

Aqui fica claro que o que multiplica V é $-\text{Dim}[\lambda]$:

$$D = -\text{Dim}[\lambda] V + \text{Dim}[\lambda]$$

podemos então dizer que:

$\text{Dim}[\lambda] > 0 \Rightarrow$ Super-Renormalizável

$\text{Dim}[\lambda] = 0 \Rightarrow$ Renormalizável

$\text{Dim}[\lambda] < 0 \Rightarrow$ Não-Renormalizável

(146.1)

Esta análise poderia ter sido feita também para a QED ou qualquer outra teoria, com a mesma conclusão.

Teoria Perturbativa Renormalizada

(Peskin 10.2, Ryder 9.3)

Nos preocuparemos agora em achar métodos gerais para redefinir nossa teoria em termos de grandezas observáveis e finitas. Note que no caso das correções radiativas para QED foi possível, uma vez que consideramos todos os diagramas e redefinimos as constantes, ter observáveis finitos. Essencialmente o que fizemos foi a troca:

Diagram illustrating the replacement of parameters m_0 , e_0 , and Λ with renormalized parameters $m(\Lambda, m_0, e_0)$ and $e(\Lambda, m_0, e_0)$. Red annotations explain that m and e are finite in the limit $\Lambda \rightarrow \infty$, while the original parameters are not.

Colocando de forma simples: isto é a renormalização! Daqui para frente o que faremos é encontrar métodos práticos e confiáveis de fazer esta troca (já que até agora fomos fazendo de forma um tanto caso a caso).

Vejamos como fica a teoria $\lambda\phi^4$, analisando

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4$$

Analisemos quais são os diagramas divergentes desta teoria. Como ela é simétrica por $\phi \rightarrow -\phi$ todos os diagramas com um número ímpar de linhas externas dão zero. Segundo a eq. 144.1 (para $d = 4$, quando não importa o número de vértices):



$$\text{Diagram} \Rightarrow D = 0$$

Escrevendo uma série de Taylor (agora em p^2) e estudando a divergência dos coeficientes (como fizemos na pg 141 para QED) obtemos:

$$\sim \Lambda^2 + p^2 L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

$$\sim L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

São três constantes divergentes que precisamos "absorver" em redefinições. Faremos isso redefinindo a constante de acoplamento, a massa e o campo em si. Lembrando que:

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | \Omega \rangle e^{i p \cdot x} = \frac{i Z}{p^2 - m^2} + (\text{termos sem polo em } m^2)$$

Se quisermos obter um propagador próximo ao polo que seja parecido com o de uma partícula livre (só que com a massa física) devemos remover este Z. É possível fazer isso definindo:

$$\boxed{\phi \equiv Z^{1/2} \phi_r} \rightarrow \phi_r = Z^{-1/2} \phi \quad (\text{eq. 147.1})$$

O resultado desta substituição na dedução das pgs 74 e 75 será o de fazer sumir o fator Z em toda a conta. O mesmo ocorrerá com todos os Z's que aparecem na fórmula de LSZ (eq. 83.1).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z (d_\nu \phi_r)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 Z \phi_r^2 - \frac{\lambda_0}{4!} Z^2 \phi_r^4$$

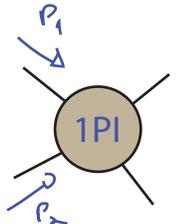
Ainda precisamos nos livrar de m_0 e λ_0 . Para tanto definamos:

$$\delta Z = Z - 1 \quad \delta m = m_0^2 Z - m^2 \quad \delta \lambda = \lambda_0 Z^2 - \lambda$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (d_\nu \phi_r)^2 + \underbrace{\delta Z \frac{1}{2} (d_\nu \phi_r)^2}_{\text{contratermos}} - \frac{m^2}{2} \phi_r^2 - \underbrace{\frac{\delta m}{2} \phi_r^2}_{\text{contratermos}} - \frac{\lambda}{4!} \phi_r^4 - \underbrace{\frac{\delta \lambda}{4!} \phi_r^4}_{\text{contratermos}}$$

Importante: note que não somamos estes novos termos, apenas re-escrevemos a lagrangeana em função de novos campos e parâmetros.

Os parâmetros físicos, m e λ . A massa já está bem definida como a localização do menor polo da função de dois pontos. No caso de λ , temos liberdade de escolha. Escolheremos definir:



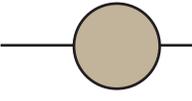
$$p = p_1 + p_2$$

$$\Rightarrow i \Gamma^{(2)}(p^2)$$

$$p^2 = 0 \Rightarrow i \Gamma^{(2)}(p^2) = -i \lambda$$

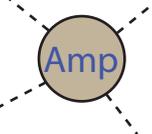
$$\lambda \equiv -\Gamma^{(2)}(p^2 = 0)$$

Essas definições podem ser resumidas em duas equações, chamadas de **condições de renormalização**:



$$= \frac{i}{p^2 - m^2} + (\text{termos sem polo em } m^2)$$

esta equação fixa duas grandezas, a posição do polo e o seu resíduo (m e Z).



$$= -i \lambda$$

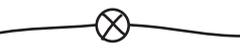
$p^2 = 0 \left\{ \begin{array}{l} s = 4m^2 \\ t = u = 0 \end{array} \right.$

(eq. 148.1)

Esta "nova" lagrangeana tem as seguintes regras de Feynman:



$$= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$


$$= -i \lambda$$


$$= i (p^2 \delta Z - \delta m)$$


$$= -i \delta \lambda$$

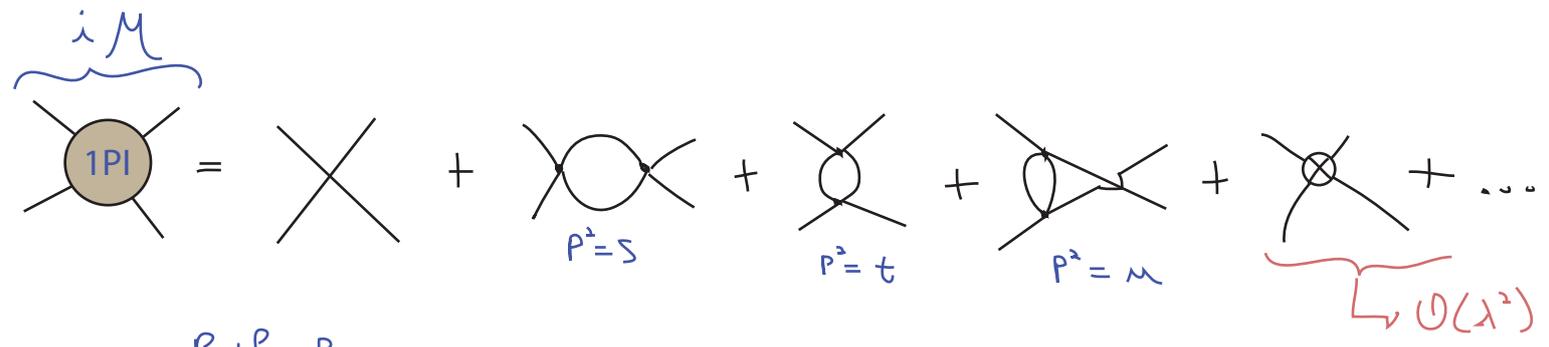
(notem que tratamos os contra termos como novas interações) e a utilização desta lagrangeana com contratermos é chamada de **Teoria de Perturbação Renormalizada**.

O procedimento a seguir é então o seguinte:

- (1) calculamos a amplitude desejada com as regras de Feynman novas
- (2) seguimos o procedimento usual para tratar loops (parametrização de Feynman, regularizações, etc...)
- (3) o resultado vai ser função dos parâmetros nos contratermos (δZ , δm e $\delta \lambda$ no caso escalar)
- (4) usamos as condições de renormalização (eq 148.1) para encontrar os parâmetros

As amplitudes resultantes devem ser finitas e independentes do regulador

Veamos como ficam as divergências de $\lambda\phi^4$:



$$i\mathcal{M} = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} = (-i\lambda)^2 i V(P^2)$$

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + (-i\lambda)^2 [iV(s) + iV(t) + iV(u)] - i\delta_\lambda \quad (\text{eq. 149.1})$$

condição de normalização (eq. 148.1) $\Rightarrow \left. \begin{matrix} s = 4m^2 \\ u = t = 0 \end{matrix} \right\} i\mathcal{M} = -i\lambda$
 $\hookrightarrow (-i\lambda)^2 [iV(4m^2) + 2iV(0)] - i\delta_\lambda = 0$

$$\delta_\lambda = -\lambda^2 [V(4m^2) + 2V(0)]$$

(eq. 149.2)

nesta ordem de perturbação

$$V(s) = \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2} =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dy \frac{1}{[m^2 - y(1-y)P^2]^{2-d/2}} \right\} =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dy \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln[4\pi] - \ln[m^2 - y(1-y)s] \right) \right\} =$$

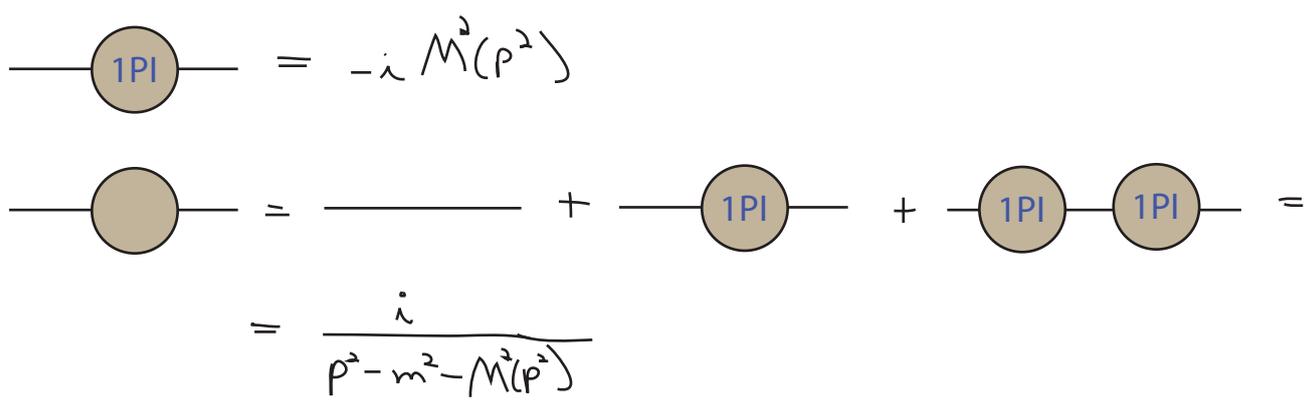
$$\delta_\lambda = \frac{\lambda^2}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dy \left\{ \frac{1}{[m^2 - y(1-y)4m^2]^{2-d/2}} + \frac{2}{[m^2]^{2-d/2}} \right\} =$$

$$= \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left(\frac{6}{\epsilon} - 3\delta + 3L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)4m^2] - 2L_N[m^2] \right)$$

Juntando este resultado ao de 149.1, temos

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= -i\lambda \left[\frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left\{ \left(\frac{2}{\epsilon} - \delta + L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)S] \right) + \left(\frac{2}{\epsilon} - \delta + L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)u] \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{2}{\epsilon} - \delta + L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)t] \right) \right\} - i\frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left(\frac{6}{\epsilon} - 3\delta + 3L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)4m^2] - 2L_N[m^2] \right) \right] \\ &= -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left\{ L_N\left(\frac{m^2 - \gamma(1-\gamma)S}{m^2 - \gamma(1-\gamma)4m^2}\right) + L_N\left(\frac{m^2 - \gamma(1-\gamma)u}{m^2}\right) + L_N\left(\frac{m^2 - \gamma(1-\gamma)t}{m^2}\right) \right\} \end{aligned}$$

δ_z e δ_m vêm da função de dois pontos:



A condição de normalização é (148.1): $\text{tadpole} = \frac{i}{p^2 - m^2} + \dots$

portanto: $M^2(p^2) \Big|_{p^2=m^2} = 0$ (eq. 150.1)

e também (expandindo o propagador em torno do polo):

$$p^2 - m^2 - M^2(p^2) = -M^2(p^2) \Big|_{p^2=m^2} + \left(1 - \frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right) (p^2 - m^2) + \mathcal{O}(p^2 - m^2)^2$$

(eq. 150.2)

$$\frac{i}{p^2 - m^2 - M^2(p^2)} = \frac{i \left(1 - \frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right)^{-1}}{p^2 - m^2} = 1 \Rightarrow \frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} = 0$$

Diagrammatic expansion: 1PI = [diagram] + [diagram] + [diagram with cross] + ...

Integral representation of the self-energy diagram: \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} = \lim_{d \to 4} (-i\lambda/2) \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - d/2)}{(m^2)^{1 - d/2}} = \lim_{\epsilon \to 0} (-i\lambda/2) \frac{1}{(4\pi)^2} [-\frac{2}{\epsilon} - m^2 \ln(4\pi) - m^2 \ln(1/m^2) + m^2 \gamma - m^2]

▶ O mesmo tipo de polo que obtivemos para a divergência logarítmica na pag 131 (!?!?!). O fato é que em regularização dimensional, não é tão fácil ver a divergência quadrática (ou em geral a potência da divergência). Ela aparece como um polo em d = 2.

O fato é que \Gamma(z) tem polos em z = 0, -1, -2, -3, ... mas estes polos são sempre do tipo

\Gamma(a \in -b) \simeq \frac{(-1)^{-b}}{a \in b!} + O(\epsilon^0)

a \in \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{N}_0

(eq. 131.1)

\int \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2} \frac{\Gamma(n-d/2)}{\Gamma(n)}

\hookrightarrow n=1 \Rightarrow \Gamma(1 - d/2) \rightarrow 1 - d/2 \le 0 \quad d \ge 2

\int \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q_E^2 + \Delta)} \sim \Lambda^2 \iff \left\{ \begin{aligned} &\text{dois polos em } d \le 4 \Rightarrow d = (2, 4) \\ &\hookrightarrow \epsilon = 4 - d \Rightarrow \Gamma(\frac{\epsilon}{2} - 1) \simeq -\frac{2}{\epsilon} + \dots \\ &\hookrightarrow \epsilon = 2 - d \Rightarrow \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) \simeq \frac{2}{\epsilon} + \dots \end{aligned} \right.

\int \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q_E^2 + \Delta)^2} \sim \Lambda^4 \iff \left\{ \begin{aligned} &\text{três polos em } d \le 6 \Rightarrow d = (2, 4, 6) \\ &\hookrightarrow \epsilon = 6 - d \Rightarrow \Gamma(\frac{\epsilon}{2} - 2) \simeq \frac{1}{\epsilon} \end{aligned} \right.

$\hookrightarrow n=2 \Rightarrow \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \rightarrow 2 - \frac{d}{2} \leq 0 \quad d \geq 4$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \sim \text{Log} \Lambda \iff \begin{cases} \text{apena um polo em } d \leq 4 \\ \epsilon = 4 - d \Rightarrow \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) \sim \frac{2}{\epsilon} + \dots \end{cases}$$

$$-i M^2(p^2) = \left(-\frac{i\lambda}{2} \right) \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1 - 1/2}} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m)$$

como esta parte não depende de p^2 , fica fácil satisfazer ambas as condições (150.1 e 150.2)

basta que:

$$\delta_Z = 0 \quad (\text{eq. 151.1})$$

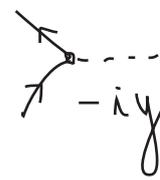
$$\delta_m = -\frac{\lambda}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1 - 1/2}} \quad (\text{eq. 151.2})$$

e teremos: $M^2(p^2) = 0 \quad \forall p^2$

(δ_Z não é zero em ordens superiores de perturbação, veremos isso mais adiante)

Note que a correção para a massa do escalar é quadraticamente divergente!

Esse cancelamento de δ_Z em L.O. é uma peculiaridade de $\lambda\phi^4$, outras teorias escalares não terão esta propriedade. Tomemos, por exemplo, uma teoria escalar com acoplamentos de Yukawa:

$$\mathcal{L}_Y = -\gamma \bar{\psi} \psi \phi$$


$$-i M^2(p^2) = \text{loop diagram} + \text{tree diagram} = \Delta = m_\phi^2 - \kappa(1-\kappa)p^2$$

$$-\gamma \gamma^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2 - \kappa(1-\kappa)p^2 + m^2}{(\ell^2 + \kappa(1-\kappa)p^2 - m^2)^2} = \frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx x^{d-1} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{\Delta^{1-1/2}}$$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{\ell_E^2} \sim \int d\ell_E \frac{\ell_E^3}{\ell_E^2} \sim \Lambda^2$$

$$M^{\lambda}(p^2) = \frac{-4g^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx (d-1) \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Delta^{1-d/2}} - (p^2 \delta Z - \delta m)$$

$$\frac{d}{dp^2} M^{\lambda}(p^2) = -\frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left[\underbrace{-x(1-x) \left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma(1-d/2)}_{-\Gamma(2-d/2)} (m^2 - x(1-x)p^2)^{d/2-2} \right] - \delta Z$$

$$\left. \frac{d}{dp^2} M^{\lambda}(p^2) \right|_{p^2=m^2} = 0 \Rightarrow \delta Z = -\frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{x(1-x) \Gamma(2-d/2)}{(m^2 - x(1-x)m^2)^{2-d/2}} \quad (\text{eq. 152.1})$$

~ $L_N(\Lambda^2)$

$$M^{\lambda}(m^2) = \frac{-4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1-d/2)}{(m^2 - x(1-x)m^2)^{1-d/2}} - (m^2 \delta Z - \delta m)$$

$$M^{\lambda}(m^2) = 0 \Rightarrow \delta m = \frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1-d/2)}{(m^2 - x(1-x)m^2)^{1-d/2}} + m^2 \delta Z \quad (\text{eq. 152.2})$$

~ Λ^2

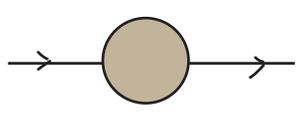
Renormalização da QED

(Peskin 10.3, Ryder 9.5 a 9.7)

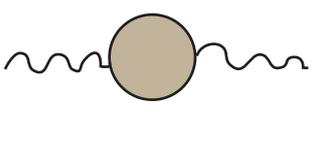
Tentemos agora repetir o processo acima para a QED

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi} (i\not{\partial} - m_0) \Psi - e_0 \bar{\Psi} \not{A} \Psi$$

Vimos que a partir desta lagrangeana obtemos:



$$= \frac{i Z_2}{\not{p} - m} + \dots \quad (\text{pg 77})$$



$$= -\frac{i Z_3 g_{\mu\nu}}{q^2} + \dots \quad (\text{pg 127})$$