

# Correções Radiativas

(Peskin 7.1, S. Weinberg QTF - Vol1 - 10.7)

Vamos agora olhar mais profundamente o que acontece com as funções de Green da teoria quando "ligamos" a interação. Começemos com o seguinte objeto:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle$$

estado fundamental (vácuo) da teoria interagente

Como interpretamos este objeto? Tomemos auto-estados de  $\hat{H}$  e  $\hat{\vec{P}}$ :

$$|\lambda\rangle$$

Lagrangiana completa

podem ter uma ou mais partículas

Notem que estamos assumindo que  $\hat{H}$  e  $\hat{\vec{P}}$  comutam. Isto só é verdade porque se tratam de estados livres (a interação corrige o propagador por meio de loops) ou estados representando um conjunto de partículas (ligadas ou não) que tratamos como um único corpo (a energia de ligação já está incluída na massa do estado composto, que por sua vez é livre). Não estamos falando agora de espalhamentos.

Definamos:  $|\lambda_0\rangle \rightarrow \hat{\vec{P}} |\lambda_0\rangle = 0$

$\lambda$  carrega todos os outros números quânticos dos possíveis estados  
 estado de momento zero

$$\hat{H} |\lambda_0\rangle = E_0(\lambda) |\lambda_0\rangle$$

$$|\lambda_0\rangle \xrightarrow{\text{Boost } \vec{P}} |\lambda_p\rangle$$

A invariância de Lorentz de  $\hat{H}$  me diz que  $|\lambda_p\rangle$  também é auto-estado de  $\hat{H}$

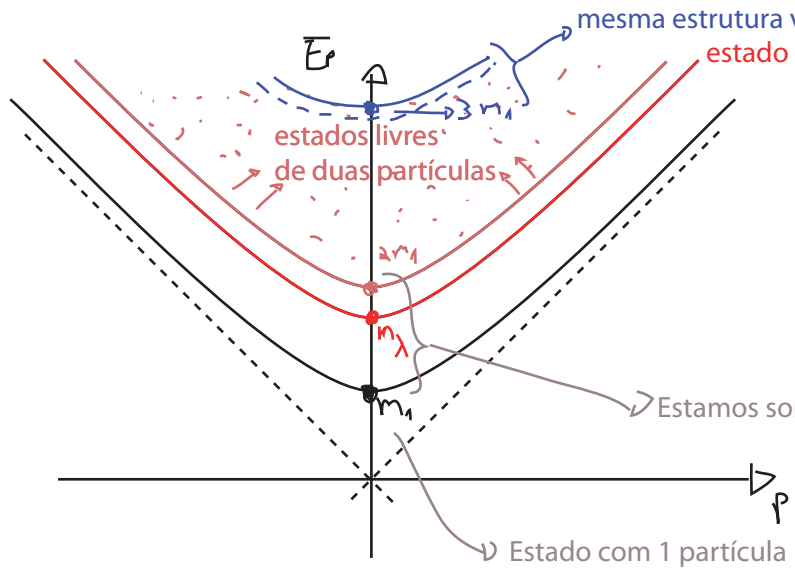
$$\hat{H} |\lambda_p\rangle = E_p(\lambda) |\lambda_p\rangle$$

$$E_p(\lambda) \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_\lambda^2}$$

Estou definindo como "massa", a energia do estado em seu referencial de repouso (o que faz todo sentido para estados de 1 partícula ou mesmo estados ligados)

Qualquer autovalor de  $H$  pode ser escrito como um boost de um outro autovalor com momento zero.

Autovalores de  $\hat{P}^\mu = (\hat{H}, \hat{\vec{P}})$ :



$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} |\lambda_p\rangle\langle\lambda_p|$$

Estamos somando sobre estes pontos e integrando sobre as curvas

Estado com 1 partícula

$$x^0 > y^0$$

$$\langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle = \langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle}_{0} \langle\Omega|\phi(y)|\Omega\rangle + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \langle\Omega|\phi(x)|\lambda_p\rangle \langle\lambda_p|\phi(y)|\Omega\rangle$$

$$\langle\Omega|\phi(x)|\lambda_p\rangle = \langle\Omega| e^{i\hat{P}x} \underbrace{\phi(0)}_{\text{translação}} e^{-i\hat{P}x} |\lambda_p\rangle = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_p\rangle e^{-i p x}$$

$p^0 = E_p$

$$= \langle\Omega| U^{-1} U \phi(0) U^{-1} U |\lambda_p\rangle e^{-i p x} = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle e^{-i p x}$$

boost de  $\vec{p}$  para 0  
 $U|\lambda_p\rangle = |\lambda_0\rangle$

$$U \phi(0) U^{-1} = \phi(0) \quad \langle\Omega| U^{-1} = \langle\Omega|$$

↳ para campos de spin maior teríamos que ter mais cuidado aqui (vai para a lista)

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-iE_p(x-y)} =$$

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-iE_p(x-y)}}{2E_p(\lambda)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)} \quad x_0 > y_0$$

$$D_F(k, m) = \frac{i}{p^2 - m^2}$$

$$= \sum_{\lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2$$

Poderíamos fazer o mesmo para o caso  $y_0 > x_0$  e obter:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 D_F(x-y, m_{\lambda}^2)$$

Note que obtemos o propagador de Feynman com a massa substituída por  $m_{\lambda}$ . Para cada estado  $\lambda$  contribuindo para a função de 2 pontos temos também um "peso" dado pela amplitude de criação daquele estado a partir do vácuo.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots$$

em teoria de perturbação isto seria algo do tipo:  $(\lambda \phi^3)$

$\langle \lambda | \phi | \Omega \rangle$

Uma forma útil de escrever esta soma pode ser obtida fazendo:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 D_F(x-y, M^2) =$$

$$\rho(M^2) = \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2$$

Densidade espectral

$$= \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x-y, M^2)$$

(representação espectral de Källén-Lehmann)

É importante notar que, para um estado intermediário de uma partícula:

$$\kappa \xrightarrow{\phi} \eta$$

teremos  $m_\lambda = m$ , onde  $m$  é o autovalor de energia (para a Hamiltoniana interagente) no referencial de repouso da partícula. Esse estado contribui com uma função  $\delta(M^2 - m^2)$  para a densidade espectral

$$\rho(M^2) = 2\pi \delta(M^2 - m^2) \cdot \underbrace{Z}_{|\langle \Omega | \phi(0) | 1_0 \rangle|^2} + \underbrace{\sigma(M^2)}_{\text{contribuições de estados de 2 ou mais partículas.}}$$

↑ estado de 1 partícula com momento zero

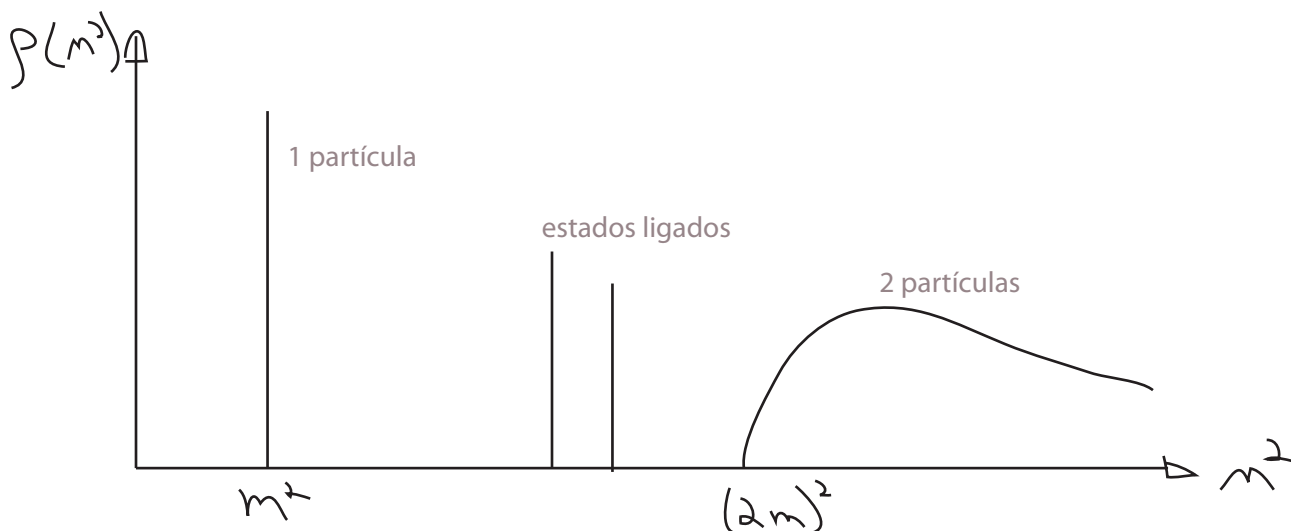
$Z \rightarrow$  Field Strength Renormalization

Esta massa "m" é a massa observável da partícula interagente e vai, em geral, diferir daquela que aparece na lagrangeana, que chamaremos de  $m_0$

$m \rightarrow$  Massa física

$m_0 \rightarrow$  Massa nua (bare mass)

Em relação às contribuições de mais partículas,  $\sigma(M^2)$ , temos essencialmente duas possibilidades: a partir da energia em que podemos produzir duas ou mais partículas reais "livres" temos um espectro contínuo da massa  $m_\lambda$ . Mas abaixo desta energia podemos, dependendo da interação específica, ter estados ligados de duas ou mais partículas. Neste caso teremos polos adicionais em massas entre  $m$  e  $2m$ . Isto nos leva a uma forma tipicamente do tipo:

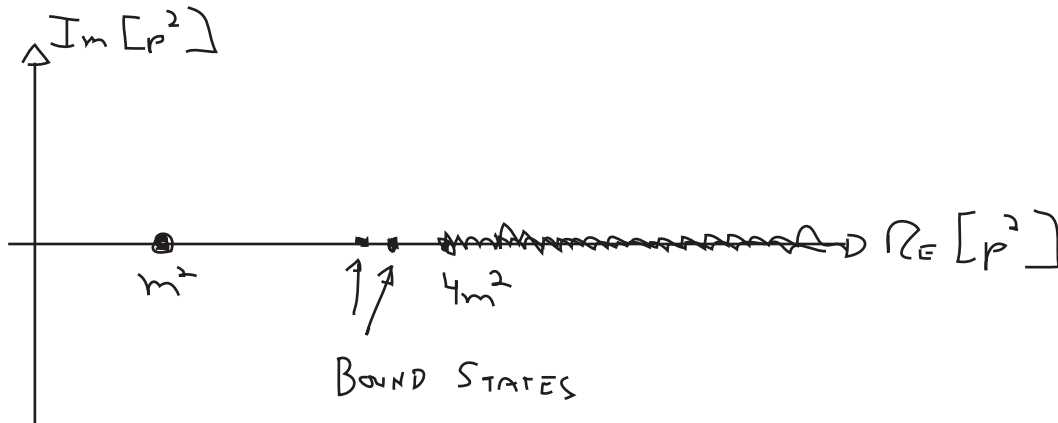


Passando para o espaço dos momentos:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | \Omega \rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

$$= \frac{i Z}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + (\text{BOUND STATES}) + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dM^2 \sigma(M^2)}{2\pi} \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

Que tem a seguinte estrutura analítica no plano complexo:



Comparemos este resultado com o caso de um campo livre:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | 0 \rangle = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

Os dois são semelhantes e fica claro que temos que levar  $Z$  para 1 quando "desligamos" a interação. De fato, é possível mostrar que (veja Weinberg, 10.7):

$$\int_0^{\infty} \rho(M^2) dM^2 = 1$$

&

$$1 = Z + \int_0^{\infty} \sigma(M^2) dM^2$$

O que também nos garante que a contribuição de estados de muitas partículas desaparece na teoria livre.

PS: no caso de espinores de Dirac, o mesmo raciocínio nos levaria a:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle = \frac{i Z_2 \sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots = \frac{i Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

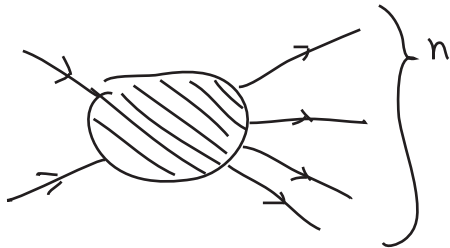
$$\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2} u^s(p)$$

PS2: obter de fato a forma da densidade espectral é uma tarefa árdua por se tratar de um cálculo não-perturbativo. Um método envolve a utilização de relações de dispersão. Quem estiver interessado pode ler: Weinberg, sec 10.8 ou Peskin, sec 18.4

## A matriz S e a fórmula de redução LSZ (Lehmann, Symanzik, Zimmerman)

(Peskin 7.2, Ryder 6.8 e 7.3)

Vamos ver o que acontece quando generalizamos estas idéias para correlatores maiores



$$\Rightarrow \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

Vamos escolher um dos pontos acima (que chamaremos de  $x$ ) e fazer a transformada de Fourier nele:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\int d^4x = \underbrace{\int_{T_+}^{\infty} dx^0}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{T_-}^{T_+} dx^0}_{\text{II}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{T_-} dx^0}_{\text{III}}$$

$$T_+ > \forall z_i^0 > T_-$$

Na região I o tempo  $x^0$  é maior que os outros, portanto:

$$\int_{T_+}^{\infty} d^4x \int d^3k e^{iP^0 x^0} e^{-i\vec{P} \cdot \vec{x}} \langle \Omega | \phi(x) T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

$$\sum_{\lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{k}}(\lambda)} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\vec{k}} \rangle \langle \lambda_{\vec{k}} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\langle \Omega | \phi(x) | \lambda_k \rangle = \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle e^{-i k x} \quad \left. \begin{array}{l} \text{v. p. } \neq \gamma \\ k^0 = E_k(\lambda) \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{\lambda} \int_{T_+}^{\infty} d^4 x^0 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \underbrace{\int d^3 x e^{+i \vec{k} \vec{x}} e^{-i \vec{p} \vec{x}}}_{(2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{p})} \frac{1}{2E_p(\lambda)} e^{i p^0 x_0} e^{-i E_k x^0} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \times \langle \lambda_k | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

$$= \sum_{\lambda} \int_{T_+}^{\infty} d^4 x^0 \frac{1}{2E_p(\lambda)} e^{-i(E_p - p^0)x_0 - \epsilon x^0} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \times \langle \lambda_p | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

← Para garantir convergência

$$= \sum_{\lambda} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \frac{i e^{-i(E_p - p^0)T_+ - \epsilon T_+}}{[p^0 - E_p(\lambda) + i\epsilon]} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_p | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

→ será suprimido no que segue, já que próximo ao polo é igual a 1

Esta é uma função de  $p_0$  com singularidades em todos os pontos  $E_p(\lambda)$ . Se estas singularidades são polos isolados ou cortes vai depender da teoria específica. Vamos nos interessar com o que ocorre próximo ao polo, que equivale a uma partícula de massa (física)  $m$ .

$$p^2 - m^2 = p_0^2 - |\vec{p}|^2 - m^2 = p_0^2 - \underbrace{(|\vec{p}|^2 + m^2)}_{E_p^2} = (p_0 + E_p)(p_0 - E_p)$$

$$\lim_{p_0 \rightarrow +E_p} p^2 - m^2 = 2E_p(p_0 - E_p)$$

$$\int d^4 x e^{i p x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}}_{p_0 \rightarrow E_p} \sqrt{z} \langle \vec{p} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

estado de 1 partícula com momento  $\vec{p}$

←  $\langle \Omega | \phi_0 | \Omega \rangle$  → estado de 1 partícula com momento zero

este símbolo quer dizer "tem polos iguais a" (estamos desprezando os termos finitos)

Se fizermos o mesmo para a região III, veremos que

$$\int d^4x e^{iP \cdot x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{P_0 \rightarrow -E_P}_{\substack{P_0 \rightarrow -E_P \\ P_0 \rightarrow -E_P}} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \Omega | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | -\vec{P} \rangle$$

A região II não possui polos em  $P_0 \rightarrow E_P$  ou  $P_0 \rightarrow -E_P$  se tentássemos o mesmo procedimento chegaríamos a algo na forma:

$$\int d^3k \frac{i}{E_0 - E_{k+p} + E_k}$$

Gostaríamos de continuar fazendo isso para todos os outros campos dentro do produto temporalmente ordenado, mas temos que ter cuidado com o isolamento das partículas externas. A forma de fazer isso é voltar na página 6 e, ao invés da transformada de Fourier, usamos um pacote de onda estreito:

$$\int d^4x e^{iP^0 x_0} e^{-i\vec{P} \cdot \vec{x}} \longrightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^4x e^{iP^0 x_0} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \psi(\vec{k})$$

$\psi(\vec{k})$ : distribuição estreita centrada em  $\vec{p}$  (voltamos a transformada de Fourier se fizemos esta distribuição virar uma delta de Dirac)

Esta pequena indeterminação no momento da partícula associada faz com que ela fique com a posição contida em uma região do tamanho deste pacote. Retraçando todo o raciocínio acima teremos agora:

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi(\vec{k}) \frac{1}{2E_k(\lambda)} \frac{i}{p^0 - E_k(\lambda) + i\epsilon} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_k | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{\sim}_{P_0 \rightarrow E_P} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i \psi(\vec{k})}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \vec{k} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\tilde{p} = (P_0, \vec{k})$$

Na prática agora o polo "anda" conforme variamos  $\vec{k}$ , ou seja, o polo de uma partícula virou um pequeno corte cujo comprimento é a largura de  $\psi(\vec{k})$ . A volta ao caso anterior é bem definida conforme estreitamos  $\psi(\vec{k})$  até que vire uma delta e o corte volta a ser um polo.