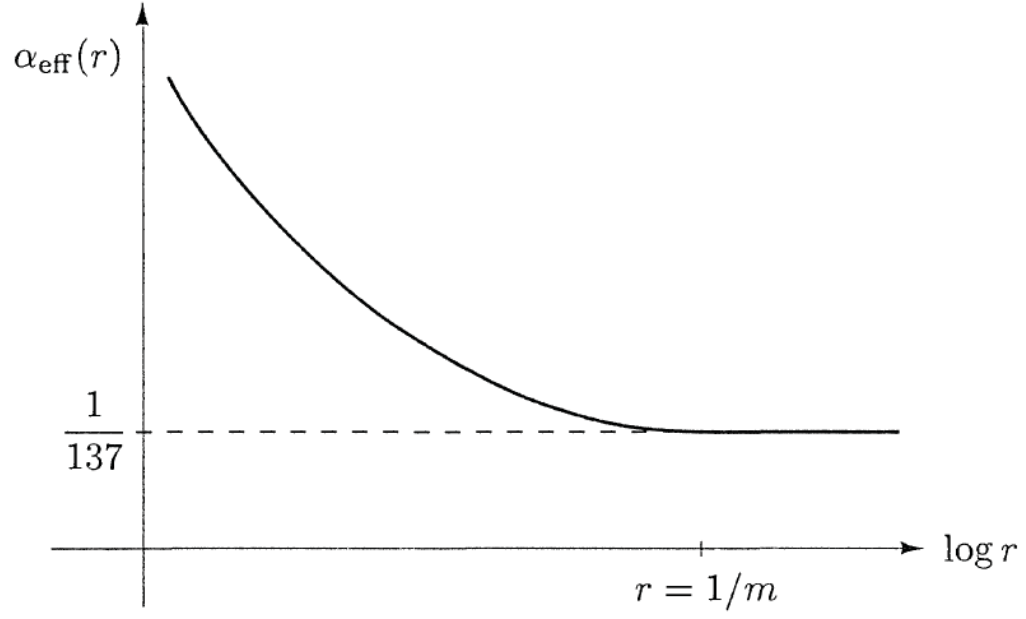


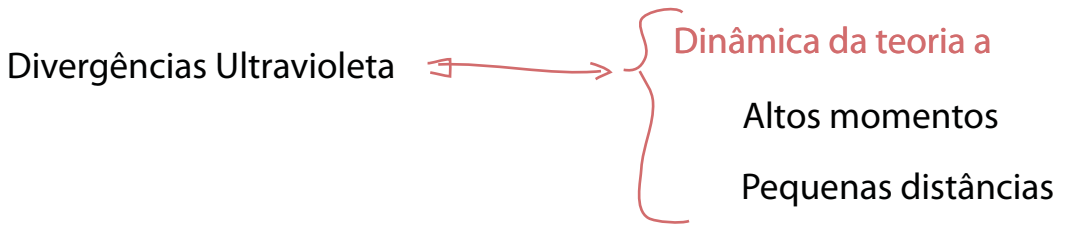
Para espalhamentos muito duros (ou seja, distância de interação pequenas), $-q^2$ fica grande e o acoplamento efetivo aumenta. Podemos fazer uma imagem qualitativa disto fazendo $q = 1/r$ e obtendo o gráfico abaixo:



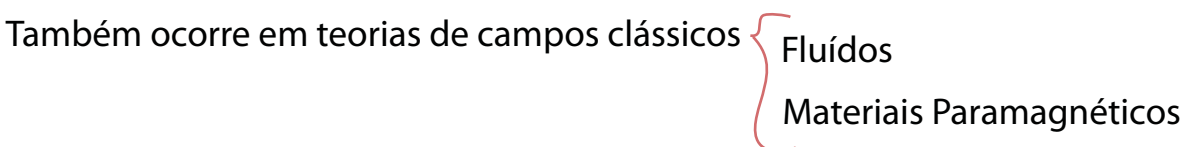
Renormalização

(Peskin 10.1)

Vimos alguns cancelamentos de divergências no caso da QED, mas por enquanto pode parecer complicado descobrir quais diagramas temos que considerar para que estes cancelamentos ocorram. Além disso a presença de divergências põe em dúvida a validade da série perturbativa. Veremos agora como é possível modificar a teoria para escrevê-la em termos de grandezas físicas finitas desde o princípio de forma que tenhamos uma teoria que possa ser expandida perturbativamente. Começamos pensando um pouco sobre estas divergências.



deve existir um cut-off a partir do qual preciso de uma descrição mais fundamental



Posso estudar ondas sonoras (ou de spin) e fluxos

↳ Esperamos que esta descrição falhe quando chegamos a tamanhos e velocidades típicos dos átomos. Ou seja, quando a descrição contínua falha.

Conhecer detalhes da “**continuação ultravioleta**” (neste caso a física dos átomos - seus tamanhos, velocidades e spins) ajuda a obter a física em escalas de tamanhos maiores ou de menor energia (neste caso, viscosidades, suscetibilidade magnética, velocidade do som). No entanto, no caso de campos quânticos, não conhecemos a física a escalas realmente pequenas, sequer sabemos exatamente aonde está o cut-off. É importante nos interrogarmos em que condições é possível contruir teorias preditivas nessa situação, teorias que sejam **independentes do cut-off**.

A resposta para esta pergunta está intrinsecamente ligada ao tratamento das divergências, pois é a presença delas nas relações entre as versões **nuas** (antes de considerarmos interações) e **físicas** dos parametros da teoria (massas e acoplamentos) indicam que os valores destes parâmetros são muito influenciados pela continuação ultravioleta - pela física desconhecida. É por isso que eles não podem ser obtidos de primeiros princípios, tudo que podemos fazer é medi-los. Veremos no entanto que, satisfeitas certas condições, podemos obter o comportamento destes parâmetros até em regiões próximas do cut-off.

Contagem de Divergências Ultravioleta - QED

(Peskin 10.1, Ryder 9.1 ~ 9.5)

Comecemos tentando encontrar um modo de “descobrir” (sem de fato calcular o diagrama de Feynman) quando um diagrama tem divergências ultravioleta. Comecemos com a QED

N_e = número de elétrons externos

V = número de vértices

N_γ = número de fótons externos

L = número de loops

P_e = número de propagadores de elétron

P_γ = número de propagadores de fóton

Em um diagrama qualquer, temos uma divergência em potencial para cada loop: $\int d^4k$

no entanto, os propagadores atenuam esta divergência, colocando potências de momento no denominador:



Definamos a **divergência superficial** do diagrama por:

$$D \equiv 4L - P_e - 2P_\gamma \quad (\text{eq. 138.1})$$

Inocentemente esperaríamos que o diagrama tenha uma divergência proporcional a Λ^D se $D > 0$, e proporcional a $\ln(\Lambda)$ se $D = 0$. Λ é um cut-off de momento.

Esta análise simplista pode falhar por três motivos:

- (1) Diagramas sem loops nem propagadores tem $D = 0$, mas são convergentes
- (2) Se um diagrama contém um subdiagrama divergente, a divergência pode ser pior do que parece:

$L = 1$
 $P_e = 2$
 $P_\gamma = 2$

$D = 4 - 2 - 2 = -2$

no entanto este diagrama $\sim L_n(\Lambda)$

os momentos colocados no denominador por estes propagadores nada tem a ver com o que está sendo integrado no loop. Logo não contribuem para cancelar a divergência

- (3) Se alguns termos do diagrama são cancelados por força de alguma simetria (identidades de WT, por exemplo), a divergência pode ser menor ou nem existir:

$L = 1$
 $P_e = 2$
 $P_\gamma = 0$

$D = 4 - 2 = 2$

no entanto: $\sim L_n(\Lambda)$

Note que (pg 128) quando fizemos regularização por cut-off (que viola WT) obtivemos $\sim \Lambda^2$ mas o resultado que obedece WT (Pauli-Villars) nos dá $L_n(\Lambda)$

Ainda assim D é útil, veja que podemos escrevê-lo em função das pernas externas usando:

$$L = P_e + P_\gamma - V + 1 \quad (\text{eq. 139.1})$$

ex: para $V = 4$, preciso de 4 propagadores para fechar o loop:

$V = 4$
 $P_e + P_\gamma = 4$
 $L = 1$

diminuindo o número de propagadores, não consigo fechar o loop

$V = 4$
 $P_e + P_\gamma = 3$
 $L = 0$

se aumento o número de propagadores fica inevitável aparecer mais loops:

$V = 4$
 $P_e + P_\gamma = 5$
 $L = 2$

e também, que:

$$V = 2 P_\gamma + N_\gamma = \frac{1}{2} (2 P_e + N_e) \quad (\text{cada vértice tem 1 fóton e 2 elétrons, propagadores tem dois vértices e pernas externas apenas um}) \quad (\text{eq. 139.2})$$



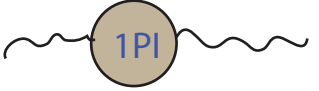
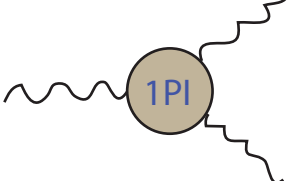
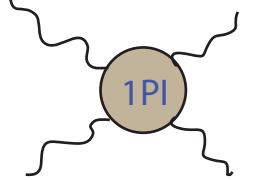
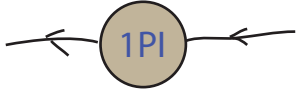
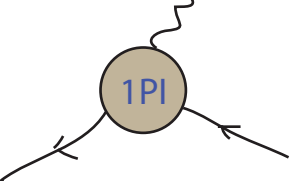
$$D = 4(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma = 4P_e + 4P_\gamma - 2P_\gamma - N_\gamma - 3P_e - \frac{3}{2}N_e + 4 - P_e - 2P_\gamma =$$

$$\hookrightarrow \frac{V}{4} + \frac{3V}{4} = \frac{P_\gamma}{2} + \frac{N_\gamma}{4} + 3\frac{P_e}{4} + \frac{3N_e}{8}$$

$$D = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2} N_e$$

(eq. 140.1)

O que nos mostra que a divergência superficial só depende do número de pernas externas. Somente diagramas com poucas pernas tem $D \geq 0$. Temos poucas possibilidades na QED, de fato sete combinações (abaixo). E como as pernas externas não entram na integral de loop, podemos considerar a soma de todos os diagramas 1PI que contribuem para cada combinação de pernas externas. Qualquer diagrama que contenha divergências vai ter um destes como sub-diagrama:

<p>A  $D = 4$ $N_e = N_\gamma = 0$</p>	<p>B  $D = 3$</p>
<p>C  $D = 2$</p>	<p>D  $D = 1$</p>
<p>E  $D = 0$</p>	<p>F  $D = 1$</p>
<p>G  $D = 0$</p>	

O diagrama **A** é o mais divergente, mas não contribui para elementos de matriz S e nem pode estar contido em outros diagramas porque não tem pernas externas (de fato nem para Z ele contribui pois é cancelado na normalização).

Para cada linha externa de fóton, devemos ter dentro do produto temporalmente ordenado uma corrente eletromagnética:

$$j^\mu(z) = \bar{\psi}(z) \gamma^\mu \psi(z)$$


$$\langle \Omega | A_\mu(x) | \Omega \rangle \sim \langle 0 | A_\mu(x) | 0 \rangle + K_1 \langle 0 | T \{ A_\mu(x) A^\nu(z) j_\nu(z) \} | 0 \rangle +$$

$$+ K_2 \langle 0 | T \{ A_\mu(x) A^\nu(z) j_\nu(z) A^\rho(z') j_\rho(z') \} | 0 \rangle +$$

$$+ K_3 \langle 0 | T \{ A_\mu(x) A^\nu(z) j_\nu(z) A^\rho(z') j_\rho(z') A^\sigma(z'') j_\sigma(z'') \} | 0 \rangle + \dots =$$

$K_n =$ constantes e integrais em z

$K_n^D =$ constantes, integrais em z e propagadores

$$\sim K_1^D \langle 0 | T \{ j_\mu(z) \} | 0 \rangle + K_3^D \langle 0 | T \{ j_\mu(z) \overbrace{j_\nu(z')}^{c} j_\rho(z'') \} | 0 \rangle + \dots \sim$$


$$\sim K \int d^4z \langle \Omega | T \{ j_\mu(z) \} | \Omega \rangle$$

$$\langle \Omega | A_\mu(x) A_\nu(x') A_\rho(x'') | \Omega \rangle \sim \iiint \langle \Omega | j_\mu(x) j_\nu(x') j_\rho(x'') | \Omega \rangle$$

Como a QED é invariante por conjugação de carga: $C | \Omega \rangle = | \Omega \rangle$

e temos: $C \bar{\psi} \gamma^\mu \psi C^\dagger = - \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

então: $\langle \Omega | T \{ j_\mu(z) \} | \Omega \rangle = - \langle \Omega | T \{ j_\mu(z) \} | \Omega \rangle = 0$

$$\langle \Omega | T \{ j_{\mu_1}(z_1) \dots j_{\mu_n}(z_n) \} | \Omega \rangle = (-1)^n \langle \Omega | T \{ j_{\mu_1}(z_1) \dots j_{\mu_n}(z_n) \} | \Omega \rangle$$

Qualquer correlator com um número ímpar de fótons externos é zero. Isto elimina os diagramas B e D acima. O restante dos diagramas acima é diferente de zero, comecemos pensando sobre o diagrama F (auto energia do elétron) - ele é função do momento do elétron (p), a série em torno de p = 0 fica:

$$\leftarrow \text{1PI} \leftarrow = A_0 + A_1 \not{p} + A_2 p^2 + \dots$$

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d p^n} \left(\leftarrow \text{1PI} \leftarrow \right) \Big|_{p=0}$$

↳ não estamos nos preocupando com as divergências infravermelhas, assumimos que foram devidamente regularizadas, como fizemos na pg 111.

O momento p vai estar no denominador dos propagadores aparecendo na soma 1PI, quando calculamos os coeficientes fazemos:

$$\frac{d}{d p} \left(\frac{1}{\not{p} + \not{p} - m} \right) = - \frac{1}{(\not{p} + \not{p} - m)^2} \Rightarrow \text{coeficientes com n maior tem o grau de divergência menor}$$

↳ momento integrado

A divergência superficial de A_0 (que é a maior) deve ser $D = 1$, isto quer dizer que a divergência de A_1 é logarítmica e o restante dos coeficientes não diverge (é preciso cuidado aqui - pode

haver subdiagramas com divergências mais altas - veremos como tratar isso em breve). Além disso vimos que (pg 120) que correções radiativas não podem dar massa ao elétron quiral (que não tem uma massa nua) e que a correção deve ser proporcional a massa, por análise dimensional vemos que a divergência é logarítmica. Temos portanto o caso em que uma simetria torna a divergência menor que a divergência superficial:

$$\leftarrow \text{1PI} \leftarrow = a_0 m L_N(\Lambda) + a_1 \cancel{\not{p}} L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

(compare com a eq. 117.1)

Podemos seguir a mesma lógica no caso do diagrama G, neste caso, como a divergência superficial já é 0, qualquer derivada em qualquer um dos momentos externos já nos dá algo finito. Portanto a expansão nestas três variáveis só tem divergências no coeficiente A_0 :

$$\text{1PI} \sim -i e \cancel{\not{p}} L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

Como já discutimos (pg 125) a auto-energia do fóton (diagrama C) deve ter a forma:

$$\text{1PI} = (\delta^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2)$$

o que já é a série de Taylor que procuramos, dentro de $\Pi(q^2)$ temos os coeficientes A_n , $n = 2, 3, \dots$. Os coeficientes A_0 e A_1 são zero, e a divergência superficial cai de 2 para 0 nos termos de $\Pi(q^2)$ que não dependem do momento (os termos de $\Pi(q^2)$ que dependem de q são finitos) - exatamente o que obtivemos na página 132.

Observação importante:

Temos aqui dois exemplos importantes do que chamamos de "massas protegidas" por simetrias. A simetria de gauge da QED impede o fóton de ter massa nua e impede, via WT, que ele ganhe massa a qualquer ordem de perturbação. Este mecanismo continua útil mesmo quando a simetria é **quebrada explicitamente!** A simetria quiral impede o elétron de ter massa nua e de ganhar via correções, mas de fato o elétron tem massa. No entanto o conhecimento de que no limite em que a massa nua vai para zero, todas as correções radiativas também devem ir, nos diz que estas devem ser proporcionais a massa. Esta simetria quebrada protege a massa de divergências mais intensas (em vez de lineares são logarítmicas).

Nos resta apenas o espalhamento fóton-fóton (diagrama E). Sabemos que (identidade de Ward):

$$k^\mu \left(\text{1PI} \right) = 0$$

É possível mostrar que isto implica na seguinte estrutura para a amplitude deste diagrama:

$$(g^{\mu\nu} k_1^\sigma - g^{\nu\sigma} k_1^\mu) \times (g^{\alpha\beta} k_2^\gamma - g^{\beta\gamma} k_2^\alpha) (g^{\delta\epsilon} k_3^\zeta - g^{\epsilon\zeta} k_3^\delta) (g^{\eta\theta} k_4^\iota - g^{\theta\iota} k_4^\eta)$$

Como há uma potência do momento em cada termo, temos que todos os coeficientes da série com $n < 4$ devem ser zero. O primeiro termo diferente de zero tem quatro derivadas o que leva a $D = -4$.

O que concluímos é que só existem três blocos básicos divergentes na QED, os diagramas **C** (auto-energia do fóton), **F** (auto-energia do elétron) e **G** (vértice). Os diagramas **G** e **C**, de fato possuem apenas um coeficiente divergente, ao passo que o diagrama **F** contém dois. Isto quer dizer que a QED tem um total de **quatro grandezas divergentes** que temos que absorver em redefinições de parâmetros para obter uma teoria finita. Veremos isto mais a frente

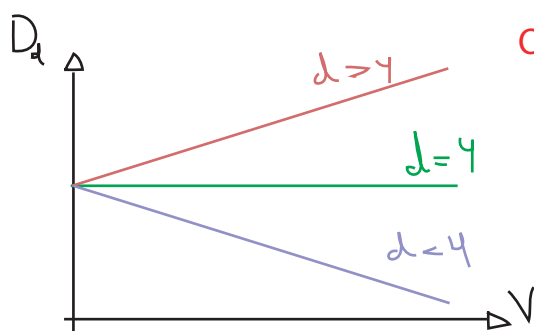
Suponha que seguíssemos o mesmo procedimento para QED em d dimensões. Neste caso:

$$D_d = \underbrace{dL - P_e - 2P_\gamma}_{\text{agora cada loop contribui com uma integral de momento d-dimensional}}$$

usando as eqs. 139.1 e 139.2 temos:

$$\begin{aligned} (139.2) \Rightarrow \left. \begin{aligned} P_\gamma &= \frac{V - N_\gamma}{2} \\ P_e &= \frac{2V - N_e}{2} \end{aligned} \right\} D_d &= d(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma = (d-1)P_e + (d-2)P_\gamma - dV + d = \\ &= (d-1)V - \frac{(d-1)N_e}{2} + \frac{(d-2)V}{2} - \frac{(d-2)N_\gamma}{2} - dV + d = \\ &= d + \underbrace{\left(\frac{d-4}{2}\right)V} - \left(\frac{d-2}{2}\right)N_\gamma - \left(\frac{d-1}{2}\right)N_e \end{aligned}$$

O número de vértices só é cancelado em $d = 4$



$d < 4 \Rightarrow$ somente diagramas de ordem baixa (na expansão perturbativa) divergem superficialmente

A QED é uma **Teoria Super-Renormalizável**

$d = 4 \Rightarrow$ há um número finito de amplitudes divergentes, mas há um infinidade de diagramas contribuindo para cada uma destas divergências, já que as divergências ocorrem a todas as ordens na expansão perturbativa

A QED é uma **Teoria Renormalizável**

$d > 4 \Rightarrow$ qualquer amplitude é divergente, já que se formos mais longe na expansão perturbativa (V cresce) encontraremos divergências

A QED é uma **Teoria Não-Renormalizável**

Contagem de Divergências Ultravioleta - Campo Escalar $\lambda\phi^n$

(Peskin 10.1, Ryder 9.1 ~ 9.5)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{n!} \phi^n \quad (\text{EM } d \text{ DIMENSÕES})$$

$n \geq 3$

- N = número de linhas externas
- V = número de vértices
- P = número de propagadores
- L = número de loops

Assim como antes (eq. 139.1): $L = P - V + 1$

De cada vértice saem n linhas, então 139.2 fica: $V = \frac{N + 2P}{n}$

$$D = dL - 2P =$$

$$= d(P - V + 1) - 2P = d + \left[n \left(\frac{d-2}{2} \right) - d \right] V - \left(\frac{d-2}{2} \right) N$$

(eq. 144.1)

$\left. \begin{array}{l} \text{Não-Renormalizável} \\ \text{Renormalizável} \\ \text{Super-Renormalizável} \end{array} \right\} \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} n > \frac{2d}{d-2} \\ n = \frac{2d}{d-2} \\ n < \frac{2d}{d-2} \end{array}$

$d \leq 2 \Rightarrow \forall$ Teoria é Super-Renormalizável

$d=4 \left\{ \begin{array}{l} \lambda\phi^4 \text{ renormalizável} \\ \lambda\phi^6 \text{ não-renormalizável} \end{array} \right.$	$d=3 \left\{ \begin{array}{l} \lambda\phi^4 \text{ super-renormalizável} \\ \lambda\phi^6 \text{ renormalizável} \end{array} \right.$
$\frac{2d}{d-2} = 4$	$\frac{2d}{d-2} = 6$

Outra forma de chegar a 144.1 é analisando a dimensão da lagrangeana. Em unidades naturais a ação tem que ser adimensional:

$Dim[S] = 0 \dots 0$ GeV⁰

$S = \int d^d x \mathcal{L} \Rightarrow \underbrace{Dim[d^d x]}_{\text{GeV}^{-d}} + Dim[\mathcal{L}] = 0$

$\therefore Dim[\mathcal{L}] = d$

Voltando a lagrangeana do campo escalar podemos ver que:

$$\text{Dim} \left[\frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)^2 \right] = d = 2 \underbrace{\text{Dim}[\partial_\nu \phi]}_{\text{Dim}[\phi] + 1}$$

$$\boxed{\text{Dim}[\phi] = \frac{d-2}{2}} \quad (\text{eq. 145.1})$$

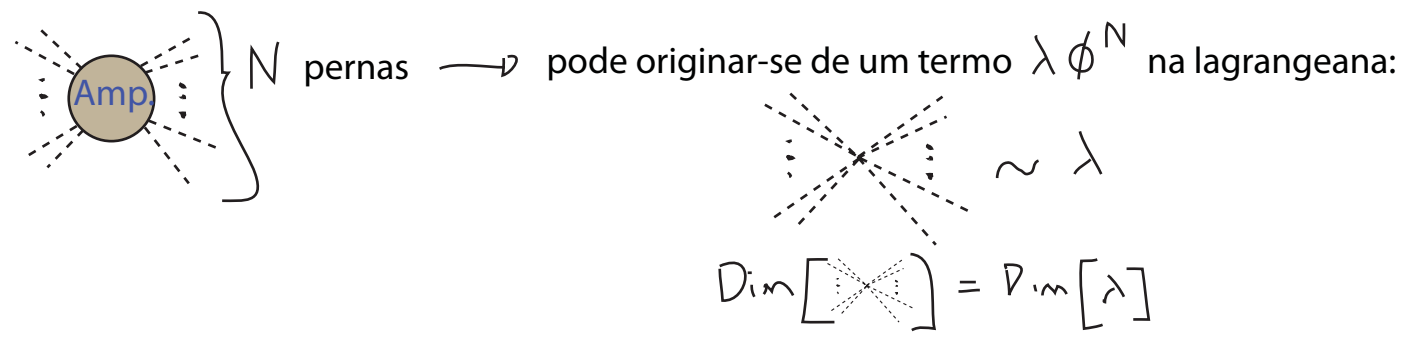
$$\text{Dim} [m^2 \phi^2] = d = 2 \text{Dim}[m] + 2 \underbrace{\text{Dim}[\phi]}_{d-2}$$

$$\text{Dim}[m] = 1 \quad (\text{para nossa sorte! 😊})$$

$$\text{Dim} \left[\frac{\lambda}{n!} \phi^n \right] = d = \text{Dim}[\lambda] + n \text{Dim}[\phi]$$

$$\boxed{\text{Dim}[\lambda] = d - \frac{n(d-2)}{2}} \quad (\text{eq. 145.2})$$

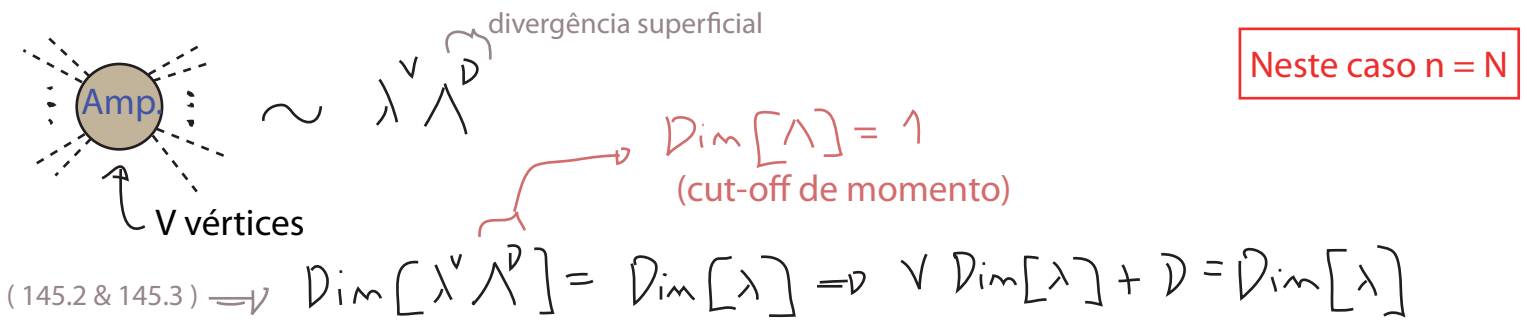
Suponha agora o seguinte diagrama:



Como devo somar sobre todas as possibilidades, qualquer diagrama com N linhas externas terá:

$$\boxed{\text{Dim} \left[\text{diagram} \right] = d - \frac{N(d-2)}{2}} \quad (\text{eq. 145.3})$$

Em uma teoria apenas com o vértice $\lambda \phi^N$ um diagrama com V vértices será proporcional a:



(145.2 & 145.3) $\Rightarrow \text{Dim}[\lambda^V \Lambda^D] = \text{Dim}[\lambda] \Rightarrow V \text{Dim}[\lambda] + D = \text{Dim}[\lambda]$

$$\boxed{V \left(d - \frac{N(d-2)}{2} \right) + D = d - \frac{N(d-2)}{2}} \quad \begin{matrix} \text{(que concorda com 144.1} \\ \text{para } n = N) \\ \text{(eq. 145.4)} \end{matrix}$$

Aqui fica claro que o que multiplica V é $-\text{Dim}[\lambda]$:

$$D = -\text{Dim}[\lambda] V + \text{Dim}[\lambda]$$

podemos então dizer que:

$\text{Dim}[\lambda] > 0 \Rightarrow$ Super-Renormalizável

$\text{Dim}[\lambda] = 0 \Rightarrow$ Renormalizável

$\text{Dim}[\lambda] < 0 \Rightarrow$ Não-Renormalizável

(146.1)

Esta análise poderia ter sido feita também para a QED ou qualquer outra teoria, com a mesma conclusão.

Teoria Perturbativa Renormalizada

(Peskin 10.2, Ryder 9.3)

Nos preocuparemos agora em achar métodos gerais para redefinir nossa teoria em termos de grandezas observáveis e finitas. Note que no caso das correções radiativas para QED foi possível, uma vez que consideramos todos os diagramas e redefinimos as constantes, ter observáveis finitos. Essencialmente o que fizemos foi a troca:

$\left. \begin{matrix} m_0 \\ e_0 \\ \Lambda \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} m(\Lambda, m_0, e_0) \\ e(\Lambda, m_0, e_0) \end{matrix} \right.$

parâmetros nus, não observáveis e arbitrariamente grandes. Se cancelam com as divergências de forma a obter m e e finitos.

finitos no limite $\Lambda \rightarrow \infty$

Colocando de forma simples: isto é a renormalização! Daqui para frente o que faremos é encontrar métodos práticos e confiáveis de fazer esta troca (já que até agora fomos fazendo de forma um tanto caso a caso).

Vejamos como fica a teoria $\lambda\phi^4$, analisando

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4$$

Analisemos quais são os diagramas divergentes desta teoria. Como ela é simétrica por $\phi \rightarrow -\phi$ todos os diagramas com um número ímpar de linhas externas dão zero. Segundo a eq. 144.1 (para $d = 4$, quando não importa o número de vértices):

