IFT

Teoria Quântica de Campos II

2º semestre de 2013

2ª Lista de Exercícios

1. Partindo da equação

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2} g^{\mu\nu} l_E^2 - 2x(1-x) q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2)}{(l_E^2 + \Delta)^2}, \tag{1}$$

onde $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$, mostre que a polarização do vácuo é dada por:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) i\Pi_2(q^2), \tag{2}$$

com

$$\Pi_2(q^2) = -\frac{8e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Delta^{2-d/2}}. \tag{3}$$

2. Para calcular as integrais de loops utilizamos a parametrização de Feynmann e em seguida utilizamos algum tipo de regularização, por exemplo a regularização dimensional. No caso da teoria $\lambda\phi^4$, o diagrama da amplitude de espalhamento de duas partículas pode ser visto na pág.326 do Peskin calculado dessa forma. Uma maneira alternativa de realizar esse cálculo é utilizando a parametrização de Schwinger. Neste caso, temos que:

$$\frac{1}{A^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty d\tau \tau^{n-1} e^{-\tau A}, \tag{4}$$

onde $\Re(A) > 0$. Usando essa relação, aparecem integrais gaussianas no momento da forma,

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\tau p^2} = \left(\frac{1}{2\pi\tau}\right)^{D/2}. \tag{5}$$

(a) Resolva a integral abaixo utilizando a parametrização de Schwinger[1]

$$V(p^2) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2}. \tag{7}$$

---

[1]Dica: Cada denominador vai introduzir uma integral em um parâmetro de Schwinger (α e β). Reescreva as exponenciais de forma a resolver a integral no momento primeiro utilizando a integral gaussiana. Em seguida, utilize que:

$$1 = \int_0^\infty d\lambda \delta[\lambda - (\alpha + \beta)], \tag{6}$$

e faça o scaling $\alpha = \lambda\alpha'$ e $\beta = \lambda\beta'$. Note que $\delta(\lambda x) = \delta(x)/|\lambda|$.

(b) Faça a regularização por cutoff, lembrando que:

$$\int_{1/\Lambda}^{\infty} d\lambda \frac{e^{-\lambda F(\alpha')}}{\lambda} = \Gamma\left(0, \frac{F(\alpha')}{\Lambda}\right) \approx -\gamma - \ln\left(\frac{F(\alpha')}{\Lambda}\right). \tag{8}$$

3. Considere o modelo da QED em 1+1 dimensões, conhecido como modelo de Schwinger. A lagrangiana correspondente é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + eA_{\mu})\psi, \tag{9}$$

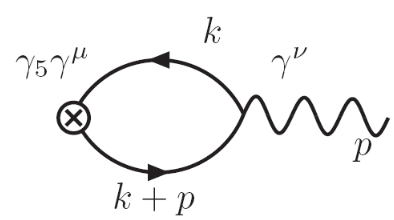
onde $\mu, \nu = 0, 1$. Como no caso quadridimensional, podemos definir as correntes:

$$j^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi, \quad j^{\mu 5} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi. \tag{10}$$

(a) Usando as equações de movimento, mostre que a nível clássico as duas correntes são conservadas, isto é,

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0, \quad \partial_{\mu}j^{\mu 5} = 0. \tag{11}$$

(b) Calcule o diagrama de polarização do fóton acoplado com a corrente axial dado por:



$$I_5^{\mu}(p) = -e^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{Tr[\gamma_5\gamma^{\mu}\not{k}\gamma^{\nu}(\not{k}+\not{p})]}{k^2(k+p)^2} A_{\nu}(x). \tag{12}$$

Em seguida, calcule $p_{\mu}I_5^{\mu}(p)$ e faça a transformada de Fourier para obter que,

$$\partial_{\mu}j_5^{\mu}(x) = \frac{e^2}{\pi}\epsilon_{\mu\nu}\partial^{\mu}A^{\nu}. \tag{13}$$

(c) Leia a seção 19.1 do Peskin [2] e discuta a não conservação da corrente axial quando incluímos correções quânticas.

[2] Essa discussão também pode ser encontrada na Seção 16.6 do livro do Ashok Das.