$$V(\vec{x}) = -\underbrace{\langle \vec{\mu} \rangle}_{\text{Momento magnético do elétron}} \cdot \vec{B}(x)$$

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{e}{m}\left[1 + F_2(0)\right] \xi'^{\dagger} \frac{\vec{\sigma}}{2} \xi$$

SPIN DO e^-

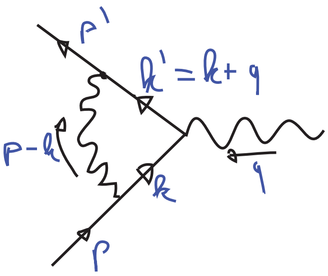
Se escrevermos o momento magnético da forma usual: $\vec{\mu} = g\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{S}$

$$\boxed{g = 2 + 2F_2(0)}$$

Vimos (eq 27.2) que F2 = 0 em primeira ordem pert. portanto g = 2 nesta ordem. Mas ele será corrigido em ordens superiores:

$$g = 2 + \underbrace{\mathcal{O}(\alpha)}_{\text{Momento magnético anômalo do elétron}} + \dots$$

Vamos calcular as correções de primeira ordem ao vértice: $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu$



Lembrando sempre que isto aparece em:

$$\bar{u}(p')\left(-ie\,\delta\Gamma^\mu\right) u(p) \frac{(-i) g_{\mu\beta}}{q^2} \dots$$

$$\delta\Gamma^\mu = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i g_{\nu\rho}}{(k-p)^2 + i\varepsilon} (-ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} (-ie\gamma^\rho) =$$

$$\gamma_\rho \gamma^\mu \gamma^\rho = -2\gamma^\mu$$

$$\gamma^\mu \cdot \not{k} = \gamma^\mu \gamma^\nu k_\nu = \left[2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu\right] k_\nu = 2k^\mu - \not{k}\gamma^\mu$$

$$-m\left(\gamma^\mu \not{k} + \not{k}\gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k}' + \not{k}'\gamma^\mu\right) = -m\left(2k^\mu + 2k'^\mu\right) = -2m(k + k')^\mu$$

$$= 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\left[\not{k}' \gamma^\mu \not{k} + m^2 \gamma^\mu - 2m(k+k')^\mu \right]}{\left[(k-p)^2 + i\varepsilon\right]\left[k'^2 - m^2 + i\varepsilon\right]\left[k^2 - m^2 + i\varepsilon\right]}$$ (eq. 30.1)

Para fazer esta integral usaremos o método conhecido como parametrização de Feynman. A idéia é transformar o denominador acima em um único polinômio de grau 2 em k (que por sua vez estará elevado a 3). Fica fácil ver com fazemos isso no caso da integral simples:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx\, dy\, \delta(x+y-1) \frac{1}{[xA + yB]^2}$$

parâmetros de Feynman

Que poderia ser usada para integrar:

$$\int d^4k \frac{1}{(k-p)^2 (k^2 - m^2)} = \int d^4k \int_0^1 dx\, dy\, \delta(x+y-1) \frac{1}{[x(k-p)^2 + y(k^2 - m^2)]^2} =$$

$$= \int d^4k \int_0^1 dx\, dy\, \delta(x+y-1) \frac{1}{[\underbrace{(x+y)}_{1} k^2 - 2x\, k\cdot p + x p^2 - m^2 y]^2}$$

$$l \equiv k - xp \qquad d^4k = d^4 l \quad \Rightarrow \left[l^2 - m^2 y \right]$$

ficaria bem fácil fazer a integral em L, uma vez que é esfericamente simétrica

Temos uma identidade mais geral para o caso de vários fatores no denominador:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n\, \delta\left(\sum x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n]^n}$$ (eq. 30.2)

Aplicando isso ao denominador de 30.1 temos:

$$\frac{1}{\left[(k-p)^2+i\varepsilon\right]\left[k'^2-m^2+i\varepsilon\right]\left[k^2-m^2+i\varepsilon\right]} = \int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\,\frac{2}{D^3}$$

$$D = x\left[k^2-m^2+i\varepsilon\right] + y\left[\overbrace{k'^2}^{(k+q)^2}-m^2+i\varepsilon\right] + z\left[(k-p)^2+i\varepsilon\right] =$$

$$= x(k^2-m^2) + y(k^2+2k\cdot q+q^2-m^2) + z(k-p)^2 + \underbrace{(x+y+z)}_{1}\,i\varepsilon =$$

$$= xk^2 - xm^2 + yk^2 + 2y\,k\cdot q + yq^2 - ym^2 + zk^2 - 2z\,k\cdot p + zp^2 + i\varepsilon =$$

$$= \underbrace{k^2 + 2y\,k\cdot q - 2z\,k\cdot p}_{} + zp^2 + yq^2 - xm^2 - ym^2 + i\varepsilon =$$

$$\ell = k + yq - zp$$

$$= \overbrace{\ell^2}^{} \underbrace{+ 2yz\,p\cdot q - z^2p^2 - y^2q^2 + zp^2 + yq^2 - xm^2 - ym^2}_{} + i\varepsilon =$$

$$= \ell^2 + i\varepsilon - \Delta$$

"a bit of algebra"

$$-\Delta = 2yz\,p\cdot q - z^2\overbrace{p^2}^{m^2} - y^2q^2 + z\overbrace{p^2}^{m^2} + yq^2 - xm^2 - ym^2 =$$

$$p\cdot q = p\cdot(p'-p) = p\cdot p' - p^2 = p\cdot p' - m^2$$

$$= 2yz\,p\cdot p' - 2yz\,m^2 - z^2m^2 - y^2q^2 + zm^2 + yq^2 - xm^2 - ym^2 =$$

$$= m^2\left(-2yz + z - x - y - z^2\right) + \underline{2yz\,p\cdot p'} - y^2q^2 + yq^2 =$$

$$q^2 = (p'-p)^2 = \underbrace{p'^2 + p^2}_{2m^2} - 2p\cdot p'$$

$$\rightarrow 2p\cdot p' = 2m^2 - q^2$$

$$= m^2\Big(\cancel{-2yz} + \underbrace{z \overbrace{-x-y}^{z-1} - z^2}_{-(1-z)^2} \cancel{+2yz}\Big) + \big(\underbrace{-yz - y^2 + y}_{xy}\big) q^2 =$$

$$= -(1-z)^2 m^2 + xy\, q^2$$

$q^2 < 0$

$$\Delta = -xy\, q^2 + (1-z)^2 m^2 > 0$$

$$D = \ell^2 + i\varepsilon - \Delta = \ell^2 + i\varepsilon + xy\, q^2 - (1-z)^2 m^2$$

$$\delta\Gamma^\mu = 2ie^2 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx\, dy\, dz\, \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} \left[\text{num}\right]$$

Falta fazer a mudança de variáveis no numerador

$$\left[\text{num}\right] = \left[\not{k}\,\gamma^\mu \not{k}' + m^2 \gamma^\mu - 2m(k+k')^\mu\right]$$

Isso envolve um bocado de álgebra, é necessário lembrar que:

(I) $D = D(\ell^2) \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^\mu}{D^3} = 0 \\ \displaystyle\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^\mu \ell^\nu}{D^3} = \frac{1}{4}\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{g^{\mu\nu}\ell^2}{D^3} \end{cases}$

(II) $\left[\text{num}\right]$ está entre espinores: $\bar{u}(p')\left[\text{num}\right]u(p)$

portanto podemos trocar $\not{p}\, u(p) = m\, u(p)$

De resto é só usar relações de comutação e as relações entre os momentos para chegar em:

$$\left[\text{num}\right] = \Big[\gamma^\mu\Big(-\frac{1}{2}\ell^2 + (1-x)(1-y)\, q^2 + (1-2z-z^2)m^2\Big) + (p'^\mu + p^\mu)\cdot m\, z(z-1) -$$

$$+ q^\mu \cdot \underbrace{m(z-2)(x-y)}\Big]$$

$\circlearrowleft$ pois é ímpar sobre a troca $x \leftrightarrow y$ (todo o resto da integral é par)

Usando a identidade de Gordon:

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')\left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right]u(p)$$

podemos fazer: $p'^\mu + p^\mu \longrightarrow 2m\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$

obtendo:

$$\delta\Gamma^\mu = 2ie^2\int\frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\,\frac{2}{D^3}\times$$

$$\times\left[\gamma^\mu\left(-\frac{1}{2}\ell^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2\right) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\left(2m^2 z(1-z)\right)\right]$$

(eq. 33.1)

pág 27

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2)$$

Fica bem mais fácil fazer a integral em l caso possamos passar para coordenadas esféricas em 4D, podemos fazer isso se passarmos para o espaço Euclideano por meio de uma rotação de Wick

$$\ell^0 = i\,\ell^0_E \qquad\qquad d^4\ell = i\,d\ell^0_E\,d^3\vec{\ell}_E = i\,d^4\ell_E$$

$$\vec{\ell} = \vec{\ell}_E$$

$$\ell^2 = -(\ell^0_E)^2 - (\vec{\ell}_E)^2 = -\ell_E^2$$

$$\int\frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{1}{[\ell^2-\Delta]^m} = i\int\frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4}\frac{1}{[-\ell_E^2-\Delta]^m} = \frac{i}{(-1)^m}\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4\ell_E\,\frac{1}{[\ell_E^2+\Delta]^m} =$$

$$= \frac{i(-1)^m}{(2\pi)^4} \underbrace{\int d\Omega_4}_{2\pi^2} \underbrace{\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^3}{[l_E^2+\Delta]^m}}_{} =$$

$$\mu = l_E^2 + \Delta \qquad d\mu = 2 l_E\, dl_E \Rightarrow \int_\Delta^\infty \frac{d\mu}{2} \frac{\mu - \Delta}{(\mu)^m} = \frac{1}{2} \frac{\Delta^{2-m}}{(m-1)(m-2)}$$

$$\boxed{m \geq 3}$$

$$= \frac{i(-1)^m}{(2\pi)^4} 2\pi^2 \frac{1}{2} \frac{\Delta^{2-m}}{(m-1)(m-2)} = \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-1)(m-2)} \frac{1}{\Delta^{m-2}}$$

(eq. 34.1)

$$\boxed{m \geq 3}$$

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^2}{[l^2-\Delta]^m} = i \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{-l_E^2}{[-l_E^2-\Delta]^m} = \frac{i(-1)^{m+1}}{2^3\pi^2} \underbrace{\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^5}{[l_E^2+\Delta]^m}}_{} =$$

$$\int_\Delta^\infty \frac{d\mu}{2} \frac{(\mu-\Delta)^2}{\mu^m} = \frac{\Delta^{3-m}}{(m-3)(m-2)(m-1)}$$

$$\boxed{m \geq 4}$$

$$= \frac{i(-1)^{m+1}}{(4\pi)^2} \frac{2}{(m-3)(m-2)(m-1)} \frac{1}{\Delta^{m-3}}$$

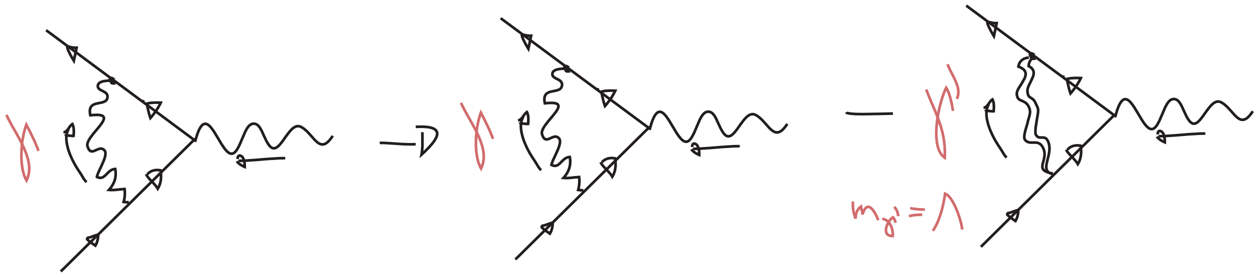
(eq. 34.2)

Aqui temos um problema, já que estamos justamente interessados em integrar termos com D^3 no denominador e a integral é divergente neste caso

$$\int_\Delta^\infty d\mu \frac{\mu^2 - 2\mu\Delta + \Delta^2}{\mu^3} = \lim_{K\to\infty} \ln\left[\frac{K}{\Delta}\right]$$

Estudaremos o significado desta divergência em breve. Por enquanto vamos dar um jeito de isolar esta divergência na integral, este procedimento é chamado de regularização e existem muitas técnicas diferentes para executá-la. O importante é não confundir este procedimento com a renormalização, tudo que a regularização faz é colocar a resposta numa forma em que a divergência fique mais fácil de analisar, separada de uma parte finita (o que ajuda muito na hora de renormalizar). O método que usaremos é conhecido como regularização de Pauli-Villars e consiste em introduzir uma nova partícula fictícia de massa Λ. Nosso objetivo é fazer a seguinte modificação no propagador do fóton que está no loop:

$$\frac{1}{(k-p)^2+i\varepsilon} \longrightarrow \frac{1}{(k-p)^2+i\varepsilon} - \frac{1}{(k-p)^2-\Lambda^2+i\varepsilon}$$



Note que recuperamos o propagador usual fazendo $\Lambda^2 \longrightarrow \infty$

mas para $k^2 \gg \Lambda^2$ podemos deprezar Λ^2 e os dois propagadores se cancelam.

Se voltarmos na pg 31 vemos que ganhamos uma nova contribuição em que a única mudança introduzida é (nada muda nos numeradores):

$$\Delta_\Lambda = -xyq^2 + (1-z)^2 m^2 + z\Lambda^2$$

De forma que agora temos:

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}\left(\frac{l^2}{[l^2-\Delta]^3} - \frac{l^2}{[l^2-\Delta_\Lambda]^3}\right) = \frac{2i}{(4\pi)^2}\int_0^\infty dl_E \left(\frac{l_E^5}{[l_E^2+\Delta]^3} - \frac{l_E^5}{[l_E^2+\Delta_\Lambda]^3}\right) =$$

$$= \frac{2i}{(4\pi)^2}\lim_{K\to\infty}\left[\int_\Delta^K \frac{du}{2}\left(\frac{u^2-2u\Delta+\Delta^2}{u^3}\right) - \int_{\Delta_\Lambda}^K \frac{du}{2}\left(\frac{u^2-2u\Delta_\Lambda+\Delta_\Lambda^2}{u^3}\right)\right] =$$

$$= \frac{i}{(4\pi)^2}\lim_{K\to\infty}\left[\ln\left[\frac{K}{\Delta}\right] + \frac{3}{2} - 2\frac{\Delta}{K} + \frac{\Delta^2}{2K^2} - \left(\ln\left[\frac{K}{\Delta_\Lambda}\right] + \frac{3}{2} - 2\frac{\Delta_\Lambda}{K} + \frac{\Delta_\Lambda^2}{2K^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{i}{(4\pi)^2}\ln\left[\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta}\right]$$

As integrais finitas mudam da seguinte forma:

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{[\ell^2-\Delta]^3}-\frac{1}{[\ell^2-\Delta_\Lambda]^3}\right)\overset{\text{eq 34.1 / m = 3}}{=}-\frac{i}{2(4\pi)^2}\left(\frac{1}{\Delta}-\underbrace{\frac{1}{\Delta_\Lambda}}_{O(\Lambda^2)}\right)$$

podemos ignorar esta modificação se $\Lambda >> 1$

Voltando com os resultados das integrais na equação 33.1, temos:

$$\delta\Gamma^\mu = \cancel{2}ie^2\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\frac{\cancel{i}}{(4\pi)^2}\left\{\gamma^\mu\left[+\frac{1}{\cancel{2}}\ln\left[\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta}\right]+\frac{1}{\cancel{2}\Delta}\left((1-x)(1-y)q^2+(1-4z+z^2)m^2\right)\right]+\frac{1}{\cancel{2}\Delta}\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\underbrace{\left(2m^2z(1-z)\right)}_{\to F_2}\right]$$

$$\boxed{\Delta_\Lambda \underset{\Lambda>>1}{\sim} z\Lambda^2}$$

$$\boxed{\frac{e^2}{4\pi}=\alpha}$$ constante de estrutura fina

$$\boxed{\delta\Gamma^\mu = \gamma^\mu\,\delta F_1(q^2)+\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\,\delta F_2(q^2)}$$ (eq. 36.1)

$$\boxed{\delta F_1(q^2)=\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\left\{\ln\left[\frac{z\Lambda^2}{\Delta}\right]+\frac{1}{\Delta}\left[(1-x)(1-y)q^2+(1-4z+z^2)m^2\right]\right\}}$$ (eq. 36.2)

$$\boxed{\delta F_2(q^2)=\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\frac{1}{\Delta}2m^2z(1-z)}$$ (eq. 36.3)

Recapitulando o método usado:

(1) Usamos os diagramas de Feynman para escrever a amplitude
(2) Combinamos os denominadores dos propagadores usando os parâmetros de Feynman
(3) Completamos quadrados no denominador, mudando a variável de integração para ℓ (somando uma constante a k)
(4) Passamos uma numerador para ℓ e notamos que as integrais das potências ímpares são nulas. As potências pares são escritas em termos de ℓ^2, ℓ^4, etc... (o uso da equação de movimento ajuda muito a simplificação do numerador)
(5) fazemos a rotação de Wick e integramos no espaço Euclideano. Caso as integrais sejam divergentes, usamos algum tipo de regularização.

Notamos que δF_2 não tem qualquer divergência, de fato podemos calculá-lo:

$$\delta F_2(0) = \left(\frac{\alpha}{\cancel{2}\pi}\right)\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\,\frac{\cancel{2}\cancel{m^2}z\cancel{(1-z)}}{(1-z)^{\cancel{2}}\cancel{m^2}} =$$

$$x_0 = 1-y-z$$

$$0 < x_0 < 1 \Rightarrow 0 < 1-y-z < 1 \Rightarrow 1-z > y > -z$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy\,\frac{z}{1-z} = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0{,}0011617$$

O valor experimental atual é 0,00115965218073 (28) - tão preciso que é necessário considerar as correções $O(\alpha^4)$. Uma vez consideradas, estas correções concordam com este valor em $1/10^8$

δF_1, no entanto, contém divergências de dois tipos. A primeira, e mais óbvia, está ligada o grandes momentos no loop e é chamada de divergência ultravioleta. Na expressão que obtivemos ela aparece quando retiramos a partícula fictícia da teoria, fazendo:

$$\Lambda \to \infty$$

$$\delta F_1 \sim \ln\left[\frac{z\Lambda}{\Delta}\right]$$

A outra está associada a momentos muito pequenos do fóton no loop, e é chamada de divergência no infravermelho. Ela fica evidente se tomarmos, por exemplo, o seguinte termo de F_1 e fizermos $q = 0$

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\frac{1}{\Delta}\left[(1-4z+z^2)m^2\right] \qquad \Delta = -xy\,q^2 + (1-z)^2 m^2$$