

$$M^{\lambda}(p^2) = \frac{-4g^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx (d-1) \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Delta^{1-d/2}} - (p^2 \delta Z - \delta m)$$

$$\frac{d}{dp^2} M^{\lambda}(p^2) = -\frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left[ \underbrace{-x(1-x)}_{-\Gamma(2-d/2)} \left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma(1-d/2) (m_p^2 - x(1-x)p^2)^{d/2-2} \right] - \delta Z$$

$$\left. \frac{d}{dp^2} M^{\lambda}(p^2) \right|_{p^2=m^2} = 0 \Rightarrow \delta Z = -\frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{x(1-x) \Gamma(2-d/2)}{(m_p^2 - x(1-x)m^2)^{2-d/2}} \quad (\text{eq. 152.1})$$

~  $L_N(\Lambda^2)$

$$M^{\lambda}(m^2) = \frac{-4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1-d/2)}{(m_p^2 - x(1-x)m^2)^{1-d/2}} - (m^2 \delta Z - \delta m)$$

$$M^{\lambda}(m^2) = 0 \Rightarrow \delta m = \frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1-d/2)}{(m_p^2 - x(1-x)m^2)^{1-d/2}} + m^2 \delta Z \quad (\text{eq. 152.2})$$

~  $\Lambda^2$

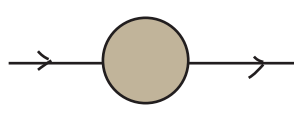
### Renormalização da QED

(Peskin 10.3, Ryder 9.5 a 9.7)

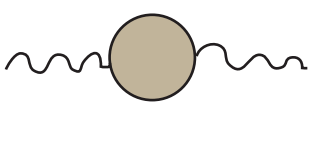
Tentemos agora repetir o processo acima para a QED

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi} (i\not{\partial} - m_0) \Psi - e_0 \bar{\Psi} \not{A} \Psi$$

Vimos que a partir desta lagrangeana obtemos:



$$= \frac{i Z_2}{\not{p} - m} + \dots \quad (\text{pg 77})$$



$$= -\frac{i Z_3 g_{\mu\nu}}{q^2} + \dots \quad (\text{pg 127})$$

Começamos então com a renormalização dos campos:

$$\Psi \equiv Z_2^{1/2} \Psi_R \quad (\text{eq. 154.1})$$

$$A^\mu \equiv Z_3^{1/2} A_{R\mu} \quad (\text{eq. 154.2})$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 (F_{\mu\nu})^2 + Z_2 \bar{\Psi}_R (i \not{\partial} - m_0) \Psi_R - e_0 Z_2 Z_3^{1/2} \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu}$$

A primeira condição de renormalização é a que define a carga física:

$$(e_0 Z_2 Z_3^{1/2} = e Z_1)_{q=0} \quad (\text{eq. 154.3})$$

isto é equivalente a definição de  $Z_1$  que usamos na eq 123.1 já que este é o fator que aparece no vértice (multiplicando a carga) quando  $q = 0$ . Ademais lembre que:

(pg 127)  $\Rightarrow Z_3^{1/2} e_0 = e$

(pg 124)  $\Rightarrow Z_2 = Z_1$

de forma que as definições dos Z's que já vínhamos usando se mantém.

Fazendo então as definições adicionais:

$$\begin{cases} \delta_3 = Z_3 - 1 \\ \delta_2 = Z_2 - 1 \\ \delta_m = Z_2 m_0 - m \\ \delta_1 = Z_1 - 1 = \frac{e_0}{e} Z_2 Z_3^{1/2} - 1 \end{cases}$$



(eq. 154.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} \underbrace{Z_3}_{1+\delta_3} (F_{\mu\nu})^2 + \underbrace{Z_2}_{1+\delta_2} \bar{\Psi}_R (i \not{\partial} - \underbrace{m_0}_{Z_2 m_0 = m + \delta m}) \Psi_R - \underbrace{e_0 Z_2 Z_3^{1/2}}_{e Z_1 = e(1+\delta_1)} \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu} = \\ &= -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi}_R (i \not{\partial} - m) \Psi_R - e \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu} + \\ &\quad -\frac{1}{4} \delta_3 (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi}_R (i \delta_2 \not{\partial} - \delta m) \Psi_R - \delta_1 \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu} \end{aligned}$$

cujas regras de Feynman são:

$$\text{Diagram: } \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \text{---} \\ \text{q} \end{array} = \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \quad \longrightarrow \quad \text{Diagram: } \begin{array}{c} \text{solid line} \\ \text{---} \\ \not{p} - m + i\epsilon \end{array}$$

$$\text{Diagram} = -ie\gamma^\mu$$

$$\text{Diagram} = i(\not{p}\delta_2 - \delta_1 m)$$

$$\text{Diagram} = -i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\delta_3$$

$$\text{Diagram} = -ie\gamma^\mu\delta_4$$

$$\int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] = \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} A_\mu (-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu \right]$$

As condições que fixam as normalizações dos propagadores e definem a carga e a massa do férmion podem ser escritas usando as definições que fizemos anteriormente:

$$\text{Diagram (1PI)} = i\Pi^{\mu\nu}(q) = i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2)$$

$$\text{Diagram (1PI)} = -i\Sigma(\not{p})$$

$$\text{Diagram (Amp)} = -ie\Gamma^\mu(p, p)$$

Só que agora estou REDEFININDO estas grandezas, todas incluem agora as contribuições que vem dos contratermos  
 A definição de  $\Gamma$  agora é feita com a carga física

Como discutido na página 143, temos quatro grandezas divergentes na QED, isto levou aos quatro  $\delta$ 's nos contratermos, as quatro condições que usamos para obtê-los são:

$$\Sigma(\not{p}=m) = 0 \quad (a)$$

$$\Pi(q^2=0) = 0 \quad (b)$$

$$\frac{d}{d\not{p}} \Sigma(\not{p}) \Big|_{\not{p}=m} = 0 \quad (c)$$

$$-ie\Gamma^\mu(p'-p=0) = -ie\gamma^\mu \quad (d)$$

Vejamos a aplicação destas condições e o valor dos contratermos em um loop. Já obtivemos a expressão para a auto-energia do elétron usando regularização de Pauli-Villars (eq. 117.1), se tivéssemos feito regularização dimensional, chegaríamos a:

antes da inclusão dos contratermos

$$-i \sum_2^* (\rho) = -i \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\rho^2]^{2-d/2}} \times$$

$$\times [dm - (d-2)x\rho]$$

Levando em conta a contribuição do contratermo ( $\rightarrow \otimes \rightarrow$ ) e usando a condição 155.1(a), temos:

$$(m\delta_2 - \delta m) = \frac{e^2 m}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2}) (d - (d-2)x)}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)m^2]^{2-d/2}} =$$

$$= \frac{e^2 m}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2}) [(1-x)d + 2x]}{[(1-x)^2 m^2 + x\mu^2]^{2-d/2}} \quad (\text{eq. 156.1})$$

Para utilizar a condição 155.1(c) precisamos calcular:

$$\frac{d}{d\rho} \sum_2^* (\rho) = \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\rho^2]^{2-d/2}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{-2x(1-x)\rho \left(\frac{d}{2} - 2\right)}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\rho^2]} [dm - (d-2)x\rho] - (d-2)x \right\}$$

$\epsilon = d - 4$

$$\frac{d}{d\rho} \sum_2^* (\rho) \Big|_{\rho=m} = \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{4-\epsilon}{2}}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]^{2-d/2}} \left\{ - (2-\epsilon)x + \right.$$

$$\left. + \frac{\epsilon}{2} \frac{2x(1-x)m}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]} m [4 - 2x + \epsilon(x-1)] \right\}$$

\* a divergência vem toda desta parte, todo o resto é proporcional a  $\epsilon$  e dá uma contribuição finita quando multiplicado por  $1/\epsilon$  que vem da função  $\Gamma$ .

Levando em conta a contribuição do contratermo  $(\rightarrow \otimes \rightarrow)$  e usando a condição 155.1(c), temos:

$$\delta_2 = \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{d-4}{2}}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]^{2-\frac{d}{2}}} \left\{ (2-\epsilon)x - \epsilon \frac{x(1-x)m^2}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]} \left[ 4 - 2x + \epsilon(x-1) \right] \right\} \quad (\text{eq. 157.1})$$

Incluindo  $(\nu \rightsquigarrow \otimes \nu)$  na contribuição à auto-energia do fóton que calculamos em 132.2 e usando 155.1(b) temos:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) i\Pi_2^*(q^2) - i(g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \delta_3 = i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) (\Pi_2^* - \delta_3)$$

antes da inclusão dos contratermos

$$\Pi_2(q^2) = \Pi_2^*(q^2) - \delta_3 \xrightarrow{155.1(b)} \delta_3 = \Pi_2^*(0) \quad 132.2$$

$$\delta_3 = -\frac{8e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx \left[ x(1-x) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{[m^2]^{2-\frac{d}{2}}} \right] \quad (\text{eq. 157.2})$$

Para o vértice da QED, temos agora:

$$-ie\Gamma^\mu = -ie\Gamma^{*\mu} - ie\gamma^\mu \delta_1$$

antes da inclusão dos contratermos (mas sem  $Z_2$  na LSZ!)

A condição 155.1(d) nos dá:  $(1 - \delta_1)\Gamma^\mu = \Gamma^{*\mu} (p' = p = 0)$  (pg 99)

$$\delta_1 = -\delta F_1(0) \quad \rightarrow \quad F_1 = 1 + \delta F_1(0)$$

$\gamma^\mu F_1(0) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu F_2(q^2)}{2m} \xrightarrow{q=0} \gamma^\mu F_1(0)$

Como estamos fazendo tudo em regularização dimensional, precisamos escrever o resultado obtido em 108.2 nesse método, obtemos:

$$\delta F_1(q^2) = \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \frac{(2-\epsilon)^2}{2} + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Delta^{3-\frac{d}{2}}} \left[ q^2 [2(1-x)(1-y) - \epsilon xy] + m^2 [2(1-y+z)^2 - \epsilon(1-z)^2] \right] \right\}$$

Onde:  $\Delta = (1-\beta)^2 m^2 + z \nu^2 - \kappa \gamma \eta^2$

$$\delta_1 = -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{[(1-\beta)^2 m^2 + z \nu^2]^{2-d/2}} \frac{(2-\epsilon)^2}{2} + \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{[(1-\beta)^2 m^2 + z \nu^2]^{3-d/2}} m^2 [2(1-\gamma+\beta^2) - \epsilon(1-z)^2] \right\}$$

*(Handwritten note:  $\int dz (1-z)$  circled in red)*

(eq. 158.1)

As equações 156.1, 157.1, 157.2 e 158.1 fixam todos os coeficientes dos contratermos em ordem  $\alpha$ .

É possível mostrar (via integração por partes) que  $\delta_1 = \delta_2$  e que, portanto,  $z_1 = z_2$  (em ordem  $\alpha$ ). Podemos provar que isto continua valendo para qualquer ordem  $\alpha$  (o que não faremos aqui). Como um comentário final note o que aconteceria se pensarmos não apenas no elétron, mas também no muon, interagindo via QED. A equação 154.3 nos diz que:

elétron -  $e = e_0 \frac{z_2 z_3^{1/2}}{z_1}$

muon -  $e' = e_0 \frac{z_2' z_3^{1/2}}{z_1'}$

*(Handwritten note: Red arrow pointing to  $z_1'$  in the muon equation, with text: "auto-energia do muon e correção do vértice, ambas dependem da massa do muon")*

Corremos o risco do muon sentir uma carga física diferente da do elétron, mesmo que comecemos com a mesma carga nua. No entanto como  $Z_1 = Z_2$  eles se cancelam, e temos:

$$e = e' = e_0 z_3^{1/2}$$

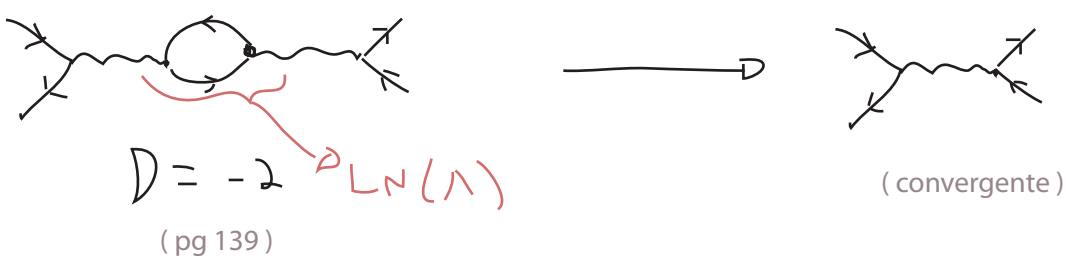
As identidades de WT (ou seja, a simetria de Gauge) garantem que a correção à carga venham somente do fóton, independente de qual partícula esta interagindo. Isto garante que o acoplamento de gauge da teoria continue universal, e que todas as partículas sintam o mesmo "running" deste acoplamento.

### Renormalização em ordem superior

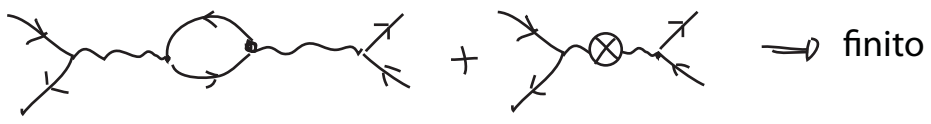
(Peskin 10.4, Ryder 9.7)

Vejam agora as sutilezas que aparecem quando consideramos diagramas com mais de um loop. Vimos que a divergência superficial de um diagrama pode nos enganar quando ele contém subdiagramas divergentes. No caso em que o diagrama que queremos calcular é convergente caso remo-

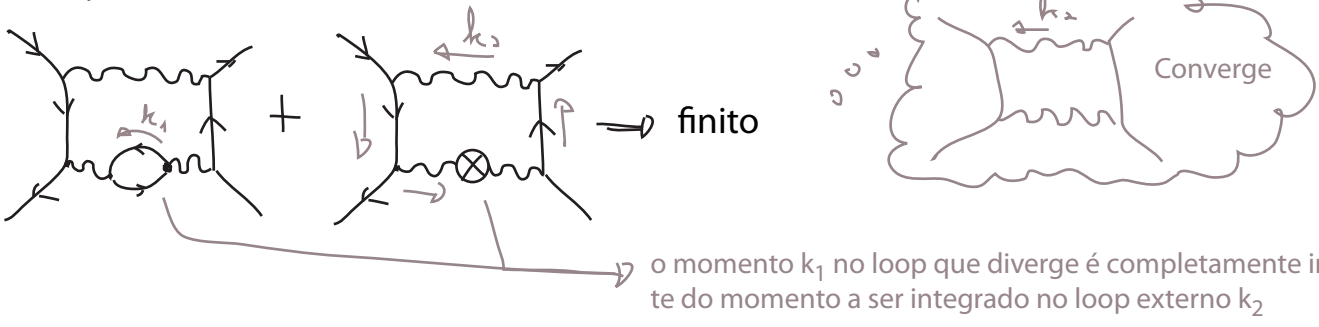
vamos o sub-diagrama divergente, fica relativamente simples:



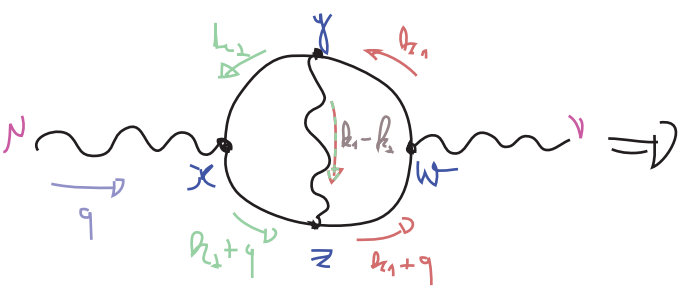
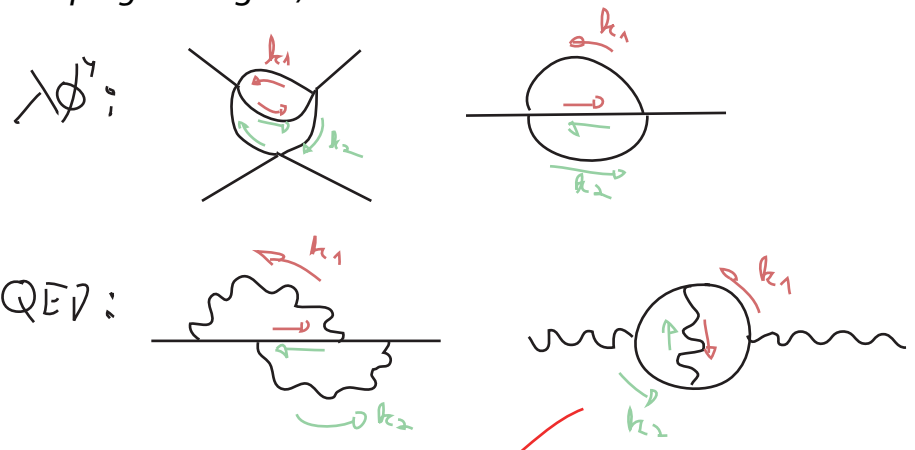
neste caso a divergência é cancelada pelo mesmo contratermo que cancelou a divergência do sub-diagrama:



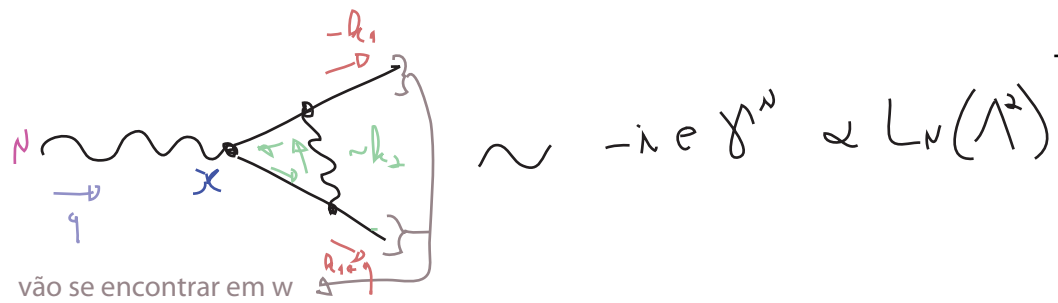
O mesmo vale para diagramas mais complicados. No exemplo abaixo basta somar os dois diagramas para cancelar a divergência na auto energia do fóton antes de fazer a integral no loop mais externo (que é finita)



A situação começa a ficar complicada quando temos diagramas em que dois loops divergentes compartilham um mesmo propagador, chamamos isto de **divergências sobrepostas** (*nested* ou *overlapping* em inglês)



Pensemos primeiro na região em que  $k_2$  é grande. Neste caso  $x, y$  e  $z$  tem que estar próximos (tanto o fóton quanto os elétrons no loop são muito virtuais) mas  $w$  pode ser mais distante. Podemos pensar nisso como uma correção de um fóton ao vértice em  $x$ :



Se voltamos com este vértice no diagrama completo antes de integrar em  $k_1$ , obteremos:

$$\text{Diagram} \sim \alpha (g^{\mu\nu} q^2 - g^\mu g^\nu) \Pi_2(q^2) \cdot \alpha L_N(\Lambda^2)$$

(pg 132)

$$\Pi_2(q^2) \sim \int_0^1 dx \, x(1-x) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \Delta^{\frac{d}{2}-2}$$

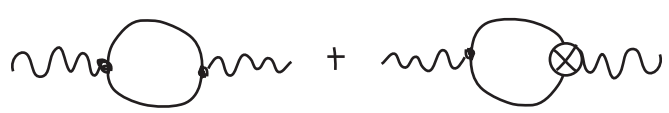
$\Delta \sim L_N(\Lambda^2) + L_N(\Delta) + \dots$   
 $\Delta \sim m^2 - x(1-x)q^2$   
 $\frac{d}{2} \sim 4$   
 $\frac{1}{\epsilon} \sim L_N(\Lambda^2)$

$$\text{Diagram} \sim \alpha^2 (L_N(\Lambda^2) + L_N(q^2)) L_N(\Lambda^2)$$

$q^2 \gg m^2$   
 ↳ domina quando  $k_1$  ou  $k_2$  é pequeno  
 ↳ domina quando  $k_1$  também é grande

Estes termos proporcionais a  $\Pi_2(q^2) L_N(\Lambda^2)$  vão contra nossa expectativa de que as divergências podem ser escritas como simples polinômios em  $q^2$  (pense no que fizemos na pag 142). Chamamos as divergências que de fato são polinômios em  $q^2$  de **divergências locais**, essas divergências não polinomiais são chamadas de **divergências não locais**.  
 pois no espaço das posições são funções delta (ou derivadas)

A aproximação acima indica que, na região em que um dos momentos é pequeno e o outro grande, o que temos é uma divergência local multiplicando uma parte não divergente. Isso sugere que os diagramas necessários para corrigir a divergência são:



De fato, se fizéssemos a conta veríamos que estes cancelam a divergência não local. Uma vez somados, resta apenas uma divergência local que é cancelada como de costume, pelo diagrama



É possível mostrar que isso funciona a todas as ordens de perturbação, contanto que a teoria seja renormalizável pelo critério da divergência superficial. Isto quer dizer que uma vez que colocemos os contratermos necessários para cancelar as divergências locais, todas as divergências (locais ou não) são removidas a todas as ordens - este resultado é conhecido como teorema BPHZ (Bogoliubov - Parasiuk - Hepp - Zimmermann)