

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_a]}{\delta \phi_a(y)} = -J(y)$$

que é justamente como o definimos antes (eq. 90.1)

Note que a função 1PI de dois pontos é $\Pi^{(2)}(x, y)$ e não $\Gamma^{(2)}(x, y)$

Temos uma interpretação para $\Gamma^{(2)}$?

TEORIA LIVRE
 $\Delta_F^C(x-y) = i \Delta_F(x-y) = \frac{-i}{p^2 - m_0^2}$

$$\phi_a(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} \quad \Delta_F^C(x-y) \text{ Propagador completo}$$

$$\frac{\delta \phi_a(x)}{\delta J(y)} = \frac{\delta^2 W}{\delta J(y) \delta J(x)} = i \langle n | T \{ \phi_a(x) \phi(y) \} | n \rangle$$

EQ 89.1

$$- \Delta_F(x-y) \left(1 + \int d^4z \Pi^{(2)}(y, z) \frac{\delta \phi_a(z)}{\delta J(y)} + \dots \right) = i \Delta_F^C(x-y)$$

$i \Delta_F^C(z-y) \rightarrow 0 \text{ / } J = \phi_a = 0$

Quando faço $J=0 \rightarrow \phi_a = 0$ (eq 88)

$$- \Delta_F(x-y) - i \Delta_F(x-y) \int d^4z \Pi^{(2)}(y, z) \Delta_F^C(z-y) = i \Delta_F^C(x-y)$$

$$-(\square+m)^2_x \left(\int d^4z \left(\delta^4(z-x) + \Delta_F(x-y) \Pi^{(2)}(y, z) \right) \Delta_F^C(z-y) = i \Delta_F^C(x-y) \right)$$

$$\int d^4z \left(\underbrace{-(\square+m)^2_x \delta^4(z-x) + \delta(x, y) \Pi^{(2)}(y, z)}_{\Gamma^{(2)}(x, z) \text{ (eq 90)}} \right) \Delta_F^C(z-y) = i \Delta_F^C(x-y)$$

$$\int d^4y \Gamma^{(2)}(x,y) \Delta_F^C(y-y) = i \delta(x-y)$$

(eq. 92.1)

$\Gamma^{(2)}(x,y)$ é a inversa do propagador completo! No espaço dos momentos:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^{(2)}(x,y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} \Gamma^{(2)}(p) \\ \Delta_F^C(y,y) &= \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{-i p'(y-y)} \Delta_F^C(p') \end{aligned} \right\} \begin{cases} \int d^4y \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} \Gamma^{(2)}(p) \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{-i p'(y-y)} \Delta_F^C(p') = i \delta(x-y) \\ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \delta^4(p-p') \Gamma^{(2)}(p) \Delta_F^C(p') e^{-i p x} e^{i p' y} = i \delta(x-y) \\ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Gamma^{(2)}(p) \Delta_F^C(p) e^{-i p(x-y)} = i \delta(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} i e^{-i p(x-y)} \end{cases}$$

$$\Gamma^{(2)}(p) \Delta_F^C(p) = i$$

(eq. 92.2)

$$\Delta_F^C(p) = \frac{i}{p^2 - \underbrace{m^2}_{m^2 = m_0^2 + M^2(p^2)}}$$

massa física \rightarrow $m^2 = m_0^2 + M^2(p^2)$ \rightarrow correções 1PI ao propagador (pg 85)
 massa livre \rightarrow m_0^2
 função de Green de 2-pontos completa

$$\Gamma^{(2)}(p) = -i (p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)) = i (M^2(p^2) - (p^2 - m_0^2))$$

$$\Gamma^{(2)}(x,y) = \Gamma^{(2)}(x,y) - (0 + m_0^2) \delta(x-y)$$

Queremos achar relações análogas a 92.1 e 92.2 para vértices de mais pontos. Notando que:

$$\Delta_F^C(y-y) = \left(-i \frac{\delta^2 W}{\delta J(y) \delta J(y)} \right) \stackrel{90.3}{=} -i \frac{\delta \phi_a(y)}{\delta J(y)}$$

Podemos escrever a seguinte derivada

$$\frac{\delta}{\delta J(x'')} = \int d^4z'' \frac{\delta \phi_a(z'')}{\delta J(x'')} \frac{\delta}{\delta \phi_a(z'')} = i \int d^4z'' \Delta_F^C(z'', x'') \frac{\delta}{\delta \phi_a(z'')}$$

(eq. 92.3)

$$\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x'')} \int d^3z \Delta_F^c(x, z) \Gamma^{(2)}(z, y) = 0$$

$$\int d^3z \left(\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x'')} \Delta_F^c(x, z) \right) \Gamma^{(2)}(z, y) + \int d^3z \Delta_F^c(x, z) \left(\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x'')} \Gamma^{(2)}(z, y) \right) = 0$$

92.3

$$\int d^3z \left(-i \frac{\delta^3 W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x'') \delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(y)} \right) \Gamma^{(2)}(z, y) + i \int d^3z d^3z'' \Delta_F^c(x, z) \times \Delta_F^c(z'', x'') \left(\frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_\alpha(z'') \delta \phi_\alpha(z) \delta \phi_\alpha(y)} \right) = 0$$

$\times i \Delta_F^c(x', y)$
 $\int dy$

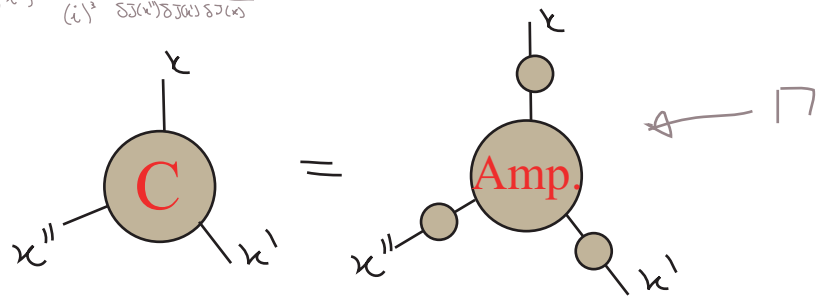
$$\int d^3z \frac{\delta^3 W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x'') \delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(y)} \int dy \underbrace{(\Delta_F^c(x', y) \Gamma^{(2)}(z, y))}_{i \delta(x' - y)} +$$

$$- \int d^3z d^3z'' dy \Delta_F^c(x, z) \Delta_F^c(z'', x'') \Delta_F^c(x', y) \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_\alpha(z'') \delta \phi_\alpha(z) \delta \phi_\alpha(y)} = 0$$

$y \rightarrow z'$

$$i \frac{\delta^3 W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x'') \delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(z')} = \int d^3z d^3z'' d^3z' \Delta_F^c(x, z) \Delta_F^c(z'', x'') \Delta_F^c(x', z') \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_\alpha(z'') \delta \phi_\alpha(z) \delta \phi_\alpha(z')}$$

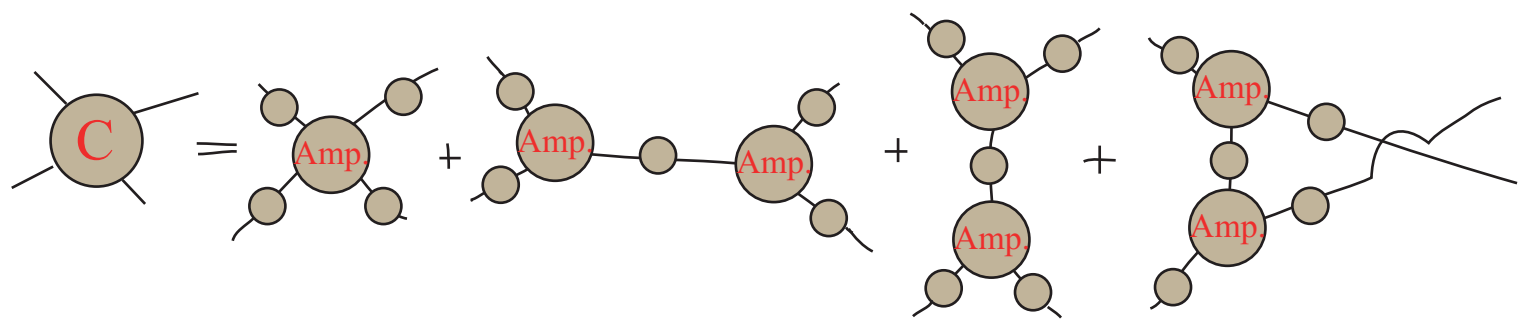
$$\phi(x, x', x'') = \frac{1}{(i)^3} \frac{\delta^3 W}{\delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(x') \delta \mathcal{J}(x')}$$



O que nos mostra que a função de vértice de fato contém os diagramas amputados que queríamos. Outra forma de ver isso é invertendo a expressão acima:

$$\frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta\phi(z'') \delta\phi(z) \delta\phi(z')} = - \int dx dx' dx'' \underbrace{\Gamma^{(A)}(x, z) \Gamma^{(A)}(x', z') \Gamma^{(A)}(x'', z'')}_{\text{como estes são os inversos dos propagadores completos, o efeito deles sobre o correlator será o de "amputar" os propagadores.}} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x'') \delta J(x) \delta J(x')} \quad (\text{eq. 94.1})$$

Podemos continuar derivando para obter expressões para as funções de ordem superior. Em termos de diagramas, a expressão para a função de 4 pontos seria:



Obs: note que na pg 90, trocamos a definição de $\Gamma[\phi_q]$ dada por 90.1 por:

$$W[J] = \Gamma[\phi_q] + \int dx J(x) \phi_q(x)$$

com $\boxed{\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \phi_q(x)} \quad \boxed{\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_q(x)} = -J(x)}$

$$f(x) \rightarrow g(\mu) \quad \mu = \frac{df}{dx}$$

$$g(\mu) = f(x) - \mu x$$

o que é uma generalização da transformada de Legendre

Identidades de Ward-Takahashi na QED

(Ryder 7.4, Peskin 7.4)

Com as definições feitas nas últimas páginas podemos agora provar uma generalização das identidades de Ward para os propagadores e vértices completos, as identidades de Ward-Takahashi. Começemos notando que quando quantizamos o campo eletromagnético fomos obrigado a fixar o gauge, pensando na Lagrangeana da QED:

$$\mathcal{L}_{\text{EFF}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi + i e \bar{\Psi} \not{A} \Psi - m \bar{\Psi} \Psi - \underbrace{\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2}_{\mathcal{L}_{\text{GF}}} \quad (\text{eq. 94.2})$$

A Lagrangeana fixada, no entanto, não é invariante de gauge - mas precisamos que os observáveis da teoria - que vêm das funções de Green - o sejam. Portanto o funcional gerador deve ser invariante. Assim, dada uma transformação de gauge infinitesimal:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha \quad \alpha = \alpha(x)$$

$$\psi \rightarrow \psi - i e \alpha \psi$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} + i e \alpha \bar{\psi}$$

vamos ver o que acontece com Z. Lembrando que no funcional gerador aparece:

$$S = \int d^4x \left(\mathcal{L}_{\text{EFF}} + \bar{J}^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\Psi} \eta \right)$$

Quase toda a lagrangeana efetiva é invariante de gauge, com exceção do termo de gauge-fixing:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 &\rightarrow -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu + \square \alpha) (\partial^\nu A_\nu + \square \alpha) = \\ &= -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{\xi} \underbrace{(\partial^\mu A_\mu)(\square \alpha)}_{\text{integração por partes:}} + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &\quad \int d^4x (\partial^\mu A_\mu)(\square \alpha) = \int d^4x (\square \partial^\mu A_\mu) \alpha(x) \end{aligned}$$

As fontes também contribuem para a variação:

$$\begin{aligned} \underbrace{\bar{J}^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\Psi} \eta}_{\mathcal{L}_F} &\rightarrow \mathcal{L}_F + \underbrace{\bar{J}^\mu \partial_\mu \alpha}_{\text{integração por partes:}} - i e \alpha \bar{\eta} \psi + i e \alpha \bar{\Psi} \eta \\ &\quad \int d^4x \bar{J}^\mu \partial_\mu \alpha = - \int d^4x (\partial_\mu \bar{J}^\mu) \alpha(x) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iS} &\rightarrow N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{2\xi} (\square \partial^\mu A_\mu) - \partial_\mu \bar{J}^\mu + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i e \bar{\eta} \psi + i e \bar{\Psi} \eta \right] \alpha(x) \right\} e^{iS} \end{aligned}$$

Considerando que $\alpha(x)$ é pequeno, podemos expandir a exponencial e obter:

$$Z \rightarrow Z + N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \left\{ \int d^4x \underbrace{\left[-\frac{1}{\xi} (\square \partial^\nu A_\nu) - \partial_\mu \bar{J}^\mu - i e (\bar{\eta} \Psi - \bar{\Psi} \eta) \right]}_{\hat{O}[A_\mu, \bar{\Psi}, \Psi]} \alpha(x) \right\} e^{iS}$$

Uma forma simples de tratar \hat{O} é usar o mesmo método que usamos para tratar interações anteriormente - transformamos ele em um operador diferencial agindo na exponencial da ação, fazendo as substituições:

$$\Psi \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \quad \bar{\Psi} \rightarrow -\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta} \quad A_\mu \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\mu}$$

$Z = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{iS_{\text{can}} + i \int d^4x (J^\mu A_\mu + \bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta)}$

Então:

$$\hat{O}[A_\mu, \bar{\Psi}, \Psi] = \left[+\frac{i}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta}{\delta J^\nu} - \partial^\mu \bar{J}_\mu - e \left(\bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right]$$

$$Z \rightarrow \left(1 + \int d^4x \alpha(x) \hat{O} \right) Z$$

Para garantir a invariância de Z , qualquer que seja α , precisamos que: $\hat{O} Z = 0$ ↖ zero!

$$\left[+\frac{i}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta}{\delta J^\nu} - \partial^\mu \bar{J}_\mu - e \left(\bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right] Z = 0$$

$$Z = e^{iW}$$

$$\left[-\frac{1}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta W}{\delta J^\nu} - \partial^\mu \bar{J}_\mu - i e \left(\bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta W}{\delta \eta} \right) \right] e^{iW} = 0$$

$$-\frac{1}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta W}{\delta J^\nu} - \partial^\mu \bar{J}_\mu - i e \left(\bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} + \frac{\delta W}{\delta \eta} \eta \right) = 0$$

Fazemos então uma generalização da definição para as funções de vértice, usando a transformação de Legendre mas três variáveis:

$$\Gamma[\Psi_\mu, \bar{\Psi}_\mu, A_\mu^0] = W[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] - \int d^4x (\bar{\eta} \Psi_\mu + \bar{\Psi}_\mu \eta + J^\mu A_\mu^0)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} = -J^\mu \quad \frac{\delta W}{\delta \bar{J}} = A_\mu^a$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a} = +\bar{\eta} \quad \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} = \psi_a$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a} = -\eta \quad \frac{\delta W}{\delta \eta} = -\bar{\psi}_a$$

* parece errado no Ryder

* tem um i na derivada em A e um sinal errado entre os fermiônicos

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu^a} \left(-\frac{1}{\xi} \square \partial^\nu A_\nu^a + \partial^\nu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} - i e \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a} \psi_a + \bar{\psi}_a \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a} \right) \right) = 0$$

alguns autores se referem a esta equação como Ward Takahashi ou W-T Generalizada

(eq. 97.1)

Esta relação entre os geradores das funções de vértice garante a invariância de gauge de Z em todas as ordens de perturbação. A partir dela podemos obter algumas relações mais conhecidas:

(I) aplicando as derivadas abaixo de ambos os lados de 97.1

$$\frac{\delta}{\delta \psi_a(y)} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a(x)} \psi_a(x) \right) = \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \left[\delta(x-y) \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a(x)} + \dots \right] = -\delta(x-y) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_a(x) \delta \bar{\psi}_a(x)} + \dots$$

$$\frac{\delta}{\delta \psi_a(y)} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \left(\bar{\psi}_a(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \right) = \frac{\delta}{\delta \psi_a(y)} \left[\delta(x-x_1) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a(x)} + \dots \right] = \delta(x-x_1) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_a(y) \delta \bar{\psi}_a(x)}$$

e então fazemos: $\psi_a = \bar{\psi}_a = A_\mu^a = 0$

$$\frac{\delta^3 \Gamma[0]}{\delta \psi_a(y) \delta \bar{\psi}_a(x_1) \delta A_\mu^a(x)} = +i e \left(-\delta(x-y_1) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \psi_a(x) \delta \bar{\psi}_a(x_1)} + \delta(x-x_1) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \psi_a(y) \delta \bar{\psi}_a(x)} \right)$$

$$\frac{\delta^3 \Gamma^{(3)}_{ijN}(y_1, x_1, x)}{\delta \psi_a(y) \delta \bar{\psi}_a(x_1) \delta A_\mu^a(x)} = i e \delta(x-x_1) [S_F^c(y_1-x)]^{-1} - i e \delta(x-y_1) [S_F^c(x-x_1)]^{-1}$$

(eq. 97.2)

Passando para o espaço dos momentos temos:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-x_1) \left[\Sigma_F^<(y_1-x) \right]^{-1} = \\ & = \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-x_1) \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(y_1-x)} \left[\Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = \\ & = \int d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx_1} \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(y_1-x_1)} \left[\Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = \\ & = (2\pi)^4 \int d^4P_1' \, \delta(P_1 - P_1') \, \delta(P_2 + k + P_1') \left[\Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = (2\pi)^4 \delta(k + P_1 - P_2) \left[\Sigma_F^<(P_1) \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-y_1) \left[\Sigma_F^<(x-x_1) \right]^{-1} = \\ & = \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-y_1) \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(x-x_1)} \left[\Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = \\ & = \int d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{iky_1} \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(y_1-x_1)} \left[\Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = \\ & = (2\pi)^4 \int d^4P_1' \, \delta(P_1 + k - P_1') \, \delta(-P_2 + P_1') \left[\Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = (2\pi)^4 \delta(P_1 + k - P_2) \left[\Sigma_F^<(P_2) \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$\int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, d_x^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(y_1, x_1, x) = -k^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(P_1, -P_2, k)$$

$$-k^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(P_1, -P_2, k) = i e (2\pi)^4 \delta(k + P_1 - P_2) \left\{ \left[\Sigma_F^<(P_1) \right]^{-1} - \left[\Sigma_F^<(P_2) \right]^{-1} \right\}$$

$$-i k^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(P_1, -P_2, k) = e (2\pi)^4 \delta(k + P_1 - P_2) \left\{ \left[\Sigma_F^<(P_1 + k) \right]^{-1} - \left[\Sigma_F^<(P_1) \right]^{-1} \right\}$$

Da forma como está definida, $\Gamma_{ijN}^{(3)}$ contém a carga e conservação de momento, para separar estes de forma explícita:

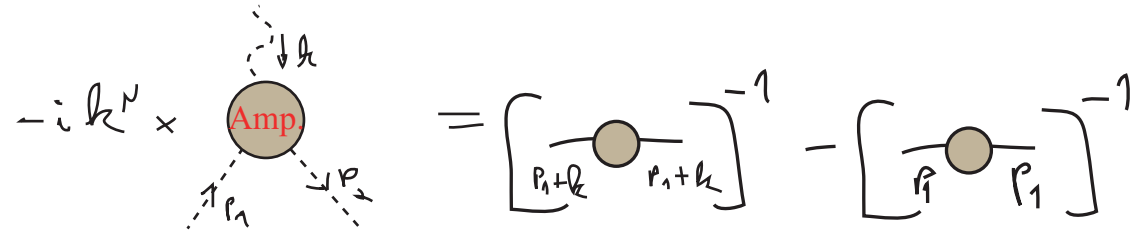
$$\Gamma_{ij;N}^{(3)}(p_1, p_2; k) \equiv e^{(2\pi)^4 \delta^4(p_1+k-p_2)} \Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; k)$$

$$-i k^N \Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; k) = \left[\sum_F^<(p_1+k) \right]^{-1} - \left[\sum_F^<(p_1) \right]^{-1}$$

(eq. 99.1)

Identidade de Ward-Takahashi

Que, em diagramas, fica:

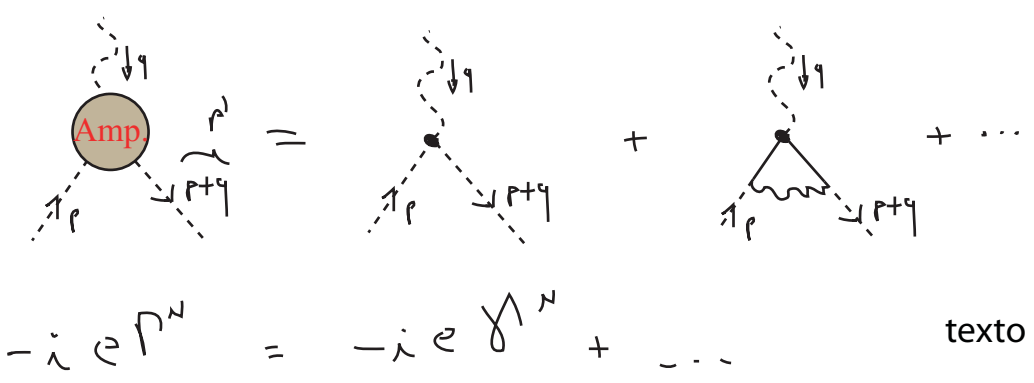


A partir da equação 97.1 podemos fazer outras combinações de derivações funcionais para obter relações entre diagramas com mais pontos ou diferentes campos.

Correções Radiativas na QED

Função de Vértice

(Peskin secs 6.2 e 6.3)



Considerando simplesmente a estrutura de Lorentz e a restrição oriunda da indentidade de Ward, podemos escrever uma forma geral para a função de vértice

$$\Gamma^N = \gamma^N F_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

L.O. \rightarrow
 $F_1^{LO}(q^2) = 1$
 $F_2^{LO}(q^2) = 0$
 Fatores de Forma (eq. 99.2)

L.O. - leading order (primeira contrib. não nula em teoria de perturbação)