De uma forma mais geral (qualquer teoria escalar renormalizável sem massa), teremos sempre:

$$G^{(\lambda)}(p) = \text{———} + \underbrace{(\text{LEAD. LOOP})}_{} + \text{——}\otimes\text{——} + \dots$$

contribuição não-nula com o menor número de loops

$$= \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2}\left[-\cancel{i}\,\cancel{p^2} A \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right) + \text{termos finitos}\right]\frac{i}{\cancel{p^2}} + \frac{i}{p^2}\left(i p^2 \delta_Z\right)\frac{i}{p^2} + \dots$$

$$\frac{\partial G^{(\lambda)}}{\partial M} = -\frac{i}{p^2}\frac{\partial}{\partial M}\delta_Z$$

depende da teoria

$$A \sim \mathcal{O}(\lambda^n) \quad \begin{cases} G \sim \underline{\underline{1}} + \mathcal{O}(\lambda^n) \\ \dfrac{\partial G}{\partial \lambda} \sim \mathcal{O}(\lambda^{n-1}) \end{cases}$$

$$\left[M\frac{\partial}{\partial M}G^{(\lambda)} + \underbrace{\underbrace{\beta(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda)}\underbrace{\frac{\partial}{\partial\lambda}G^{(\lambda)}}_{\mathcal{O}(\lambda^{n-1})}}_{\mathcal{O}(\lambda^n)} + \underbrace{\underbrace{2\gamma(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda)}\underbrace{G^{(\lambda)}}_{1+\mathcal{O}(\lambda^n)}}_{\mathcal{O}(\lambda)}\right] = 0$$

$n > 1 \Rightarrow$ A contribuição do termo envolvendo β vai ser sempre menor que a que envolve γ

$$-\frac{i}{p^2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta_Z + 2\gamma(\lambda)\frac{i}{p^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{1}{2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta_Z} \qquad \text{(eq. 181.1)}$$

Se lembrarmos que δz tem que cancelar a divergência dos loops em alguma escala $-p^2 = M$, concluímos que:

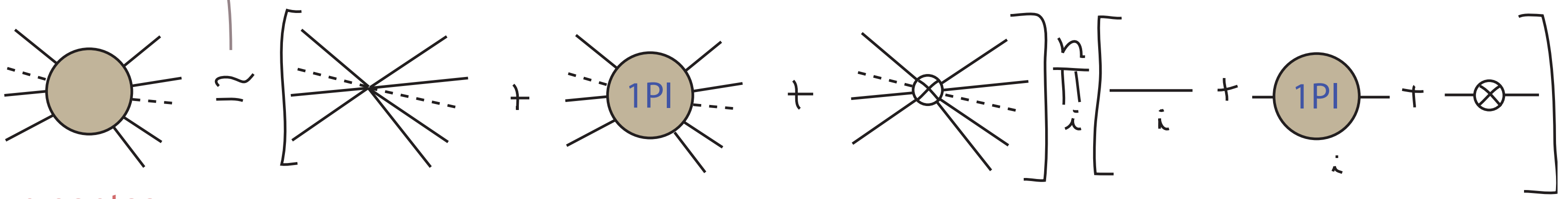
$$\left\{\frac{i}{p^2}\left[A\ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right)\right] + \frac{i}{p^2}\left(i p^2\delta_Z\right)\frac{i}{p^2}\right\}_{p^2=-M^2} = 0$$

$$\delta_Z = A\ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2}M\cdot A\cdot\left(-\frac{2}{M}\right) = \underline{-A}$$

coeficiente do logaritmo divergente
que contribuí para δz
(o mesmo ocorre na QED ou Yukawa)

Podemos obter algo análogo para a função β. Pensemos numa teoria com um acoplamento g de um vértice com n linhas, a função de n pontos será dada por:

só estou interessado nas correções a um loop



n pontos

$$\frac{i}{p_i^2} + \frac{i}{p_i^2}\left[A_i \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p_i^2}\right)\right] - \frac{i}{p_i^2}\delta z_i$$

$P(M)$

$$G^{(n)} \simeq \left(\prod_i^n \frac{i}{p_i^2}\right)\left[-ig - i\beta \ln\left[\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right] - i\delta_g - ig\sum_i^n\left(A_i \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p_i^2}\right) - \delta z_i\right)\right]$$

algum invariante do tipo das variáveis de Mandelstam
estamos assumindo que as condições de renorm. são para todas as variáveis deste tipo ~ $-M^2$

$$\left[M\frac{d}{dM} + \beta(g)\frac{d}{dg} + n\gamma(g)\right]G^{(n)}(p) = 0$$

$$\boxed{n\,\gamma(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} M \frac{d}{dM}\delta z_i}$$

$$\left(\prod_i^n \frac{i}{p_i^2}\right)\left\{M\frac{d}{dM}\left(-i\delta_g + ig\sum_i^n \delta z_i\right) + \beta(g)\underbrace{\frac{dG^{(n)}}{dg}}_{\left[-i+\mathcal{O}(g^{\geq 1})\right]} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}M\frac{d}{dM}\delta z_i \underbrace{G^{(n)}}_{-ig+\mathcal{O}(g^{\geq 2})}\right\} = 0$$

Não sabemos, a priori, em que ordem de g temos a primeira contribuição a δ_g ou δz_i, mas para que β possa cancelar estas contribuições ele tem que começar a receber contribuições na mesma ordem em que δ_g ou $g\,\delta z_i$ e, em L.O., podemos ignorar estes termos

$$M\frac{d}{dM}\left(-i\delta_g + ig\sum_i^n \delta z_i\right) - i\beta(g) - ig\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}M\frac{d}{dM}\delta z_i = 0$$

$$\boxed{\beta(g) = M\frac{d}{dM}\left(-\delta_g + \frac{1}{2}g\sum_i^n \delta z_i\right)} \quad \text{(eq. 182.1)}$$

Mais uma vez as condições de renormalização nos dizem quem são δg e δz

$$\delta_g = -\beta \ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) + \ldots$$

as partes finitas independem de M

$$\boxed{\beta(g) = -2B - g\sum_i A_i} \quad \text{(eq. 183.1)}$$

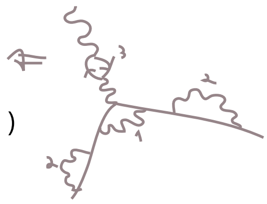
Um fato importante a ser notado é que, como não estamos interessados na parte finita (de fato somente no coeficiente da divergência) - não precisamos ser muito cuidadosos ao especificar as condições de normalização, basta fazer qualquer invariante (que fixa a escala dos logarítmos) igual a $-M^2$. É claro que isso só vale em L.O.

Argumentos semelhantes se aplicam para teorias mais complicadas. No caso da QED temos (gauge de Feynman):

$$\boxed{\gamma_2(e) = \frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial M}\delta_2} \quad \text{(eq. 183.2)}$$

$$\boxed{\gamma_3(e) = \frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial M}\delta_3} \quad \text{(eq. 183.3)}$$

$$\boxed{\beta(e) = M \frac{\partial}{\partial M}\left(-e\delta_1 + e\delta_2 + \frac{e}{2}\delta_3\right)} \quad \text{(eq. 183.3)}$$



Se modificarmos os δ's calculados nas páginas 156 a 158 para férmions sem massa e para a condição de renormalização em $-M^2$, temos:

$$\delta_1 = \delta_2 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} + \dots \sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \operatorname{Ln}\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)$$

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3}\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} + \dots \sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3} \operatorname{Ln}\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)$$

De forma que:

$$\gamma_2(e) = \frac{1}{2} M\left[-\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(-\frac{2}{M}\right)\right] = \frac{e^2}{(4\pi)^2}$$

$$\gamma_3(e) = \frac{e^2}{12\pi^2}$$

$$\beta(e) = \cancel{M}\frac{e}{\cancel{2}}\left[\cancel{-}\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(\cancel{-}\frac{\cancel{2}}{\cancel{M}}\right)\right]\frac{4}{3} = \frac{e^3}{12\pi^2}$$

Importante: a sutileza aqui é que escolhemos um gauge específico, então algumas destas funções mudam se mudarmos o gauge, outras não. $\delta 2$, por exemplo, não é invariante de gauge, $\delta 3$ e β são.

O significado de γ e β

Vamos tentar entender a e b, escrevendo-os em termos dos parâmetros da lagrangeana nua:

$$\lambda\phi^4: \qquad \phi(p) = Z(m)^{-1/2}\phi_0(p)$$

$$m \to m+\delta m \Rightarrow \phi \to \phi + \delta\eta\,\phi$$

$$\phi' = (1+\delta\eta)\phi \quad \left\{\begin{array}{l} \phi' = Z(m+\delta m)^{-1/2}\phi_0 \\ \phi = Z(m)^{-1/2}\phi_0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\delta\eta = \frac{\phi'}{\phi} = \frac{Z(m+\delta m)^{-1/2}\cancel{\phi_0}}{Z(m)^{-1/2}\cancel{\phi_0}}$$

$$\delta\eta = \frac{Z(m+\delta m)^{-1/2}}{Z(m)^{-1/2}} - 1$$

Da definição de g (eq 178.2) temos:

$$\gamma = -\frac{m}{\delta m}\delta\eta = -\frac{m}{\delta m}\left(\frac{Z(m+\delta m)^{-1/2}}{Z(m)^{-1/2}} - 1\right) = -\frac{m}{Z^{-1/2}}\Bigg(\underbrace{\frac{Z(m+\delta m)^{-1/2} - Z^{-1/2}(m)}{\delta m}}_{\frac{\partial}{\partial m}Z^{-1/2}}\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m}{Z^{-1/2}}Z^{-3/2}\frac{\partial}{\partial m}Z$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{2}\frac{m}{Z}\frac{\partial Z}{\partial m}} \quad \text{(eq. 184.1)} \qquad \underset{Z=1+\delta_Z}{\sim} \frac{1}{2}\, m\left(1-\delta_Z+\mathcal{O}(\delta_Z^2)\right)\frac{\partial}{\partial m}\delta_Z$$

que reproduz o resultado em L.O. de 181.1

mostra a ligação entre γ e a mudança de Z

No caso de β, nossa definição original já era suficientemente clara (eq 178.1):

$$\beta = \frac{m}{\delta m}\delta\lambda \quad \begin{array}{l} m \to m+\delta m \\ \lambda(m+\delta m) = \lambda(m) + \delta\lambda \end{array}$$

$$\boxed{\beta = m\frac{d}{dm}\lambda(m)} \quad \text{(eq. 184.2)}$$

, o que mostra que β nos fala como o acoplamento muda com esta escala que escolhemos para a cond. de renorm. Veremos em seguida que podemos interpretar isso como a mudança (o *running*) do acoplamento com a escala de energia do evento

Solução da equação de Callan-Symanzik

(Peskin 12.3)

Para estudar as implicações da equação CS, vamos resolvê-la para uma função de dois pontos de uma teoria com um único campo escalar (sem massa)

$$\mathrm{Dim}\left[G^{(2)}\right] = \mathrm{Dim}\left[\frac{1}{p^2}\right] = -2 \quad \therefore \quad G^{(2)} \equiv \frac{i}{p^2}\, \underbrace{g\left(-\frac{p^2}{M^2}\right)}_{\mathrm{Dim}[g]=0} = -\frac{i}{k^2}\, g\left(\frac{k^2}{M^2}\right)$$

$$k \equiv \sqrt{-p^2} \quad \therefore \quad k^2 = -p^2 > 0$$

↳ número (e não um quadrivetor)

$$x \equiv \frac{k}{M} \Rightarrow \frac{d}{dM} f(x) = \underbrace{\frac{dx}{dM}}_{-\frac{k}{M^2}} \frac{d}{dx} f(x) = -\frac{k}{M^2}\underbrace{\frac{dk}{dx}}_{M}\frac{d}{dk} f(x) = -\frac{k}{M}\frac{d}{dk} f(x)$$

$$M\frac{d}{dM}G^{(2)} = -M\frac{i}{k^2}\left(\frac{d}{dM}g\right) = -\frac{i}{k^2}\left(-k\frac{d}{dk}g\right) = -k\left[-\frac{i}{k^2}\frac{d}{dk}g\right]$$

$$\frac{d}{dk}\left(-\frac{i}{k^2}g\right) = -\frac{2i}{k^3}g - \frac{i}{k^2}\frac{d}{dk}g$$

$$M\frac{d}{dM}G^{(2)} = -k\left[\frac{d}{dk}\left(-\frac{i}{k^2}g\right) - \frac{2i}{k^3}g\right] = -k\left[\frac{d}{dk}G^{(2)} + \frac{2}{k}G^{(2)}\right] = \left[-k\frac{d}{dk} - 2\right]G^{(2)}$$

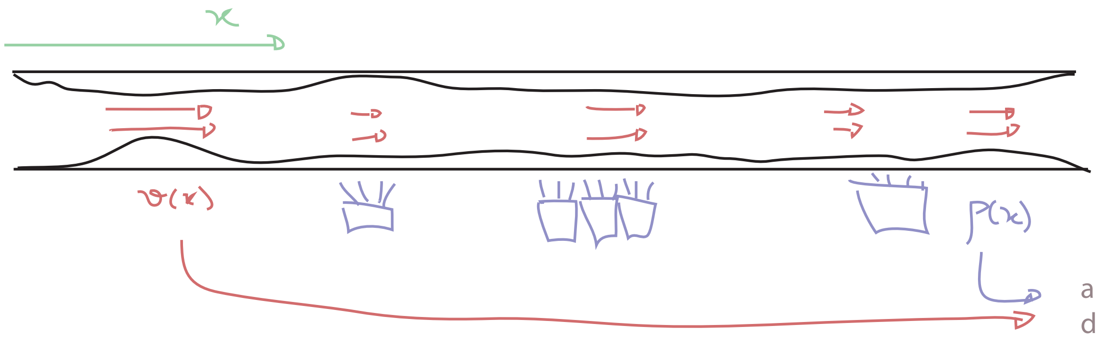
CS: $\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda} + 2\gamma(\lambda)\right]G^{(2)} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\left[k\frac{d}{dk} + 2 - \beta\frac{d}{d\lambda} - 2\gamma\right]G^{(2)} = 0}$$

(eq. 185.1)

Teoria livre: $\beta = \gamma = 0$ $\qquad k\frac{d}{dk}G^{(2)} = -2G^{(2)} \Rightarrow G^{(2)} = -\frac{i}{k^2}$

Para vislumbrar como podemos resolver um caso mais geral, vamos pensar em bactérias (!!!). Imagine um tubo estreito por onde corre um fluido com velocidade v(x) (x é a coordenada ao longo do comprimento do tubo). O tubo está infectado por bactérias, cuja população é dada pela densidade D(t,x) e cuja taxa de crescimento é ρ(x)



a taxa de crescimento e velocidade dependem de condições no tubo (eg: espessura e iluminação)

$$\frac{d}{dt} D(t,x) = \underbrace{-v(x)\frac{d}{dx} D(t,x)}^{\text{as bactérias são arrastadas}} + \underbrace{\rho(x) D(t,x)}_{\text{crescimento}}$$

$$\left[\frac{d}{dt} + v(x)\frac{d}{dx} - \rho(x)\right] D(t,x) = 0$$

Esta é exatamente a equação que temos fazendo:

(eq. 185.1)

$$\left[k\frac{d}{dk} + 2 - \beta\frac{d}{d\lambda} - 2\gamma\right] G^{(2)} = 0$$

$$\begin{cases} \log\left(k/M\right) \leftrightarrow t \\ dt \leftrightarrow \frac{1}{k}\, dk \qquad \frac{d}{dt} \leftrightarrow k\frac{d}{dk} \\ \lambda \leftrightarrow x \\ -\beta(\lambda) \leftrightarrow v(x) \\ 2\gamma(\lambda) - 2 \leftrightarrow \rho(x) \\ G^{(2)}(k,\lambda) \leftrightarrow D(t,x) \end{cases}$$

Suponha que conheçamos: $D(t=0,x) = D_i(x)$

Para saber a densidade bacteriana de um elemento de fluido em $(t_1 > 0, x_1)$ temos que olhar a história dele. Sabemos onde ele estava em $t = 0$ integrando sobre o seu movimento passado. Podemos pensar neste elemento fluindo para trás no tempo e definir:

$$\frac{d}{dt}\bar{x}(t;x_1) = -v(\bar{x})$$

elemento de fluído indo na direção errada (-v)

$\bar{x}(0;x_1) = x_1$ → este começa em x_1

$\bar{x}(t_1;x_1)$ → posição dele em $t = 0$

Portanto a densidade bacteriana inicial dele era: $D_i(\bar{x}(t_1;x_1))$

E a densidade em (t_1, x_1) será:

$$D(t_1,x_1) = D_i\left(\bar{x}(t_1;x_1)\right)\cdot \operatorname{Exp}\left[\int_0^{t_1} dt'\, p\big(\underbrace{\bar{x}(t';x_1)}_{\text{posição dele em } t=t'}\big)\right]$$

No referencial deste elemento a velocidade é zero e só o que as bactérias notam é que a iluminação muda com o tempo:

$$\frac{d}{dt}D(t) = p(t)\,D(t) \Rightarrow D(t) = D_i\, e^{\int_0^t p(t')dt'}$$

$$dt' = -\frac{1}{v(\bar{x}')}d\bar{x}' \qquad \bar{x}(t') = \bar{x}'$$

$$\bar{x}(0,x_1) = x_1 \qquad \bar{x}(t_1,x_1) = \bar{x}$$

$$\underbrace{D(t,x)}_{\text{notação}} = D_i\left(\bar{x}(t;x)\right)\cdot \operatorname{Exp}\left[\int_{\bar{x}}^{x} d\bar{x}'\,\frac{p(\bar{x}')}{v(\bar{x}')}\right]$$

Voltando a mundo menos infeccioso dos campos, podemos usar esta solução fazendo as substituições adequadas

$$\left.\begin{array}{l} \ln\left(\frac{k}{M}\right) \leftrightarrow t \\ \lambda \leftrightarrow x \\ G^{(2)}(k,\lambda) \leftrightarrow D(t,x) \\ -\beta(\lambda) \leftrightarrow v(x) \\ 2\gamma(\lambda)-2 \leftrightarrow p(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=0 \leftrightarrow k=M \\ D_i(x) \leftrightarrow \hat{G}_i^{(2)}(\lambda) \end{array}\right.$$

$$G^{(2)}(k,\lambda) = \hat{G}_i^{(2)}\left(\bar{\lambda}(k;\lambda)\right)\operatorname{Exp}\left\{\int_{k'=M}^{k'=k} d\left[\ln\left(\frac{k'}{M}\right)\right]\cdot\left[2\gamma\left[\bar{\lambda}(k';\lambda)\right]\underbrace{-2}\right]\right\}$$

(eq. 187.1)

$$\operatorname{Exp}\left[-2\int_M^k d\left[\ln\left(\frac{k}{M}\right)\right]\right] = \frac{M^2}{k^2}$$

redefino

$$\hat{G}_i^{(2)}\frac{M^2}{k^2} \equiv \frac{-i}{k^2}G_i^{(2)}$$

$$\boxed{G^{(2)}(k,\lambda) = -\frac{i}{k^2}G_i^{(2)}\left(\bar{\lambda}(k;\lambda)\right)\operatorname{Exp}\left\{2\int_{k'=M}^{k'=k} d\left[\ln\left(\frac{k'}{M}\right)\right]\gamma\left[\bar{\lambda}(k';\lambda)\right]\right\}}$$

(eq. 187.2)

Onde: $\bar{\lambda}(k;\lambda) \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial\left[\ln\left(k/M\right)\right]}\bar{\lambda}(k;\lambda) = \beta\left(\bar{\lambda}(k;\lambda)\right)$ ... $\frac{\partial}{\partial t}\bar{x}(t;x_1) = -v(\bar{x})$

$\bar{\lambda}(M;\lambda) = \lambda$ ... $\bar{x}(0;x_1) = x_1$

$\bar{x}(t;x_1) \Rightarrow$ descrevia a posição de elemento de fluído em t unidades de tempo atrás baseado em um ponto de referência x_1 em que ele está "agora" (usamos t = 0 para agora e t = t1 para o início, mas de fato quaisquer dois tempos poderiam ser usados)

$\bar{\lambda}(k;\lambda) \Rightarrow$ Vai descrever o valor de uma constante de acoplamento modificada: que muda quando mudamos k (a intensidade do momento) a partir de um ponto de referência (que foi tomado como k = M). Note que a taxa de mudança é dada pela função β

$\Rightarrow$ Isto é um parâmetro da função, apenas nos diz quanto ela vale no ponto de referência

$\bar{\lambda}(k) \Rightarrow$ "running coupling constant"

A única forma que temos de determinar a função desconhecida Gi é obtendo a função G(2) em alguma ordem de perturbação e expandir o lado direito de 187.2 no mesmo parâmetro. Por exemplo, em $\lambda\phi^4$

$$G^{(2)}(k=M,\lambda) = -\frac{i}{M^2} + O(\lambda^2) \Rightarrow G_i^{(2)}\left(\bar{\lambda}(k=M;\lambda)\right) = G_i^{(2)}(\lambda) = 1 + O(\lambda^2)$$

(estamos supondo que podemos expandir em $\bar{\lambda}$) $\therefore \; G_i^{(2)}(\bar{\lambda}) = 1 + O(\bar{\lambda}^2)$

Também podemos usar este procedimento para a função de quatro pontos. Calculemos esta função num regime cinemático bem específico:

$$G^{(4)}(p_1,p_2,p_3,p_4) \longrightarrow \quad p_i^2 = -\underline{P}^2 > 0 \qquad p_i \cdot p_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

(os quatro momentos são spacelike)

Neste caso temos uma única grandeza dimensional relevante $\underline{P}^2$ e podemos escrever $G^{(4)}$ na forma:

$$\underbrace{G^{(4)}(\underline{P})}_{Dim[G^{(4)}]=-8} = \underbrace{\left(\frac{i}{\underline{P}^2}\right)^4}_{Dim=-8} \underbrace{g\left(\frac{\underline{P}^2}{M^2}\right)}_{Dim=0}$$

$\Rightarrow$ podemos de novo fazer a troca $\frac{\partial}{\partial M} \to \frac{\partial}{\partial \underline{P}}$