

É possível mostrar que este cancelamento ocorre para todas as ordens de perturbação (Peskin sec 6.5), neste caso a seção de choque medida é:

$$\frac{d\sigma_{\text{Exp}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \text{EXP} \left[ -\frac{\alpha}{\pi} \ln(q^2) L_N \left( -\frac{q^2}{E_e^2} \right) \right]$$

### Auto-energia do elétron

(Peskin 7.1)

Resta tratar a divergência ultravioleta do vértice elétron-elétron-fóton, veremos agora que ela está ligada às correções radiativas do propagador do elétron. Vamos a elas:

Primeiramente vale lembrar o resultado obtido na pag 77:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle = i \frac{Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

$\downarrow$   
 $m^2 = m_0^2 + \delta m^2$

$$\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2} u^s(p)$$

$\downarrow$   
 $1 + \delta Z_2$

Nosso objetivo é agora obter as contrições perturbativas para  $Z_2$  e  $m$

$$\langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | \Omega \rangle = \underbrace{\text{---} \text{---}}_p + \underbrace{\text{---} \text{---} \text{---}}_{k \quad p-k \quad p} + \dots$$

$$\frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left[ -i \Sigma_2(p) \right] \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \dots$$

basicamente é a contribuição de ordem  $e^2$  para um objeto análogo ao que chamamos de  $M^2$  na pág 85

$$-i \Sigma_2(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m_0)}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{-i}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

$\mu^2 \rightarrow 0$   
"massa" do fóton no fim faremos:

$\rightarrow$  ordem perturbativa

Temos, novamente, que usar o maquinário desenvolvido para o cálculo de loops. A parametrização de Feynman fornece (já integrando em  $y$  com o uso da delta):

$$\frac{1}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - 2xkp + x p^2 - x \mu^2 - (1-x)m_0^2 + i\epsilon]^2}$$

o termo linear em  $\ell$  no numerador já foi cancelado

$$\ell = k - x p$$

$$-i \Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2x \not{p} + 4m_0}{[\ell^2 - \Delta_\nu + i\epsilon]^2}$$

$$\Delta_\nu = -x(1-x)p^2 + x\nu^2 + (1-x)m_0^2$$

Podemos usar a regularização de Pauli-Villars:

$$\frac{1}{(p-k)^2 - \nu^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{(p-k)^2 - \nu^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(p-k)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}$$

$$-i \Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2x \not{p} + 4m_0}{[\ell^2 - \Delta_\nu + i\epsilon]^2} - e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2x \not{p} + 4m_0}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda + i\epsilon]^2}$$

E fazendo a rotação de Wick:

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{\ell^2 - \Delta_\nu} - \frac{1}{\ell^2 - \Delta_\Lambda} \right] = \frac{i}{(4\pi)^2} \text{Ln} \left( \frac{\Delta_\Lambda}{\Delta_\nu} \right)$$

$$\Delta_\Lambda \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} x \Lambda^2$$

$$\Sigma_2(p) = \frac{x}{2\pi} \int_0^1 dx (2m_0 - x \not{p}) \text{Ln} \left( \frac{x \Lambda^2}{(1-x)m_0^2 + x\nu^2 - x(1-x)p^2} \right)$$

(eq. 117.1)

Podemos entender a estrutura analítica desta correção. A função Ln tem uma ramificação a partir do ponto em que seu argumento fica negativo, como o numerador é positivo a condição é:

$$f(x, p^2) = (1-x)m_0^2 + x\nu^2 - x(1-x)p^2 < 0$$

$0 < x < 1 \Rightarrow (> 0) \quad (> 0) \quad \hookrightarrow$  só será possível acima de algum valor mínimo de  $p^2 > 0$

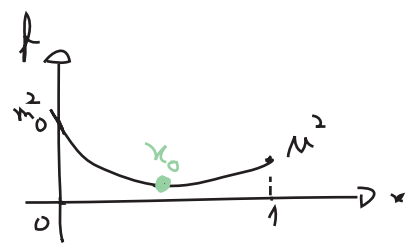
Em termos de  $x$ , a função  $f$  é uma parábola cujo mínimo é determinado por  $p^2$

$$f(x, p^2) = p^2 x^2 + (\nu^2 - p^2 - m_0^2) x + m_0^2$$

$$\frac{d}{dx} f(x, p^2) = 2x p^2 + m_0^2 - p^2 - m_0^2 = 0$$

$$\hookrightarrow x_0 = \frac{m_0^2 + p^2 - \mu^2}{2p^2}$$

$$f(x_0, p^2) = -\frac{(m_0^2 - \mu^2)^2}{4p^2} + \frac{1}{2}(m_0^2 + \mu^2) - \frac{1}{4}p^2$$

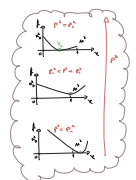


O mínimo passa para baixo de zero em:

$$f(x_0, p^2) = 0 \rightarrow p_{\pm}^2 = (m_0 \pm \mu)^2$$

$$x_0(p_-^2) = \frac{m_0}{m_0 - \mu} \Rightarrow x = \frac{m_0}{m_0 - \mu} > 1$$

$$x_0(p_+^2) = \frac{m_0}{m_0 + \mu} \Rightarrow x = \frac{m_0}{m_0 + \mu} < 1$$



como  $f(1, p^2) = p^2 > 0 \forall p^2$  não há como uma região negativa passar de  $x > 1$  para  $x < 1$

Logo, para  $0 < x < 1$  temos uma ramificação que em:  $p^2 \geq (m_0 + \mu)^2$

o que está de acordo com o que vimos na pg 77 - temos uma ramificação a partir da energia em que podemos produzir duas partículas reais (nessa caso um elétron de massa  $m_0$  e um fóton de massa  $\mu$ )

Também é possível encontrar o polo, basta seguir o mesmo procedimento que usamos no caso do campo escalar para somar as contribuições 1PI (pg 85)

$$-i \Sigma(p) = -i \bar{\Sigma}(p) = \text{1PI} = \dots = 0$$

$\text{com } \langle \Omega | T \{ \bar{\psi}(x) \psi(x) \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T \{ j(x) \} | \Omega \rangle$

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \text{Diagram with a circle and a line through it}$$

$$= \text{Diagram with a line} + \text{1PI} + \text{1PI 1PI} + \text{1PI 1PI 1PI} + \dots =$$

$$= \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(p)} \rightarrow$$

A massa física é dada por:

$$\left[ \not{p} - m_0 - \Sigma(p) \right]_{\not{p} = m} = 0 \quad (\text{eq. 118.1})$$

Bem perto do polo vale:

$$p - m_0 - \Sigma(p) \approx (p - m) \cdot \left( 1 - \frac{d\Sigma}{dp} \Big|_{p=m} \right) + \mathcal{O}((p-m)^2)$$

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{ipx} = \frac{i \left( 1 - \frac{d\Sigma}{dp} \Big|_{p=m} \right)^{-1}}{p^2 - m} = \frac{i (p+m) \left( 1 - \frac{d\Sigma}{dp} \Big|_{p=m} \right)^{-1}}{p^2 - m^2}$$

$$\Delta m = m - m_0 = \Sigma(p=m)$$

Comparando com o resultado obtido para o propagador completo (pg 77):

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{ipx} = \frac{i Z_2 (p+m)}{p^2 - m^2}$$

$$Z_2^{-1} = 1 - \frac{d\Sigma}{dp} \Big|_{p=m} \quad (\text{eq. 119.1})$$

Em ordem  $\alpha$ , as correções são:

$$\Delta m \approx \Sigma_2(p=m_0) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (2m_0 - x m_0) L_N \left( \frac{x \Lambda^2}{(1-x)m_0^2 + x \mu^2 - x(1-x)m_0^2} \right) =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi} m_0 \int_0^1 dx (2-x) L_N \left( \frac{x \Lambda^2}{(1-x)^2 m_0^2 + x \mu^2} \right)$$

$I_\lambda$

mathematica  
Integrate[(Alpha)/2/Pi\*m0\*(2-x)\*Log[x\*(CapitalLambda)^2/(1-x)^2\*m0^2+x\*(Mu)^2],{x,0,1},Assumptions->{CapitalLambda>0, m0>0, Mu>0}]

$$I_\lambda = \frac{1}{8 m_0^3 \pi \sqrt{4 m_0^2 - \mu^2}}$$

$$\alpha \left( 2 \mu (-8 m_0^4 - 2 m_0^2 \mu^2 + \mu^4) \text{ArcTan} \left[ \frac{\mu}{\sqrt{4 m_0^2 - \mu^2}} \right] - \right.$$

$$\left. 2 \mu (-8 m_0^4 - 2 m_0^2 \mu^2 + \mu^4) \text{ArcTan} \left[ \frac{-2 m_0^2 + \mu^2}{\mu \sqrt{4 m_0^2 - \mu^2}} \right] + \right.$$

$$\left. \sqrt{4 m_0^2 - \mu^2} \left( 3 m_0^4 + 2 m_0^2 \mu^2 - 12 m_0^4 \text{Log} \left[ \frac{m_0}{\Lambda} \right] - 2 \mu^4 \text{Log} \left[ \frac{\mu}{m_0} \right] \right) \right)$$

Primeiramente, notemos que não há divergência quando  $\Lambda \rightarrow 0$

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} \delta m = \frac{3 \alpha m_0}{8 \pi} \left( 1 + 2 \log \left[ \frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right] \right) \quad \text{... } \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\Lambda} \right) = \frac{\pi}{2}$$

E que, de qualquer forma, a divergência ultravioleta está em um termo que independe de  $\mu$

$$\delta m \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{3 \alpha m_0}{4 \pi} \log \left[ \frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right]$$

Temos então a massa do eletron sendo corrigida por uma grandeza divergente. Isto não é novidade, classicamente temos a energia de repouso de uma partícula dada pelo potencial eletrostático da seguinte forma (carga pontual):

$$\int d^3 R \frac{1}{2} |\vec{E}|^2 = \int d^3 R \frac{1}{2} \left( \frac{e}{4 \pi R^2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{(4 \pi)^2} \int d\Omega \int \frac{1}{R^2} dR$$

$\dim[R] = GeV^{-1}$   
 $\dim \left[ \frac{1}{R} \right] = GeV$

$$= \frac{\alpha}{2} \int_0^\infty \frac{1}{R^2} dR \sim \alpha \lim_{R \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{R} \right] = \alpha \Lambda$$

Nota-se de fato que a divergência quântica é menos forte que a clássica, quanticamente temos uma divergência logarítmica com a escala de energia, classicamente ela é linear. Dá para entender que não poderia ser diferente por análise dimensional: suponha que  $m_0 = 0$ , pense no termo de massa:

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R \Rightarrow m_0 \bar{\Psi} \Psi = m_0 (\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L)$$

$$\bar{\Psi} \Psi = \bar{\Psi}_R \Psi_R + \bar{\Psi}_L \Psi_L$$

se este termo é zero, não temos mais nada na Lagrangeana que "acople"  $\Psi_L$  e  $\Psi_R$ . Com isso obtemos duas teorias separadas, uma para cada quiralidade, e não há correção radiativa que vá produzir um termo de massa.

$\delta m \sim m_0$  (note que isso quer dizer que um eletron de massa zero nunca ganharia massa)

Portanto a única dependência possível com a energia é logarítmica. Essa "pequena correção infinita" parece invalidar todo o procedimento perturbativo, mas logo veremos que podemos reescrever nossa lagrangeana em termos de parâmetros físicos finitos desde o começo, evitando assim o problema. Por enquanto assumiremos que já fizemos isso e trocar  $m_0$  por  $m$  nas contas que seguem

No caso de  $Z_2$  temos:

$$Z_2 = 1 + \delta Z_2$$

$$\delta Z_2 = Z_2 - 1 = \left( 1 - \frac{d\Sigma}{d\phi} \Big|_{\phi=m} \right)^{-1} - 1 \stackrel{\text{Lim } \epsilon \rightarrow 0}{\approx} \frac{d\Sigma_2}{d\phi} \Big|_{\phi=m}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\phi} \left[ \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^1 dx (2m - x\phi) L_v \left( \frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\phi^2} \right) \right] = \\ &= \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^1 dx (-x) L_v \left( \frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\phi^2} \right) + \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^1 dx (2m - x\phi) \frac{(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\phi^2}{x\Lambda^2} \cdot \frac{-x\Lambda^2}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\phi^2]^2} \cdot (-2x(1-x)\phi) = \\ &= \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^1 dx \left[ -x L_v \left( \frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\phi^2} \right) + (2m - x\phi) \frac{2x(1-x)\phi}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\phi^2]} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d\Sigma_2}{d\phi} \Big|_{\phi=m} = \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^1 dx \left[ -x L_v \left( \frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\mu^2} \right) + (2-x) \frac{2x(1-x)m^2}{[(1-x)m^2 + x\mu^2]} \right]$$

O que nos dá a primeira contribuição perturbativa à "field strength renormalization"  $Z_2$ , do elétron. Com isso podemos, finalmente, voltar a questão da divergência ultravioleta do vértice da QED (se você já não lembra o que estamos fazendo, volte na página 116 e leia a introdução desta seção). Na pg 110 eliminamos a divergência ultravioleta do vértice fazendo uma subtração "força bruta", o que subtraímos foi:

$$\delta \bar{F}_1(0) = \left( \frac{\kappa}{2\pi} \right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{(1-y)^2 m^2 + z\mu^2} \right] + \frac{(1-4y+z^2)m^2}{(1-y)^2 m^2 + z\mu^2} \right\} =$$

na pg 110 fizemos a subtração antes de introduzir  $\mu$ , mas é mais geral pensar na introdução de  $\mu$  antes

$$= \left( \frac{\kappa}{2\pi} \right) \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left\{ \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{(1-y)^2 m^2 + z\mu^2} \right] + \frac{(1-4y+z^2)m^2}{(1-y)^2 m^2 + z\mu^2} \right\} = \left( \frac{\kappa}{2\pi} \right) \int_0^1 dz (1-z) \left\{ \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right] + \frac{(1-4z+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right\} =$$

Calculamos a soma destas duas expressões ( $x \rightarrow z$  em  $\delta Z_2$ ):

$$\delta \bar{F}_1(0) + \delta Z_2 = \left( \frac{\kappa}{2\pi} \right) \int_0^1 dz \left\{ (1-2z) \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right] + \frac{P(z)}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right\}$$

$$\begin{aligned} P(z) &= (2-z) 2z(1-z)m^2 + (1-z)(1-4z+z^2)m^2 = \\ &= m^2(1-z)^2(z+1) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 dz (1-2z) \ln \left[ \frac{z \Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z \mu^2} \right] = \int_0^1 \underbrace{dz (1-2z)}_{d\mu} \underbrace{\ln[z]}_{\mu'} +$$

$$\mu = z(1-z)$$

$$d\mu = \frac{1}{z}$$

$$d\mu = \frac{2m^2(1-z) - \mu^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2}$$

$$+ \int_0^1 \underbrace{dz (1-2z)}_{d\mu} \underbrace{\ln \left[ \frac{\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z \mu^2} \right]}_{\mu}$$

$$= \underbrace{(z-z^2) \ln z} \Big|_0^1 + \underbrace{(z-z^2) \ln \left[ \frac{\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z \mu^2} \right]} \Big|_0^1 - \int_0^1 dz (1-z) +$$

$$- \int_0^1 dz z(1-z) \frac{2m^2(1-z) - \mu^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} =$$

$$= - \int_0^1 dz (1-z) - \int_0^1 dz \frac{(1-z) [2m^2(1-z)z - z\mu^2] + (1-z)(1-z^2)m^2 - (1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} =$$

$$= - \int_0^1 dz (1-z) - \int_0^1 dz \frac{(1-z) [2m^2(1-z)z - \underbrace{(1-z^2)m^2}_{(1-z^2)m^2} - z\mu^2] + (1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} =$$

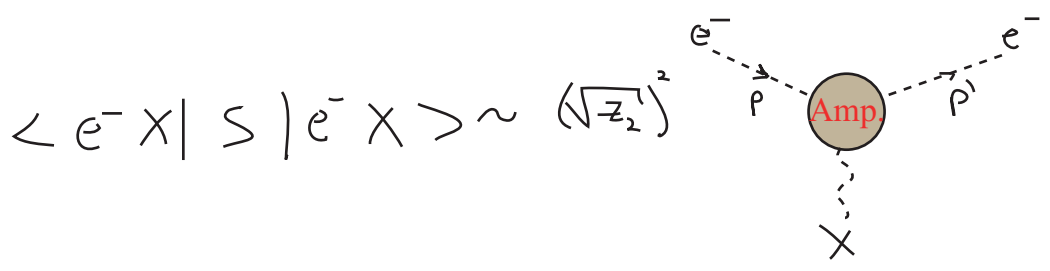
$$= - \int_0^1 dz (1-z) - \int_0^1 dz \left[ (1-z)(-1) + \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} \right] = - \int_0^1 dz \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2}$$

$$\Delta F_1(0) + \Delta Z_2 = \left( \frac{\mu}{2\pi} \right) \int_0^1 dz \left\{ - \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} + \frac{m^2(1-z)^2(z+1)}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right\} = 0$$

$$(1-z)^2(z+1) - (1-z)(1-z^2) = 0$$

$$\delta \bar{F}_1(0) + \delta Z_2 = 0$$

Agora, considerando a fórmula de LSZ (eq. 83.1), sabemos que:



Por isso, em qualquer espalhamento que envolva este vértice, teremos não apenas  $-i e \Gamma^\mu$  mas sim:

$$-i e \Gamma^\mu \rightarrow -i e \Gamma^\mu Z_2$$

Considerando isso na definição dos fatores de forma obtemos:

$$Z_2 \Gamma^\mu = \gamma^\mu \bar{F}_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \bar{F}_2(q^2)$$

a "linha" é para indicar a nova correção, agora que consideramos  $Z_2$   
 todos os  $\delta$  são em ordem  $\alpha$

$$1 + \gamma^\mu \delta Z_2 + \delta \Gamma^\mu + \mathcal{O}(\alpha^2) = \gamma^\mu + \gamma^\mu \delta \bar{F}_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta \bar{F}_2(q^2)$$

$$\gamma^\mu \delta \bar{F}_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta \bar{F}_2(q^2)$$

$$\sigma^{\mu\nu} q_\nu \Rightarrow \delta \bar{F}_2'(q^2) = \delta \bar{F}_2(q^2) \quad (\text{nada muda para esta estrutura})$$

$$\gamma^\mu \Rightarrow \delta \bar{F}_1'(q^2) = \delta \bar{F}_1(q^2) + \delta Z_2 = \delta \bar{F}_1(q^2) - \delta \bar{F}_1(0)$$

que é exatamente a subtração que fizemos na pg 110

Isto nos mostra que, apesar de termos estas divergências circulando pela teoria, pelo menos nessa grandeza observável (o fator de forma elétrico) as divergências se cancelam. É claro que, feito desta forma, parece apenas um milagre numérico com pouca chance de se sustentar em ordens superiores de  $\alpha$ .

De uma forma mais geral, para que o fator de forma satisfaça as condições que desejamos:

$$\bar{F}_1(0) = 1$$

representa o que tínhamos antes da subtração na pg 110

podemos introduzir um novo fator Z no vértice, definido por:  $\Gamma^\mu(q^2=0) \equiv Z_1^{-1} \gamma^\mu$  (eq. 123.1)