

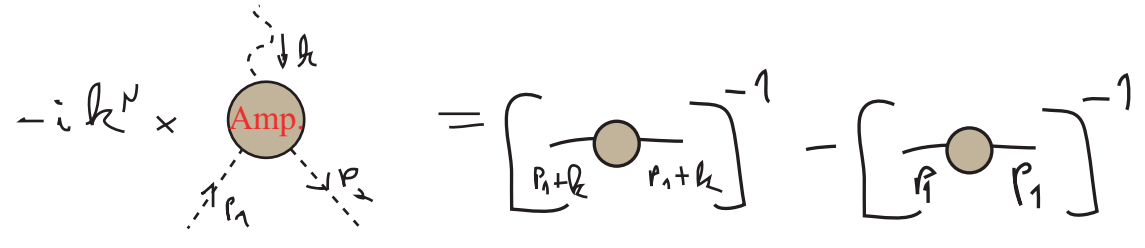
$$\Gamma_{ij;N}^{(3)}(p_1, p_2; k) \equiv e (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k - p_2) \Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; k)$$

$$-i k^N \Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; k) = \left[\Sigma_F^<(p_1+k) \right]^{-1} - \left[\Sigma_F^<(p_1) \right]^{-1}$$

(eq. 99.1)

Identidade de Ward-Takahashi

Que, em diagramas, fica:

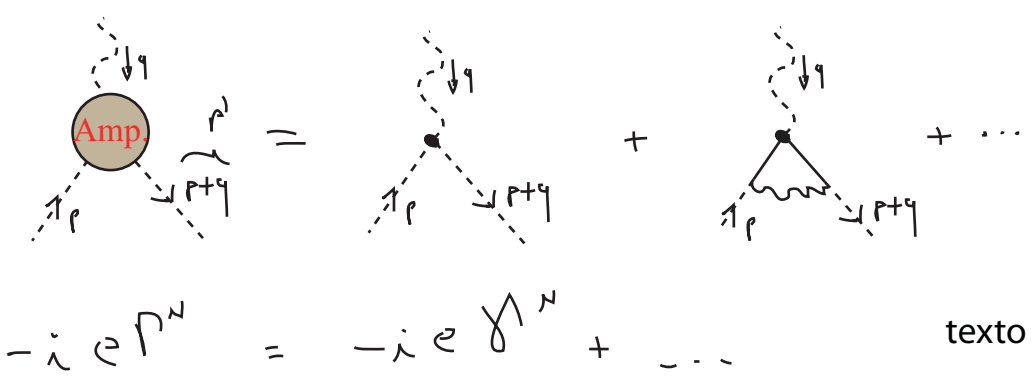


A partir da equação 97.1 podemos fazer outras combinações de derivações funcionais para obter relações entre diagramas com mais pontos ou diferentes campos.

Correções Radiativas na QED

Função de Vértice

(Peskin secs 6.2 e 6.3)



Considerando simplesmente a estrutura de Lorentz e a restrição oriunda da indentidade de Ward, podemos escrever uma forma geral para a função de vértice

$$\Gamma^N = \gamma^N F_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

L.O. \rightarrow
 $F_1^{LO}(q^2) = 1$
 $F_2^{LO}(q^2) = 0$
 (eq. 99.2)

\rightarrow Fatores de Forma

L.O. - leading order (primeira contrib. não nula em teoria de perturbação)

Tanto F_1 quanto F_2 têm interpretação física. O espalhamento em um potencial eletrostático é dado por:

$$A_{\mu}^{EXT}(\kappa) = (\phi(\vec{x}), 0, 0, 0) \quad A_{\mu}^{EXT}(q) = (2\pi \delta(q^0) \tilde{\phi}(\vec{q}), 0, 0, 0)$$

estático e varia muito pouco no espaço

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}(p') \Gamma^0 u(p) \tilde{\phi}(\vec{q})$$

$\hookrightarrow \sim S(q)$

$q \rightarrow 0 \Rightarrow \Gamma^0 = \gamma^0 F_1(0)$

$$i\mathcal{M} = -ie F_1(0) \bar{u}(p') \gamma^0 u(p)$$

De onde vemos que $F_1(0)$ é a carga do elétron, em unidades de e . $\Rightarrow \boxed{F_1(0) = 1}$ (eq. 100.2)

Como ele já é 1 em primeira ordem pert., vemos que as correções a este fator devem ser 0 para $q^2 = 0$

O mesmo pode ser feito para F_2 em um campo vetorial constante:

$$A_{\mu}^{EXT}(\kappa) = (0, \vec{A}(\vec{x}))$$

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}(p') \Gamma^i u(p) A^i(\vec{q})$$

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}(p') \Gamma^i u(p) A^i(\vec{q})$$

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix}$$

$q \rightarrow 0$
 \sim RELATIVIST.

$$i\mathcal{M} = -ie (2m) \cdot e \sum^{1T} \left(-\frac{1}{2m} \sigma^k \left[\underbrace{F_1(0)}_1 + F_2(0) \right] \right) \underbrace{\left(-ie \epsilon^{ijk} q^i A^j(\vec{q}) \right)}_{B^k(\vec{q})}$$

comparando com a aprox. de Born

$$\langle p' | iT | p \rangle = -ie \tilde{V}(q) 2\pi \delta(E_{p'} - E_p)$$

$$V(\vec{x}) = - \underbrace{\langle \vec{\mu} \rangle}_{\substack{\text{Momento} \\ \text{magnético} \\ \text{do elétron}}} \cdot \vec{B}^p(x)$$

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{e}{m} [1 + F_2(0)] \left\{ \vec{L} + \frac{\sigma^p}{2} \right\}$$

Spin do e⁻

Se escrevermos o momento magnético da forma usual: $\vec{\mu} = g \left(\frac{e}{2m} \right) \vec{S}$

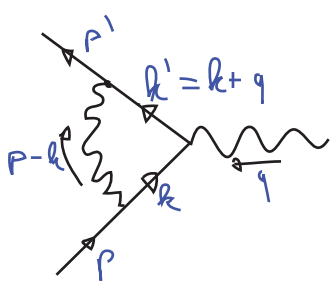
$$g = 2 + 2 F_2(0)$$

Vimos (eq 99.2) que F2 = 0 em primeira ordem pert. portanto g = 2 nesta ordem. Mas ele será corrigido em ordens superiores:

$$g = 2 + \underbrace{O(\alpha)}_{\substack{\text{Momento} \\ \text{magnético} \\ \text{anômalo} \\ \text{do elétron}}} + \dots$$

Vamos calcular as correções de primeira ordem ao vértice: $\Gamma^N = \gamma^N + \delta \Gamma^N$

Lembrando sempre que isto aparece em:



$$\bar{u}(p') (-ie \delta \Gamma^N) u(p) \frac{(-i) g_{NB}}{q^2} \dots$$

$$\delta \Gamma^N = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ie \gamma_{VP}}{(k-p)^2 + i\epsilon} (-ie \gamma^V) i \frac{(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^N i \frac{(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie \gamma^P) =$$

$$\gamma_P \gamma^N \gamma^P = -2 \gamma^N$$

$$\gamma^N \cdot \not{k} = \gamma^N \gamma^V k_V = [2g^{NV} - \gamma^V \gamma^N] k_V = 2 k^N - \not{k} \gamma^N$$

$$-m (\gamma^N \not{k} + \not{k} \gamma^N + \gamma^N \not{k}' + \not{k}' \gamma^N) = -m (2k^N + 2k'^N) = -2m (k + k')^N$$

$$= 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[\not{k} \gamma^\mu \not{k}' + m^2 \not{0} - 2m(\not{k} + \not{k}')^\mu]}{[(k-p)^2 + i\epsilon][k^2 - m^2 + i\epsilon][k'^2 - m^2 + i\epsilon]} \quad (\text{eq. 102.1})$$

Para fazer esta integral usaremos o método conhecido como **parametrização de Feynman**. A idéia é transformar o denominador acima em um único polinômio de grau 2 em k (que por sua vez estará elevado a 3). Fica fácil ver com fazemos isso no caso da integral simples:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[xA + yB]^2}$$

Que poderia ser usada para integrar:

parâmetros de Feynman

$$\int d^4k \frac{1}{(k-p)^2 (k^2 - m^2)} = \int d^4k \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[x(k-p)^2 + y(k^2 - m^2)]^2} =$$

$$= \int d^4k \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[(x+y)k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - m^2 y]^2}$$

$$l \equiv k - xp \Rightarrow [l^2 - m^2 y]$$

$$d^4k = d^4l$$

ficaria bem fácil fazer a integral em L, uma vez que é esfericamente simétrica

Temos uma identidade mais geral para o caso de vários fatores no denominador:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n]^n} \quad (\text{eq. 102.2})$$

Aplicando isso ao denominador de 102.1 temos:

$$\frac{1}{[(k-p)^2 + i\epsilon][\underbrace{k^2 - m^2 + i\epsilon}_{(k+q)^2}][k^2 - m^2 + i\epsilon]} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3}$$

$$\begin{aligned} D &= x[k^2 - m^2 + i\epsilon] + y[\underbrace{k^2 - m^2 + i\epsilon}_{(k+q)^2}] + z[(k-p)^2 + i\epsilon] = \\ &= x(k^2 - m^2) + y(k^2 + 2k \cdot q + q^2 - m^2) + z(k-p)^2 + \underbrace{(x+y+z)}_1 i\epsilon = \\ &= xk^2 - xm^2 + yk^2 + 2yk \cdot q + yq^2 - ym^2 + zk^2 - 2zk \cdot p + zp^2 + i\epsilon = \\ &= \underbrace{k^2 + 2yk \cdot q - 2zk \cdot p + zp^2}_{\ell^2} + yq^2 - xm^2 - ym^2 + i\epsilon = \\ &\quad \downarrow \ell = k + yq - zp \\ &= \underbrace{\ell^2 + 2yq \cdot p - y^2 p^2 - y^2 q^2 + zp^2 + yq^2 - xm^2 - ym^2}_{\ell^2 + i\epsilon - \Delta} = \\ &= \ell^2 + i\epsilon - \Delta \end{aligned}$$

"a bit of algebra"

$$\begin{aligned} -\Delta &= 2yq \cdot p - \underbrace{y^2 p^2}_{m^2} - \underbrace{y^2 q^2}_{m^2} + zp^2 + yq^2 - xm^2 - ym^2 = \\ &= p \cdot q = p \cdot (p' - p) = p \cdot p' - p^2 = p \cdot p' - m^2 \\ &= 2yq \cdot p \cdot p' - 2yq \cdot m^2 - y^2 m^2 - y^2 q^2 + zm^2 + yq^2 - xm^2 - ym^2 = \\ &= m^2(-2yq + z - x - y - y^2) + \underbrace{2yq \cdot p \cdot p'}_{\substack{\uparrow \\ \text{Lo } 2p \cdot p' = 2m^2 - q^2}} - y^2 q^2 + yq^2 = \\ &= q^2 = (p' - p)^2 = \underbrace{p'^2 + p^2}_{2m^2} - 2p \cdot p' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= m^2 \left(\underbrace{-2xy + z^{-x-y-z^2+2yz}}_{-(1-z)^2} \right) + \underbrace{(-xy - y^2 + y)}_{xy} q^2 = \\
 &= -(1-z)^2 m^2 + xy q^2
 \end{aligned}$$

$q^2 < 0$

$$\Delta = -xy q^2 + (1-z)^2 m^2 > 0$$

$$D = \not{\partial}^2 + i\varepsilon - \Delta = \not{\partial}^2 + i\varepsilon + xy q^2 - (1-z)^2 m^2$$

$$\int \pi^N = 2i e^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} [\not{m}]$$

Falta fazer a mudança de variáveis no numerador

$$[\not{m}] = [\not{\epsilon} \not{\gamma}^N \not{\epsilon}' + m^2 \not{\sigma}^N - 2m(\not{\epsilon} + \not{\epsilon}')^N]$$

Isso envolve um bocado de álgebra, é necessário lembrar que:

$$\text{(I)} \quad D = D(\ell^2) \Rightarrow \begin{cases} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\ell^N}{D^3} = 0 \\ \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\ell^N \ell^\nu}{D^3} = \frac{1}{4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{g^{\nu N} \ell^2}{D^3} \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad [\not{m}] \text{ está entre espinores: } \bar{u}(p') [\not{m}] u(p)$$

portanto podemos trocar $\not{p} u(p) = m u(p)$

De resto é só usar relações de comutação e as relações entre os momentos para chegar em:

$$[\not{m}] = \left[\not{\gamma}^N \left(-\frac{1}{2} \ell^2 + (1-x)(1-y) q^2 + (1-2z-z^2) m^2 \right) + (\not{p}' + \not{p}) \cdot m z (z-1) - \right]$$

$$+ \gamma^\mu \cdot m (z-2)(x-y)]$$

pois é ímpar sobre a troca $x \leftrightarrow y$ (todo o resto da integral é par)

Usando a identidade de Gordon:

$$\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p)$$

podemos fazer: $p'^\mu + p^\mu \rightarrow 2m \delta^\mu - i \sigma^{\mu\nu} q_\nu$

obtendo:

$$\Gamma^\mu = 2i e^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} \times$$

$$\left[\gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} \ell^2 + (1-x)(1-y) q^2 + (1-y) z + z^2 \right) m^2 + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} (2m^2 z(1-z)) \right] \quad (\text{eq. 105.1})$$

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2)$$

Fica bem mais fácil fazer a integral em 4D caso possamos passar para coordenadas esféricas em 4D, podemos fazer isso se passarmos para o espaço Euclidiano por meio de uma [rotação de Wick](#)

$$q^0 = i q_E^0$$

$$d^4 \ell = i d^4 \ell_E \quad d^3 \vec{\ell}_E = i d^3 \vec{\ell}$$

$$\vec{\ell} = \vec{\ell}_E$$

$$\ell^2 = - (q_E^0)^2 - (\vec{\ell}_E)^2 = - \ell_E^2$$

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^m} = i \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[-\ell_E^2 - \Delta]^m} = \frac{i}{(-1)^m} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 \ell_E \frac{1}{[\ell_E^2 + \Delta]^m}$$

$$= \frac{\lambda(-1)^m}{(2\pi)^4} \int_{2\pi^2} d\mathcal{L}_4 \int_0^\infty d\mathcal{L}_E \frac{\mathcal{L}_E^3}{[\mathcal{L}_E^2 + \Delta]^m} =$$

$\mu = \mathcal{L}_E^2 + \Delta$
 $d\mu = 2\mathcal{L}_E d\mathcal{L}_E$

$$\Rightarrow \int_\Delta^\infty \frac{d\mu}{2} \frac{\mu - \Delta}{\mu^m} = \frac{1}{2} \frac{\Delta^{2-m}}{(m-1)(m-2)}$$

$m \geq 3$

$$= \frac{\lambda(-1)^m}{(2\pi)^4} 2\pi^2 \frac{1}{2} \frac{\Delta^{2-m}}{(m-1)(m-2)} = \frac{\lambda(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-1)(m-2)} \frac{1}{\Delta^{m-2}}$$

$m \geq 3$

(eq. 106.1)

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta]^m} = i \int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4} \frac{-\ell_E^2}{[-\ell_E^2 - \Delta]^m} = \frac{\lambda(-1)^{m+1}}{2^3 \pi^2} \int_0^\infty d\mathcal{L}_E \frac{\mathcal{L}_E^5}{[\mathcal{L}_E^2 + \Delta]^m} =$$

$$\int_\Delta^\infty \frac{d\mu}{2} \frac{(\mu - \Delta)^2}{\mu^m} = \frac{\Delta^{3-m}}{(m-3)(m-2)(m-1)}$$

$m \geq 4$

$$= \frac{\lambda(-1)^{m+1}}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-3)(m-2)(m-1)} \frac{1}{\Delta^{m-3}}$$

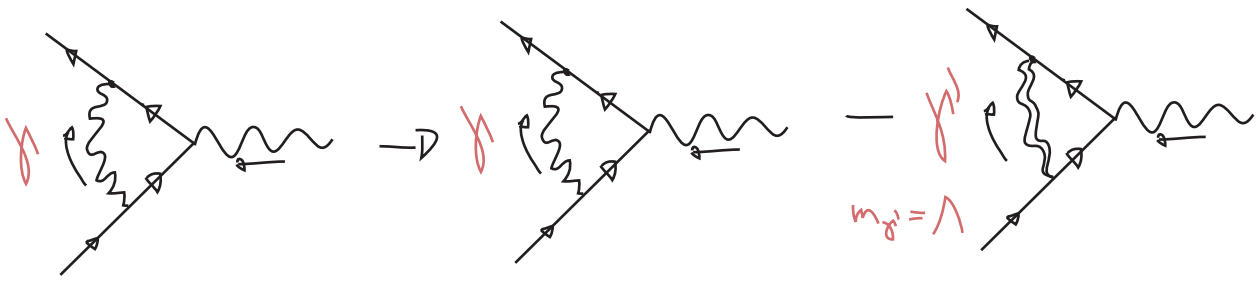
(eq. 106.2)

Aqui temos um problema, já que estamos justamente interessados em integrar termos com D^3 no denominador e a integral é divergente neste caso

$$\int_\Delta^\infty \frac{d\mu}{2} \frac{\mu^2 - 2\mu\Delta + \Delta^2}{\mu^3} = \lim_{K \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{K}{\Delta} \right]$$

Estudaremos o significado desta divergência em breve. Por enquanto vamos dar um jeito de isolar esta divergência na integral, este procedimento é chamado de **regularização** e existem muitas técnicas diferentes para executá-la. O importante é não confundir este procedimento com a renormalização, tudo que a regularização faz é colocar a resposta numa forma em que a divergência fique mais fácil de analisar, separada de uma parte finita (o que ajuda muito na hora de renormalizar). O método que usaremos é conhecido como **regularização de Pauli-Villars** e consiste em introduzir uma nova partícula fictícia de massa Λ . Nosso objetivo é fazer a seguinte modificação no propagador do fóton que está no loop:

$$\frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(k-p)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}$$



Note que recuperamos o propagador usual fazendo $\Lambda^2 \rightarrow \infty$

mas para $k^2 \gg \Lambda^2$ podemos desprezar Λ^2 e os dois propagadores se cancelam.

Se voltarmos na pg 103 vemos que ganhamos uma nova contribuição em que a única mudança introduzida é (nada muda nos numeradores):

$$\Delta_\lambda = -xy q^2 + (1-z)^2 m^2 + z\Lambda^2$$

De forma que agora temos:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left(\frac{l^2}{[l^2 - \Delta]^3} - \frac{l^2}{[l^2 - \Delta_\lambda]^3} \right) = \frac{2i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty dl_E \left(\frac{l_E^5}{[l_E^2 + \Delta]^3} - \frac{l_E^5}{[l_E^2 + \Delta_\lambda]^3} \right) = \\ & = \frac{2i}{(4\pi)^2} \lim_{K \rightarrow \infty} \left[\int_\Delta^K \frac{d\mu}{2} \left(\frac{\mu^2 - 2\mu\Delta + \Delta^2}{\mu^3} \right) - \int_{\Delta_\lambda}^K \frac{d\mu}{2} \left(\frac{\mu^2 - 2\mu\Delta_\lambda + \Delta_\lambda^2}{\mu^3} \right) \right] = \\ & = \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{K \rightarrow \infty} \left[\ln \left[\frac{K}{\Delta} \right] + \frac{3}{2} - 2 \frac{\Delta}{K} + \frac{\Delta^2}{2K^2} - \left(\ln \left[\frac{K}{\Delta_\lambda} \right] + \frac{3}{2} - 2 \frac{\Delta_\lambda}{K} + \frac{\Delta_\lambda^2}{2K^2} \right) \right] = \\ & = \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \left[\frac{\Delta_\lambda}{\Delta} \right] \end{aligned}$$

As integrais finitas mudam da seguinte forma:

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^3} - \frac{1}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda]^3} \right) \stackrel{\text{eq 106.1 / m=3}}{=} -\frac{i}{2(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta_\Lambda} \right)$$

$\mathcal{O}(\Lambda^2)$ ←

podemos ignorar esta modificação se $\Lambda \gg 1 \Delta$

Voltando com os resultados das integrais na equação 105.1, temos:

$$\begin{aligned} \delta \Gamma^N = & 2i e^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \gamma^\mu \left[\frac{1}{2} \ln \left[\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta} \right] + \frac{1}{2\Delta} \left((1-x)(1-y)q^2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + (1-y)z + yz^2 \right) m^2 \right] + \frac{1}{2\Delta} \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu (2m^2 z(1-z))}{2m} \right\} \end{aligned}$$

(eq. 105.1)

$$\Delta_\Lambda \underset{\Lambda \gg \Delta}{\sim} \Delta \approx \Lambda^2$$

$$\frac{e^2}{4\pi} = \alpha$$

constante de estrutura fina

$$\delta \Gamma^N = \gamma^\mu \delta F_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta F_2(q^2)$$

(eq. 108.1)

$$\delta F_1(q^2) = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[\frac{\Lambda^2}{\Delta} \right] + \frac{1}{\Delta} \left[(1-x)(1-y)q^2 + (1-y)z + yz^2 \right] m^2 \right\}$$

(eq. 108.2)

$$\delta F_2(q^2) = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{\Delta} 2m^2 z(1-z)$$

(eq. 108.3)

Recapitulando o método usado:

- (1) Usamos os **diagramas de Feynman** para escrever a amplitude
- (2) Combinamos os denominadores dos propagadores usando os **parâmetros de Feynman**
- (3) Completamos quadrados no denominador, mudando a variável de integração para ℓ (somando uma constante a k)
- (4) Passamos um **numerador para ℓ** e notamos que as integrais das potências ímpares são nulas. As potências pares são escritas em termos de ℓ^2, ℓ^4, \dots (o uso da equação de movimento ajuda muito a simplificação do numerador)
- (5) fazemos a **rotação de Wick** e integramos no espaço Euclidiano. Caso as integrais sejam divergentes, usamos algum tipo de **regularização**.

Notamos que $\int \bar{F}_2$ não tem qualquer divergência, de fato podemos calculá-lo:

$$\int \bar{F}_2(0) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2x^2 y(1-z)}{(1-y)^2 m^2} =$$

$\swarrow x_0 = 1-y-z$
 $0 < x_0 < 1 \Rightarrow 0 < 1-y-z < 1 \Rightarrow 1-z > y > -z$

$$= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{1-z} = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0,0011617$$

O valor experimental atual é 0,00115965218073 (28) - tão preciso que é necessário considerar as correções $O(\alpha^4)$. Uma vez consideradas, estas correções concordam com este valor em $1/10^8$

$\int \bar{F}_1$, no entanto, contém divergências de dois tipos. A primeira, e mais óbvia, está ligada a grandes momentos no loop e é chamada de **divergência ultravioleta**. Na expressão que obtivemos ela apareceu quando retiramos a partícula fictícia da teoria, fazendo:

$$\Lambda \rightarrow \infty$$

$$\int \bar{F}_1 \sim L_N \left[\frac{\Lambda}{\Delta} \right]$$

A outra está associada a momentos muito pequenos do fóton no loop, e é chamada de **divergência no infravermelho**. Ela fica evidente se tomarmos, por exemplo, o seguinte termo de F_1 e fizermos $q = 0$

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{\Delta} \left[(1-y+z^2) m^2 \right]$$

$$\Delta = -2xy q^2 + (1-z)^2 m^2$$