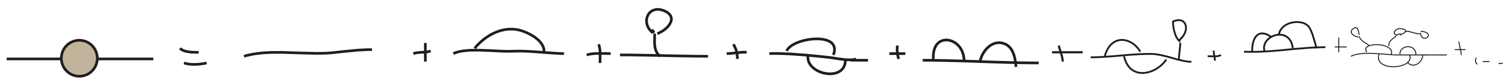
Mas podemos agrupar as correções da seguinte forma



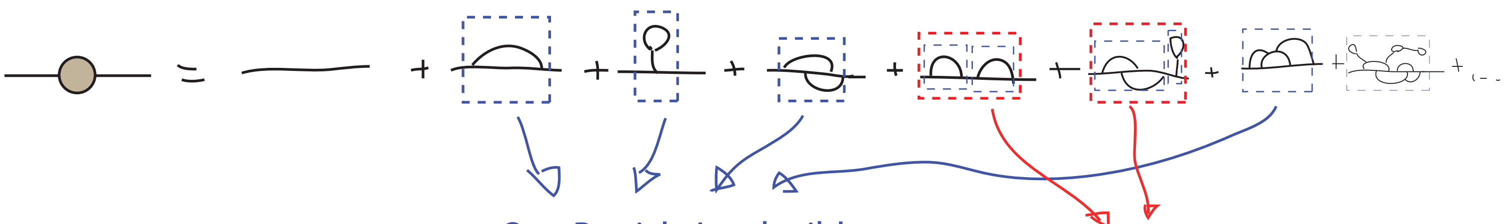
com isso agrupamos todas correções que só modificam o propagador nestas "pernas" - os Propagadores Vestidos ou Completos

Resta a parte que modifica o vértice da interação que chamamos de diagrama Amputado

Pensemos primeiro na estrutura dos propagadores:



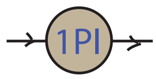
Podemos dividir as correções em dois grupos:

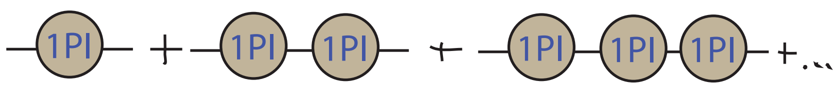


One Particle Irreducible
1PI

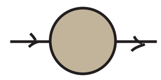
One Particle Reducible
1Pr

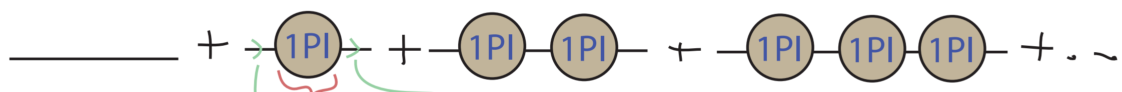
Se definirmos um objeto que coleciona todas as correções 1PI:

$-iM^2(p^2) =$ 

fica claro que as correções 1Pr serão dadas por: 

De forma que a função de dois pontos completa pode ser escrita como:

$$\int d^4x \, \langle \Omega | T\{\psi(x)\bar{\psi}(0)\} | \Omega \rangle e^{ipx} =$$  $$=$$

$$=$$  $$=$$

$$= \frac{i}{p^2-m_0^2} + \frac{i}{p^2-m_0^2}(-iM^2)\frac{i}{p^2-m_0^2} + \frac{i}{p^2-m_0^2}(-iM^2)\frac{i}{p^2-m_0^2}(-iM^2)\frac{i}{p^2-m_0^2} + \dots =$$

$$= \frac{i}{p^2-m_0^2}\left(1 + (-iM^2)\frac{i}{p^2-m_0^2} + (-iM^2)\frac{i}{p^2-m_0^2}(-iM^2)\frac{i}{p^2-m_0^2} + \dots\right) =$$

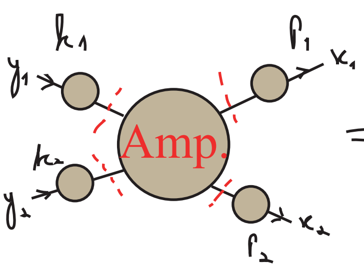
$$= \frac{i}{p^2-m_0^2}\left(1 - \frac{M^2}{p^2-m_0^2}\right)^{-1} = \frac{i}{p^2-m_0^2-M(p^2)^2}$$

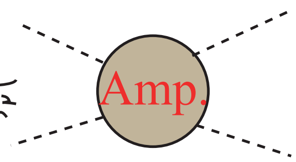
O propagador completo é dado por uma função complicada, que envolve a auto energia M. Conforme a discussão das pags 76-77, sabemos que perto de $p^0 = E_p$ o único polo presente é o da massa física:

$$\frac{i}{p^2-m_0^2-M(p^2)^2} \underset{p^0 \to E_p}{\sim} \frac{iZ}{p^2-m^2} + \text{(função sem polos)}$$

Isso quer dizer que se formos para a região: $\begin{cases} p_1^0 \to E_{p_1} \\ p_2^0 \to E_{p_2} \\ k_1^0 \to E_{k_1} \\ k_2^0 \to E_{k_2} \end{cases}$

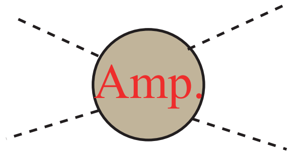
A função de quatro pontos terá o seu termo mais singular na forma:



$$= \frac{iZ}{p_1^2-m^2}\frac{iZ}{p_2^2-m^2}\frac{iZ}{k_1^2-m^2}\frac{iZ}{k_2^2-m^2}$$  $$+ \underbrace{\dots}_{\text{termos regulares}}$$

onde, do lado direito, resta apenas o vértice e suas correções (diagramas Amputados)

Comparando isto com o lado direito da a fórmula de LSZ (eq. 83.1), reconhecemos os produtos dos polos e vemos que a matriz S deve ser:

$$\langle p_1\, p_2 | S | k_1 k_2 \rangle = Z^2$$ 

Para fins de ilustração, no caso $\lambda\phi^4$, (em teoria de perturbação) tínhamos (pg 40):

$$\langle \Omega | T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\,\phi(y_1)\,\phi(y_2)\}|\Omega\rangle =$$

$$= \underbrace{-3\left[\;=\;\right] - \frac{i\lambda}{4!}\left[72\left(\;\overset{\circ}{=}\;\right)\right.}_{\text{desconectados } (\Delta_F \Delta_F)} + \underbrace{24\left(\;\times\;\right)}_{\Delta_F\Delta_F\Delta_F\Delta_F}\Big] + O(\lambda^2)$$

$$-i\lambda \int \Delta_F(z-x_1)\,\Delta_F(z-x_2)\,\Delta_F(z-x_3)\,\Delta_F(z-x_4)\,dz$$

$$= -i\lambda \int dz \int \frac{d^4k_1\, d^4k_2\, d^4k_3\, d^4k_4}{(2\pi)^{16}} \frac{i\, e^{-ik_1(z-x_1)}}{k_1^2 - m_0^2} \cdots \frac{i\, e^{-ik_4(z-x_4)}}{k_4^2 - m_0^2} =$$

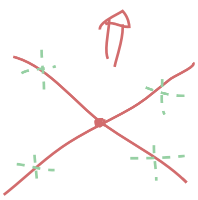
$$\int dz\, e^{-iz(\cdots)} \rightarrow (2\pi)^4\,\delta^4(k_1 + k_2 + k_3 - k_4)$$

$$= -i\lambda \int \frac{d^4k_1\, d^4k_2\, d^4k_3\, d^4k_4}{(2\pi)^{12}} \frac{i}{k_1^2 - m_0^2} \cdots \frac{i}{k_4^2 - m_0^2}\,\delta^4(k_1 + k_2 + k_3 - k_4)\, e^{ik_1x_1} \cdots e^{ik_4x_4}$$

que é a função no espaço das posições. Passando para o espaço dos momentos:

$$\int d^4x_1\, e^{ip_1'x_1} \int d^4x_2\, e^{ip_2'x_2} \int d^4x_3\, e^{-ik_1'x_3} \int d^4x_4\, e^{-ik_2'x_4} \langle \Omega | T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\,\phi(y_1)\,\phi(y_2)\}|\Omega\rangle =$$

$$= \underbrace{-i\lambda\,(2\pi)^4\,\delta^4(-p_1' - p_2' + k_1' + k_2')}_{\Uparrow} \cancel{\frac{i}{p_1^2 - m_0^2}}\, \cancel{\frac{i}{p_2^2 - m_0^2}}\, \cancel{\frac{i}{k_1^2 - m_0^2}}\, \cancel{\frac{i}{k_2^2 - m_0^2}}$$

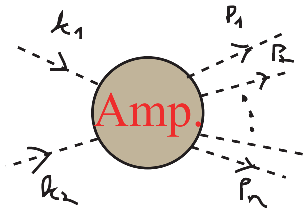


amputação

notem que nessa caso não temos o Z (pois estamos em Leading Order)

Uma análise equivalente para funções de mais pontos nos leva a:

$$\langle p_1 \dots p_n | S | k_1, k_2 \rangle = \left(\sqrt{Z}\right)^{n+2}$$



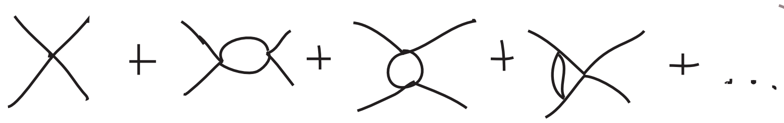
Note que para campos com spin teríamos fatores de polarização no lado direito, tal como $u_s(k)$ ou $\varepsilon_\mu(k)$

Funções de Vértice

(Ryder 7.3)

Da mesma forma que fizemos para o propagador, podemos também definir uma soma para todas as correções do vértice (por exemplo em $\lambda\phi^4$):

$$-i\lambda\Gamma =$$



$$-i\lambda\Gamma(p_1,p_2,p_3,p_4) = -i\lambda + \dots$$

$$\Gamma(p_1,p_2,p_3,p_4) = 1 + \dots$$

$\Gamma^{(4)}$

No caso da QED: $$-ie\,\Gamma^\nu(p',p) = -ie\gamma^\nu + \dots$$

$$\Gamma^\nu(p',p) = \gamma^\nu + \dots$$

$\Gamma^{(3)}$

Note que no caso da teoria $\lambda\phi^4$ temos um vértice com 4 pernas externas e na QED com três. Podemos também (em ambas as teorias) definir uma função de vértice para duas pernas externas.

$$\Pi^{(2)}(p) =$$

$$\Pi^{(2)}(p) =$$

Vamos ver como podemos definir estas funções para qualquer ordem o obter um funcional gerador para elas. Primeiro definimos:

$$\phi_{cl}(J(x)) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} = -i\frac{1}{Z[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}$$

para J = 0 $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\delta Z[J]}{\delta J} = \langle 0|\phi|0\rangle = 0 \\ Z[J] = 1 \end{array} \right.$

mas estamos pensando em J ≠ 0

$$\phi_{cl}(J(x)) = -i\,\frac{\langle\Omega|\phi|\Omega\rangle_J}{\langle\Omega|\Omega\rangle_J}$$

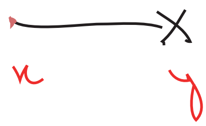
Pensemos neste objeto em uma teoria escalar livre:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\phi(\Box+m^2)\phi + \phi J\right) \rightarrow Z_0[J] = e^{-\frac{i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\,\Delta_F(x-y)\,J(y)}$$

$$\Delta_F(k) = \frac{1}{p^2-m^2}$$

$$W_0 = -i\ln Z_0 = -\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\,\Delta_F(x-y)\,J(y)$$

$$\phi_{cl}[J(x)] = -\int d^4y\, \Delta_F(x-y)\, J(y) \xRightarrow{\text{DIAGRAMA}}$$



$\hookrightarrow$ que é a solução clássica do sistema

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi + J$$

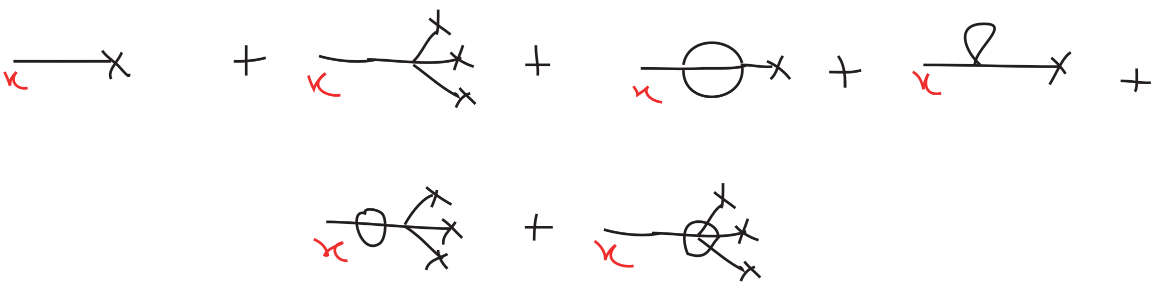
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \phi J$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi$$

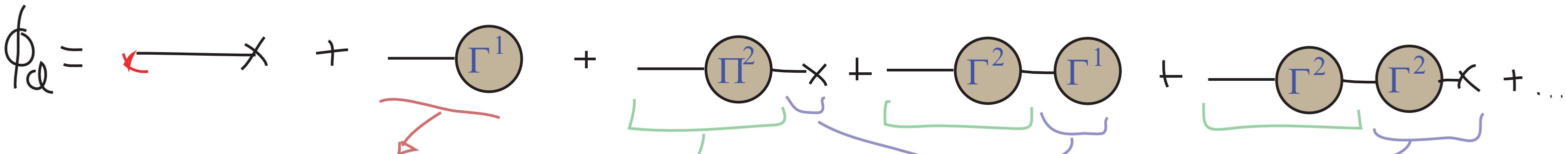
$$\Box\phi - m^2\phi + J = 0 \Rightarrow (\Box - m^2)\phi = -J$$

$$\phi_{cl} = -(\Box - m^2)^{-1} J$$

Supondo agora que eu "ligasse" a interação, as contribuições para esta função de um ponto seriam (pensando em $\lambda\phi^4$):



Pensando em termos de diagramas 1PI (e em uma teoria mais geral):

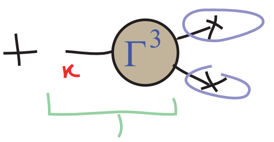


$$-\int d^4y\, \Delta_F(x-y)\, J(y)$$

$\Delta_F(x-y)\Gamma^1$

$\Delta_F(x-y)\Gamma^2$

$\phi_{cl}[J]$



$\Delta_F(x-y)\Gamma^3\, \phi_{cl}[J]\, \phi_{cl}[J]$

$$\phi_{cl}(x) = -\int d^4y\, \Delta_F(x-y)\Big\{ J(y) + \Big(\Gamma^{(1)}(y) + \int d^4z\, \Pi^{(2)}(y,z)\, \phi_{cl}(z) + \frac{1}{2}\int d^4z\, d^4z'\, \Gamma^{(3)}(y,z,z')\, \phi_{cl}(z)\, \phi_{cl}(z') + \dots \Big) \Big\}$$

(eq. 89.1)

Vamos definir o funcional gerador para estas funções de vértice:

$$\hat{\Gamma}[\phi_{cl}] \equiv \int d^4x\, \Gamma^{(1)}(x)\, \phi_{cl}(x) + \frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\, \Pi^{(2)}(x,y)\, \phi_{cl}(x)\phi_{cl}(y) + \dots$$

$$\boxed{\Gamma^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = \frac{\delta}{\delta\phi_{cl}(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta\phi_{cl}(x_n)}\, \hat{\Gamma}[\phi_{cl}]\Big|_{\phi_{cl}=0}}$$

Comparando isto com 89.1, temos:

$$\frac{\delta W}{\delta J(x)} = \phi_{cl}(J(x)) = -\int d^4y\, \Delta_F(x-y)\left(J(y) + \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_{cl}]}{\delta \phi_{cl}(y)} \right)$$

$$(\Box+m^2)\,\phi_{cl}(J(x)) = -\int d^4y\,\underbrace{(\Box+m^2)\Delta_F(x-y)}_{-\delta(x-y)}\left(J(y)+\frac{\delta\hat{\Gamma}[\phi_{cl}]}{\delta\phi_{cl}(y)}\right)$$

$$(\Box+m^2)\,\phi_{cl}(J(x)) - \frac{\delta\hat{\Gamma}[\phi_{cl}]}{\delta\phi_{cl}(x)} = J(x)$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi_{cl}(x)}\Big(\underbrace{\hat{\Gamma}[\phi_{cl}] - \frac{1}{2}\int d^4y\,\phi_{cl}(J(y))\,(\Box+m^2)\,\phi_{cl}(J(y))}_{\Gamma[\phi_{cl}]}\Big) = -J(x)$$

(eq. 90.1)

$$\boxed{\left.\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{cl}(x)}\right|_{\phi_{cl}=0} = -J(x)}$$

(eq. 90.1)

$$\left.\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{cl}(x)\,\delta\phi_{cl}(y)}\right|_{\phi_{cl}=0} = \underbrace{\Pi^{(2)}(x,y) - (\Box+m^2)_y\,\delta(x-y)}_{\Gamma^{(2)}(x,y)}$$

$$n\geq 2 \Rightarrow \Gamma^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = \left.\frac{\delta}{\delta\phi_{cl}(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta\phi_{cl}(x_n)}\hat{\Gamma}[\phi_{cl}]\right|_{\phi_{cl}=0}$$

Suponha que definamos $\Gamma[\phi_{cl}]$ com a expressão:

$$\boxed{W[J] = \Gamma[\phi_{cl}] + \int dx\,J(x)\,\phi_{cl}(x)} \Rightarrow \boxed{\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \phi_{cl}(x)}$$

(eq. 90.2) (eq. 90.3)

$$\frac{\delta}{\delta\phi_{cl}(y)}\left(\Gamma[\phi_{cl}] = W[J] - \int dx\,J(x)\,\phi_{cl}(x)\right)$$

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_{cl}]}{\delta\phi_{cl}(y)} = \underbrace{\frac{\delta W[J]}{\delta\phi_{cl}(y)}}_{\left.\underbrace{\frac{\delta W[J]}{\delta J(y)}}_{\phi_{cl}(y)}\frac{\partial J(\phi)}{\partial\phi_{cl}}\right|_{\phi_{cl}=\phi_{cl}(y)}} - \left.\frac{\partial J(\phi)}{\partial\phi_{cl}}\right|_{\phi_{cl}=\phi_{cl}(y)}\phi_{cl}(y) - J(y)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_{cl}]}{\delta \phi_{cl}(y)} = -J(y)$$

que é justamente como o definimos antes (eq. 90.1)

Note que a função 1PI de dois pontos é $\Pi^{(2)}(x,y)$ e não $\Gamma^{(2)}(x,y)$

Temos uma interpretação para $\Gamma^{(2)}$?

Teoria livre
$\Delta_F^c(x-y) = i\,\Delta_F(x-y) = \frac{-i}{p^2-m_0^2}$

$$\phi_{cl}(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)}$$

$\Delta_F^c(x-y)$ Propagador completo

$$\frac{\delta \phi_{cl}(x)}{\delta J(y)} = \frac{\delta^2 W}{\delta J(y)\,\delta J(x)} = i\,\overbrace{\langle\Omega|T\{\phi(x)\,\phi(y)\}|\Omega\rangle}^{\Delta_F^c(x-y)}$$

pg 41

EQ 89.1

$$-\Delta_F(x-y)\left(1+\int d^4z\, \Pi^{(2)}(y,z)\,\underbrace{\frac{\delta\phi_{cl}(z)}{\delta J(y)}}_{i\Delta_F^c(z-y)} + \underbrace{\dots}_{\to\, 0 \;/\; J=\phi_{cl}=0}\right) = i\,\Delta_F^c(x-y)$$

Quando faço $\boxed{J = 0}$ $\to$ $\phi_{cl} = 0$ (pg 88)

$$-\Delta_F(x-y) - i\,\Delta_F(x-y)\int d^4z\, \Pi^{(2)}(y,z)\,\Delta_F^c(z-y) = \overbrace{i\,\Delta_F^c(x-y)}^{\int d^4z\,\delta^4(z-x)\,\Delta_F^c(z-y)}$$

$$-(\Box+m^2)_x\left(\int d^4z\left(\delta^4(z-x) + \Delta_F(x-y)\,\Pi^{(2)}(y,z)\right)\Delta_F^c(z-y) = i\,\Delta_F(x-y)\right)$$

$$\int d^4z\left(\underbrace{-(\Box+m^2)_x\,\delta^4(z-x) + \delta(x,y)\,\Pi^{(2)}(y,z)}_{\Gamma^{(2)}(x,z)\ (\text{pg } 90)}\right)\Delta_F^c(z-y) = i\,\delta(x-y)$$