

Onde:

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) \iff \frac{d}{d\left[L_N\left(\frac{k}{M}\right)\right]} \bar{\lambda}(k; \lambda) = \beta(\bar{\lambda}(k; \lambda))$$

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t; x_1) = -v(\bar{x})$$

$$\bar{x}(0; x_1) = x_1$$

$$\bar{\lambda}(M; \lambda) = \lambda$$

$\bar{x}(t; x_1) \Rightarrow$ descrevia a posição de elemento de fluido em t unidades de tempo atrás baseado em um ponto de referência x_1 em que ele está "agora" (usamos $t = 0$ para agora e $t = t_1$ para o início, mas de fato quaisquer dois tempos poderiam ser usados)

$\bar{\lambda}(k; \lambda) \Rightarrow$ Vai descrever o valor de uma constante de acoplamento modificada: que muda quando mudamos k (a intensidade do momento) a partir de um ponto de referência (que foi tomado como $k = M$). Note que a taxa de mudança é dada pela função β

\Rightarrow Isto é um parâmetro da função, apenas nos diz quanto ela vale no ponto de referência

$\bar{\lambda}(k) \Rightarrow$ "running coupling constant"

A única forma que temos de determinar a função desconhecida G_i é obtendo a função $G(2)$ em alguma ordem de perturbação e expandir o lado direito de 187.2 no mesmo parâmetro. Por exemplo, em $\lambda\phi^4$

$$G^{(2)}(k_2 = M, \lambda) = -\frac{i}{M^2} + \mathcal{O}(\lambda^2) \Rightarrow G_i^{(2)}(\bar{\lambda}(k=M; \lambda)) = G_i^{(2)}(\lambda) = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

(estamos supondo que podemos expandir em $\bar{\lambda}$) $\therefore \hookrightarrow G_i^{(2)}(\bar{\lambda}) = 1 + \mathcal{O}(\bar{\lambda}^2)$

Também podemos usar este procedimento para a função de quatro pontos. Calculemos esta função num regime cinemático bem específico:

$$G^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) \rightarrow p_i^2 = -P^2 > 0 \quad (\text{os quatro momentos são spacelike})$$

$$p_i \cdot p_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

Neste caso temos uma única grandeza dimensional relevante P^2 e podemos escrever $G^{(4)}$ na forma:

$$G^{(4)}(P) = \left(\frac{-\lambda}{P^2}\right)^4 g\left(\frac{P^2}{M^2}\right) \Rightarrow \text{podemos de novo fazer a troca } \frac{d}{dM} \rightarrow \frac{d}{dP}$$

$\text{Dim}[G^{(4)}] = -8 \quad \text{Dim} = -8 \quad \text{Dim} = 0$

$$\left[p \frac{\partial}{\partial p} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + 8 - \gamma(\lambda) \right] G^{(4)}(p, \lambda) = 0$$

Lembrando das bactérias:

$$G^{(4)}(p, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{p^2} \right)^4 G_i^{(4)}(\bar{\lambda}(p, \lambda)) \text{Exp} \left\{ 4 \int_M^p d \left[L_N \left(\frac{p'}{M} \right) \right] r[\bar{\lambda}(p'; \lambda)] \right\}$$

(eq. 189.1)

De novo a função "inicial" é fixada por:

$$G^{(4)}(p, \lambda) = -\lambda \lambda \left(\frac{\lambda}{p^2} \right)^4 + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

~~X~~ + ...

$$G_i^{(4)}(\bar{\lambda}(p=M; \lambda)) = G_i^{(4)}(\lambda^{(M)}) = -\lambda \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$\hookrightarrow G_i^{(4)}(\bar{\lambda}) = -\lambda \bar{\lambda} + \mathcal{O}(\bar{\lambda}^2)$$

(eq. 189.2)

Agora podemos ver as consequências da eq. CS. Qualquer função de Green, quando expandida perturbativamente, vai ter a forma:

$$G \sim \bar{\lambda}^n \left(L_N \left(-\frac{p^2}{M^2} \right) \right)^m$$

Para que a perturbação faça sentido precisamos que λ seja pequeno, mas também temos que evitar que

$$\left| \frac{p^2}{M^2} \right| \gg 1$$

As soluções que encontramos organizam a dependência nestes dois parâmetros (λ e o logaritmo de p) em uma função do acoplamento (G_i) e uma exponencial que leva em conta a "distância" para o ponto de referência M . Quando esta "distância" é zero (estamos fazendo um espalhamento com momento da ordem da escala M) vemos que $G_i^{(n)} = G^{(n)}$, mas se nos afastamos deste regime o que as soluções 187.2 e 189.1 nos dizem é que devemos substituir λ por um acoplamento mais apropriado para aquela escala: $\bar{\lambda}$, o que reforça a idéia de que este novo acoplamento é justamente o acoplamento efetivo que obtivemos quando pensando no grupo de renormalização. Esta identificação fica bem clara na equação 189.2 - já que a função de quatro pontos será diretamente proporcional a $\bar{\lambda}$.

O fator exponencial dá conta de acumular todos os re-scalings do campo entre M e a escala de momento k (ou P). Cada mudança desta vira um fator que multiplica a função e Green e em cada escala levamos em conta o acoplamento correto para a escala. O número que multiplica a integral é o número de linhas externas (2 no caso de 187.2 e 4 para 189.1), como era de se esperar.

Para verificar estas afirmações, vamos obter $\bar{\lambda}$ no caso da teoria $\lambda\phi^4$

(180.1) $\Rightarrow \beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$ $\bar{\lambda}(k; \lambda) = ?$

$$\frac{d}{d[\ln(\frac{k}{M})]} \bar{\lambda} = \beta(\bar{\lambda}) \rightarrow \frac{d}{d[\ln(\frac{k}{M})]} \bar{\lambda} = \frac{3\bar{\lambda}^2}{(4\pi)^2}$$

$\bar{\lambda}(M; \lambda) = \lambda$

$$\frac{1}{\lambda^2} d\bar{\lambda} = \frac{3}{(4\pi)^2} d[\ln(\frac{k}{M})]$$

$$-\frac{1}{\lambda} + C = \frac{3}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M})$$

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}} = \frac{3}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M})$$

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \frac{\lambda}{1 - \frac{3\lambda}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M})}$$

(eq. 190.1)

Note que, expandindo em λ :

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \lambda + \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M}) + \mathcal{O}(\lambda^3) = \lambda - \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} \ln(\frac{1}{k}) + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$k = k M$

que é exatamente o que obtivemos na pg 174 usando o fluxo do grupo de renormalização. Temos também o fato que para k muito pequeno o denominador fica enorme e o acoplamento desaparece, o que confirma nossa expectativa de que função β positiva significa uma teoria com acoplamento fraco para baixos momentos.

Levando a frente a expansão em l, temos:

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \lambda + C \lambda^2 \ln(\frac{k}{M}) + C^2 \lambda^3 \ln^2(\frac{k}{M}) + \dots$$

$$C = \frac{3}{(4\pi)^2}$$

Ou seja, teremos termos do tipo:

$$\lambda^{n+1} L_N^n \left(\frac{k}{M} \right)$$

O que nos mostra que a expansão perturbativa vai ter problemas para k muito longe de M . Para o caso em que o acoplamento efetivo é pequeno (caso contrário a expansão perturbativa realmente falha) equação de CS nos dá um meio de evitar este problema, já que a expressão 190.1 representa a soma de todos estes logaritmos e sua inclusão direto na contante de acoplamento.

Aplicação para QED

Vamos pensar na QED a curtíssimas distâncias (altos momentos para o fóton) quando podemos ignorar massa do elétron. Se seguirmos a mesma lógica que usamos para deduzir as equações de CS (pgs 177 e 178), podemos obter uma equação análoga para o potencial elétrico. Como o potencial entre cargas estáticas é observável sua normalização é fixada e portanto não temos a função γ (como tínhamos nas funções de Green). Podemos então escrever a seguinte equação de Callan-Symanzik (para a transformada de Fourier do potencial):

$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(e_r) \frac{d}{de_r} \right] V(q; M, e_r) = 0$$

Dim = -2

↳ podemos fazer o mesmo que na pág. 185 e trocar a derivada em M por derivadas em q

$$\left[q \frac{d}{dq} - \beta(e_r) \frac{d}{de_r} + 2 \right] V(q; M, e_r) = 0$$

Lembrando que:

(eq. 185.1) $\Rightarrow \left[k \frac{d}{dk} + 2 - \beta \frac{d}{d\lambda} - 2\gamma \right] G^{(2)} = 0$

$$G^{(2)}(k, \lambda) = -\frac{i}{k^2} G_i^{(2)}(\lambda(R; \lambda)) E \times r \left\{ \int_{k'=M}^{k'=k} d \left[L_N \left(\frac{k'}{M} \right) \right] \right\} \Phi[\lambda(k'; \lambda)] \quad (\text{eq. 187.2})$$

$$V(q; M, e_r) = \frac{1}{q^2} V_i(\bar{e}(q; e_r)) \quad (\text{eq. 191.1})$$

↳ $\bar{e}(q; e_r) \Rightarrow \frac{d}{d \left[\text{Log} \left(\frac{q}{M} \right) \right]} \bar{e}(q; e_r) = \beta(\bar{e})$

$$\bar{e}(M; e_r) = e_r$$

Sabemos que, em primeira ordem:

$$V(\varphi) \approx \frac{e^2}{\varphi^2} \iff V_i(\varphi) = \bar{e}^2 + \mathcal{O}(\bar{e}^4)$$

$$\therefore V(\varphi, e_R) = \frac{\bar{e}^2(\varphi; e_R)}{\varphi^2}$$

Usando a função β da QED (pg. 183), $\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}$, temos:

$$\frac{d}{d[\text{Log}(\varphi/M)]} \bar{e}(\varphi; e_R) = \frac{\bar{e}^3}{12\pi^2} \implies \frac{1}{\bar{e}^3} d\bar{e} = \frac{1}{12\pi^2} d \text{Log}(\varphi/M)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{\bar{e}^2} = \frac{\text{Log}(\varphi/M)}{12\pi^2} + C \xrightarrow{\bar{e}(M; e_R) = e_R} C = -\frac{6\pi^2}{e_R^2}$$

$$6\pi^2 \left(\frac{1}{\bar{e}_R^2} - \frac{1}{e^2} \right) = \text{Log}(\varphi/M)$$

$$\bar{e}^2(\varphi) = \frac{e_R^2}{1 - \left(\frac{e_R^2}{6\pi^2} \right) \text{Log}(\varphi/M)} \quad (\text{eq. 192.1})$$

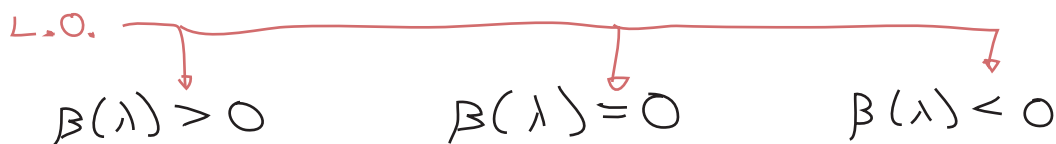
O que é muito similar à expressão obtida no fim da página 136, e fica idêntica se escolhermos M da ordem da massa do elétron $M^2 = A m^2$, $e_r = e$ e $A = e^{(5/3)}$.

Evolução (running) das Constantes de Acoplamento

De uma forma bem geral, a evolução das constantes de acoplamento de teorias renormalizáveis no limite de massa zero será dado por:

$$\bar{\lambda}(\rho) \implies \frac{d}{d[\text{Log}(\varphi/M)]} \bar{\lambda} = \beta(\bar{\lambda})$$

Na região perturbativa, temos basicamente três comportamentos possíveis:



$$\beta(\lambda) > 0$$

$$p \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda \rightarrow 0$$

↳ teoria preditiva a baixas energias (ou grandes distâncias)

Teoria fica não perturbativa para curtas distâncias, altos momentos.

$$\beta(\lambda) = 0$$

⇒ A constante de acoplamento efetiva é, de fato, constante (não depende do momento). A constante renormalizada é igual a nua e portanto os únicos infinitos possíveis na teoria estão em contribuição para a *field strength* (Z), que somem de qualquer elemento de matriz S . São chamadas de **QFTs finitas**.

$$\beta(\lambda) < 0$$

⇒ Suponha que o sinal da função β da QED fosse invertido:

$$\beta = -\frac{1}{2} C e^3 \Rightarrow \bar{e}^2(p) = \frac{e^2}{1 + C e^2 L_n(p/m)}$$

$$p \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{e}^2 \rightarrow 0 \quad \text{Liberdade assintótica!}$$

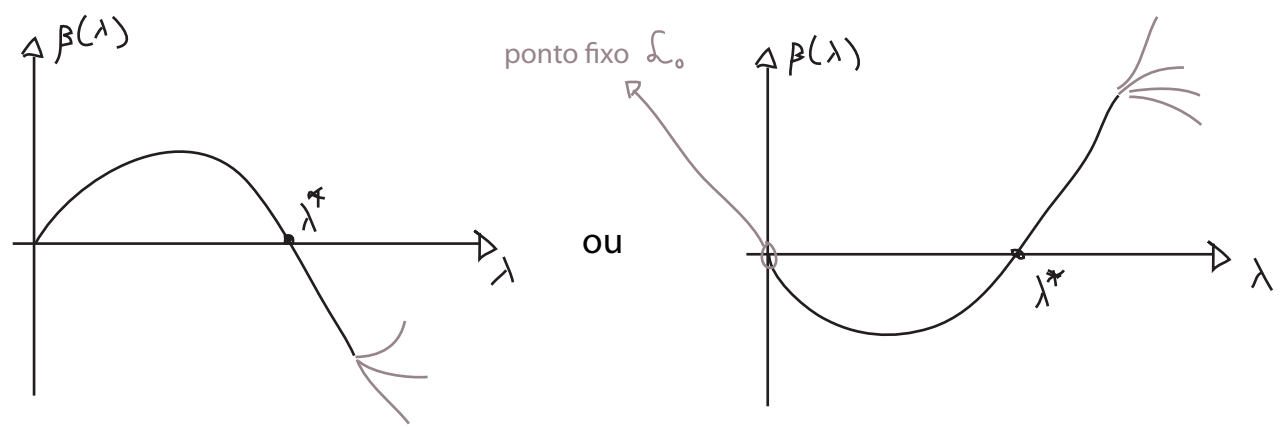
↳ teoria preditiva a altas energias (ou curtas distâncias)

Todas as divergências que aparecem para momentos grandes de alguma forma se somam para dar um resultado inócuo, a teoria é bem comportada para energias arbitrariamente grandes.

Fica não perturbativa para grandes distâncias, pequenos momentos.

Os resultados acima indicam que tanto para β positivo quando negativo, temos uma escala finita em que os acoplamentos divergem. Mas antes de chegar nesta divergência o acoplamento fica grande demais para que a expansão perturbativa faça sentido. O que acontece se sairmos da região perturbativa? Neste caso não temos como calcular a função β , mas as equações do grupo de renorm. continuam valendo e podemos usá-las para uma discussão qualitativa.

Conforme nos aproximamos desta região de acoplamento forte temos que levar em conta mais termos na expansão de β , estes termos podem ter todos o mesmo sinal inicial, mas suponha que a contribuição deles seja de sinal oposto. Neste caso poderíamos obter funções β da seguinte forma:

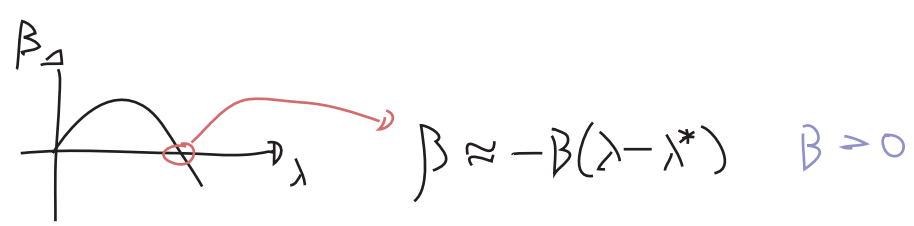


Quando $\bar{\lambda}$ chega perto deste ponto λ^* , β vai para zero e a constante de acoplamento para de evoluir. Temos um novo ponto fixo, e:

$$p \rightarrow \infty \quad \bar{\lambda} \rightarrow \lambda^*$$

teorias com ponto fixo no ultravioleta ou infravermelho
(infrared stable e ultraviolet stable fixed points)

Perto deste ponto fixo (assumindo o caso $\beta(\lambda \sim 0) > 0$, com região não perturbativa no UV):



$$\frac{d}{d[\text{Log}(p/M)]} \bar{\lambda} \approx -\beta(\bar{\lambda} - \lambda^*) \Rightarrow \bar{\lambda}(p) = \lambda_* + C \left(\frac{M}{p}\right)^\beta$$

$$\frac{1}{(\bar{\lambda} - \lambda^*)} d\bar{\lambda} = -\beta d[\text{Log}(p/M)]$$

$$\text{Log}(\bar{\lambda} - \lambda^*) = -\beta \text{Log}\left(\frac{p}{M}\right) + C$$

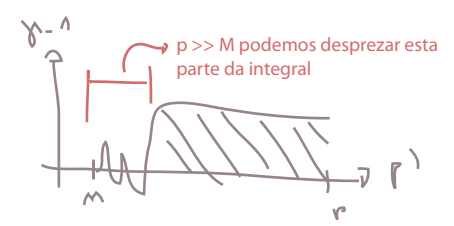
$$\bar{\lambda} - \lambda^* = C' \left(\frac{p}{M}\right)^{-\beta}$$

$p \rightarrow \infty$
 $\bar{\lambda} \rightarrow \lambda_*$ } e a velocidade é determinada pela inclinação local de β

Vejamos o que acontece com a função de 2 pontos de um campo escalar neste caso. De 187.1 temos:

$$G^{(2)}(p, \lambda) = \hat{G}_i^{(2)}(\bar{\lambda}(p; \lambda)) \text{Exp} \left\{ 2 \int_{p'=M}^{p'=p} d[\text{Ln}\left(\frac{p'}{M}\right)] \cdot \left[\gamma[\bar{\lambda}(p'; \lambda)] - 1 \right] \right\}$$

para p grande a integral será dominada por $\bar{\lambda} \sim \lambda^*$



$$G^{(2)}(p \rightarrow \infty, \lambda) \approx \hat{G}_i^{(2)}(\lambda^*) \text{Exp} \left\{ 2 \text{Ln}\left(\frac{p}{M}\right) [\gamma(\lambda^*) - 1] \right\} \approx C \left(\frac{1}{p^2}\right)^{1 - \gamma(\lambda^*)}$$

Perto deste ponto fixo a função de dois pontos volta a se comportar como uma simples potência de p^2 , só que é a **potência errada** (do ponto de vista de análise dimensional). Chamamos $\gamma(\lambda^*)$ de **dimensão anômala** do campo (de fato a função γ acabou "pegando" este nome mesmo quando não há ponto fixo na teoria)

Renormalização de operadores locais

Suponha que queiramos obter o comportamento de um operador local obtido como o produto de dois ou mais campos conforme renormalizamos a teoria.

$\mathcal{O}(x) \equiv$ operador composto de campos escalares

Da mesma forma que fizemos para o campo, podemos definir um processo de renormalização para este operador, re-escrevendo a Lagrangeana de forma a obter um contra termo:

$$\int_0 \mathcal{O}(x)$$

que garante o operador renormalizado $\mathcal{O}_M \equiv Z_{\mathcal{O}}^{-1}(M) \mathcal{O}_0$ satisfaça as condições de normalização em uma escala M . A função de green em que estamos interessados é:

$$G^{(n;1)}(p_1, \dots, p_n; k) = \langle \phi(p_1) \dots \phi(p_n) \hat{\mathcal{O}}_M(k) \rangle$$

Escrevendo-a em função dos campos nús, temos:

$$G^{(n;1)}(p_1, \dots, p_n; k) = Z(M)^{-n/2} Z_{\mathcal{O}}(M)^{-1} \langle \phi_0(p_1) \dots \phi_0(p_n) \mathcal{O}_0(k) \rangle$$

Repetindo a dedução da equação de CS, temos:

$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) \right] G^{(n;1)} = 0 \quad (\text{eq. 195.1})$$

$$\gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) = M \frac{d}{dM} \ln[Z_{\mathcal{O}}(M)]$$

Em muitas teorias temos mais de um operador com os mesmos números quânticos e a mesma dimensão, e neste caso podemos ter misturas entre estes operadores (as correções quânticas de um deles vai gerar contribuições aos outros). Por exemplo:

$$\mathcal{O}^1 = \bar{\psi} [\gamma^\mu \mathcal{D}^\nu + \gamma^\nu \mathcal{D}^\mu] \psi$$

$$\mathcal{O}^2 = F^{\mu\lambda} F^\nu{}_\lambda$$

Neste caso temos que definir um conjunto de operadores $\{\mathcal{O}^i\}$ de forma que:

$$\mathcal{O}_0^i \equiv Z_{\mathcal{O}}^i(m) \mathcal{O}_m^i$$

o que também transforma a dimensão anômala γ em uma matriz:

$$\gamma_{\mathcal{O}}^{ij} = [Z_{\mathcal{O}}^{-1}(m)]^{ik} m \frac{d}{dm} [Z_{\mathcal{O}}(m)]^{kj}$$

Para obter uma expressão para γ , calculemos a função de green com m campos escalares e o operador:

$$G^{(m;1)} = \langle \phi(p_1) \dots \phi(p_m) \mathcal{O}_m(k) \rangle$$

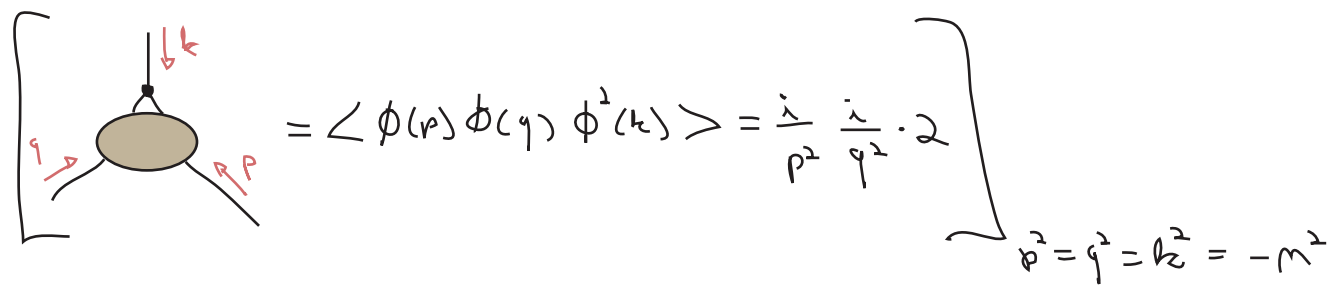


Usando a mesma lógica das páginas 181 a 183, se esta função de Green obedece as equações de CS (eq 195.1), então:

$$\gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) = m \frac{d}{dm} \left(-\delta_{\mathcal{O}} + \frac{m}{2} \delta_Z \right) \quad (\text{eq. 196.1})$$

↑ número de linhas externas escalares

Um exemplo seria analisar o operador ϕ^2 , para evitar confusão entre a massa introduzida por este operador e a massa do campo escalar (que está sendo renormalizada para zero) vamos olhar uma função de green onde este operador carrega um momento diferente de zero, e definir sua normalização por:



A primeiro loop a contribuir para esta função de Green é (de novo, estamos falando de $\lambda\phi^4$):

$$\left[\text{Diagram} \right] = \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} (-i\lambda) \frac{i}{\ell^2} \frac{i}{(k+\ell)^2} =$$