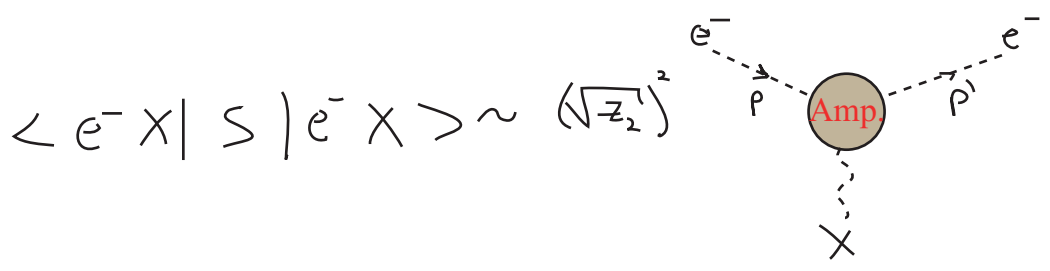


$$\delta \bar{F}_1(0) + \delta Z_2 = 0$$

Agora, considerando a fórmula de LSZ (eq. 11.1), sabemos que:



Por isso, em qualquer espalhamento que envolva este vértice, teremos não apenas  $-i e \Gamma^\mu$  mas sim:

$$-i e \Gamma^\mu \rightarrow -i e \Gamma^\mu Z_2$$

Considerando isso na definição dos fatores de forma obtemos:

$$Z_2 \Gamma^\mu = \gamma^\mu \bar{F}_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \bar{F}_2(q^2)$$

a "linha" é para indicar a nova correção, agora que consideramos  $Z_2$   
 todos os  $\delta$  são em ordem  $\alpha$

$$1 + \gamma^\mu \delta Z_2 + \delta \Gamma^\mu + \mathcal{O}(\alpha^2) = \gamma^\mu + \gamma^\mu \delta \bar{F}_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta \bar{F}_2(q^2)$$

$$\gamma^\mu \delta \bar{F}_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta \bar{F}_2(q^2)$$

$$\sigma^{\mu\nu} q_\nu \Rightarrow \delta \bar{F}_2'(q^2) = \delta \bar{F}_2(q^2) \quad (\text{nada muda para esta estrutura})$$

$$\gamma^\mu \Rightarrow \delta \bar{F}_1'(q^2) = \delta \bar{F}_1(q^2) + \delta Z_2 = \delta \bar{F}_1(q^2) - \delta \bar{F}_1(0)$$

que é exatamente a subtração que fizemos na pg 38

Isto nos mostra que, apesar de termos estas divergências circulando pela teoria, pelo menos nessa grandeza observável (o fator de forma elétrico) as divergências se cancelam. É claro que, feito desta forma, parece apenas um milagre numérico com pouca chance de se sustentar em ordens superiores de  $\alpha$ .

De uma forma mais geral, para que o fator de forma satisfaça as condições que desejamos:

$$\bar{F}_1(0) = 1$$

representa o que tínhamos antes da subtração na pg 38

podemos introduzir um novo fator Z no vértice, definido por:  $\Gamma^\mu(q^2=0) \equiv Z_1^{-1} \gamma^\mu$  (eq. 51.1)

e a condição em F1 para qualquer ordem de perturbação se torna:

$$Z_1 = Z_2$$

$$Z_2 \Gamma^N = \gamma^N F_1(q^2) + \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2) \xrightarrow{q^2=0} Z_2 Z_1^{-1} \gamma^N = \gamma^N F_1(0) + \dots$$

$F_1(0) = Z_2 Z_1^{-1}$

Felizmente, podemos provar que isto é verdade usando as relações de Ward-Takahashi:

(eq 27.1)  $\Rightarrow -i q^\mu \Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; q) = [S_F^c(p_1+q)]^{-1} - [S_F^c(p_1)]^{-1}$

$\Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; q) \xrightarrow{q \rightarrow 0} Z_1^{-1} \gamma^N$        $S_F(p) = \frac{i Z_2}{\not{p} - m} + \dots$

$\left. \begin{matrix} p_1, p_2 \rightarrow m \\ q_\mu \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow -i q_\mu \Gamma^N \simeq 0 - i \underbrace{\Gamma^N(q=0)}_{Z_1^{-1} \gamma^N} q_\mu + \mathcal{O}(q^2) \simeq -i Z_1^{-1} \not{q}$

$\Rightarrow [S_F^c(p_1+q)]^{-1} - [S_F^c(p_1)]^{-1} \simeq -i Z_2^{-1} [(p_1+q) - m - \not{p}_1 + m] = -i Z_2^{-1} \not{q}$

$Z_1 = Z_2$

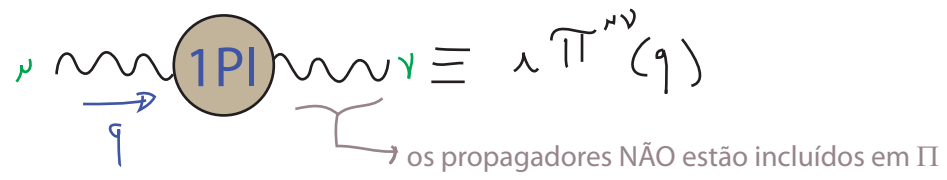
Em qualquer ordem de perturbação

Como uma nota final, note que as identidades de WT são consequência direta da simetria de gauge da teoria e garantiram o cancelamento de divergências em todas as ordens. Este é um resultado importante e bastante geral. No caso de simetrias não Abelianas trocamos as identidades de WT pelas **identidades de Slavnov-Taylor** que têm um papel central nos cancelamentos que precisam ocorrer nestas teorias. Este é mais um motivo para usarmos teorias de gauge.

### Auto-energia do fóton

(Peskin 7.5)

Vamos ver agora o que ocorre com o propagador do fóton quando consideramos as correções radiativas. Começemos definindo:



A primeira correção obtida perturbativamente é:

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = (-ie)^2 (-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{i}{\not{k}-m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k}+\not{q}-m} \right] \equiv i\Pi^{\mu\nu}(q)$$

Dada sua estrutura de Lorentz:  $\Pi^{\mu\nu}(q) = \Pi_A(q^2) g^{\mu\nu} + \Pi_B(q^2) q^\mu q^\nu$

mas também sabemos que (identidade de Ward):  $q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0$

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = \Pi_A(q^2) q^\nu + \Pi_B(q^2) q^2 q^\nu = 0$$

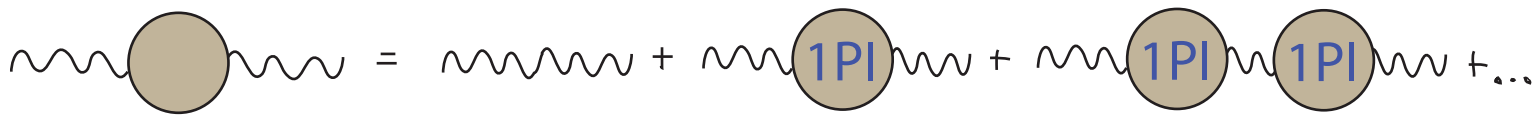
$$\Pi_A(q^2) = -\Pi_B(q^2) q^2 \equiv \Pi(q^2) q^2$$

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2)$$

(eq. 53.1)

Não esperamos que haja um polo em  $q^2 = 0$ , já que a QED não tem nenhum estado de uma partícula que contribua para este diagrama, então assumiremos que  $\Pi(q^2)$  é regular em  $q^2 = 0$ .

Podemos somar todas as contribuições 1PI para obter:



gauge de Feynman

$$= -\frac{i g^{\mu\nu}}{q^2} + -\frac{i g_{\mu\rho} g^{\rho\sigma} g^{\sigma\nu}}{q^2} \left[ i(q^2 g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma) \Pi(q^2) \right] \frac{-i g^{\nu\mu}}{q^2} + \dots =$$

$$\left( g^{\mu\rho} g^{\rho\sigma} g_{\sigma\nu} - \frac{q^\rho q_\rho g^{\mu\nu}}{q^2} \right) \Pi(q^2) = \delta^\mu_\nu - \frac{q^\mu q_\nu}{q^2} \Pi(q^2) \equiv \Delta^\mu_\nu \Pi(q^2)$$

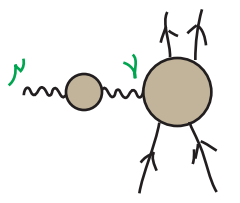
$$\Delta^\mu_\nu \Delta^\nu_\beta = \left( \delta^\mu_\nu - \frac{q^\mu q_\nu}{q^2} \right) \left( \delta^\nu_\beta - \frac{q^\nu q_\beta}{q^2} \right) = \delta^\mu_\beta - \frac{q^\mu q_\beta}{q^2} - \frac{q^\nu q_\beta}{q^2} + \frac{q^\mu q^2 q_\beta}{q^4} = \Delta^\mu_\beta$$

$$= -\frac{i g^{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g_{\mu\rho} g^{\rho\sigma}}{q^2} \underbrace{\Delta^\rho_\sigma \Delta^\sigma_\nu}_{\Delta^\rho_\nu} \Pi(q^2) \Pi(q^2) + \dots =$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \Delta^{\rho}_{\nu} \left[ \Pi^1(q^2) + \Pi^2(q^2) + \Pi^3(q^2) + \dots \right] =$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \left( \delta^{\rho}_{\nu} - \frac{q^{\rho} q_{\nu}}{q^2} \right) \left( \frac{1}{1 - \Pi(q^2)} - 1 \right) = \frac{-i}{q^2(1 - \Pi(q^2))} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_{\mu} q_{\nu}}{q^2} \right) - \frac{i}{q^2} \left( \frac{q_{\mu} q_{\nu}}{q^2} \right)$$

Na prática, para o cálculo de elementos da matriz S, este propagador deverá estar conectado a uma linha fermiônica de um diagrama mais complicado:



$$= \frac{-i}{q^2(1 - \Pi(q^2))} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_{\mu} q_{\nu}}{q^2} \right) - \frac{i}{q^2} \left( \frac{q_{\mu} q_{\nu}}{q^2} \right) \cdot \mathcal{M}^{\nu}(q)$$

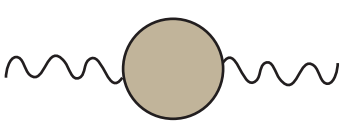
em algum lugar neste elemento de matriz temos:

$$\dots \frac{i}{\not{p}_1 + \not{q} - m} (-i e \not{\gamma}^{\nu}) \frac{i}{\not{p}_2 - m} \dots$$

E neste caso as identidades de WT nos garantem que:  $q_{\nu} \mathcal{M}^{\nu}(q) = 0$

É fácil obter isso a partir da eq. 27.1, basta notar o que ocorre se usarmos LSZ do dois lados da equação, buscando um elemento de matriz com dois elétrons reais. Do lado esquerdo temos dois polos, mas cada termo do lado direito tem apenas um, de forma que este não contribui para o elemento de matriz. Para mais detalhes veja a seção 7.4 do Peskin.

Portanto, para fim de cálculo de elementos de matriz S:

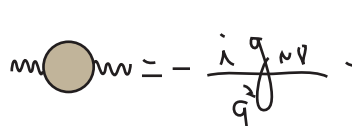


$$= \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 \left( 1 - \frac{\Pi(q^2)}{1} \right)}$$

REGULAR EM  $q^2 = 0$

Continuamos tendo um polo  $q^2 = 0$ , portanto a massa do fóton não muda. Note que as identidades de Ward-Takahashi (e portanto a simetria de gauge) estão por trás disso. Suponha que fosse possível ter uma correção com a forma proibida por WT, por exemplo:

$$i \Pi^{\mu\nu}(q) = i M^2 g^{\mu\nu} \left( \text{onde falta um termo } -\frac{M^2}{q^2} q^{\mu} q^{\nu} \text{ que garantiria WT} \right)$$



$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} + -\frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \left[ i M^2 g^{\rho\sigma} \right] \frac{-i g_{\sigma\nu}}{q^2} + \dots =$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} - i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left( \frac{M^2}{q^2} \right) - i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left( \frac{M^2}{q^2} \right)^2 =$$

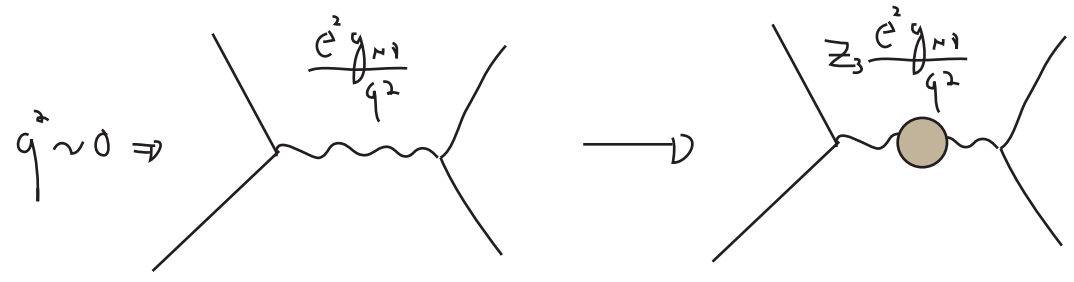
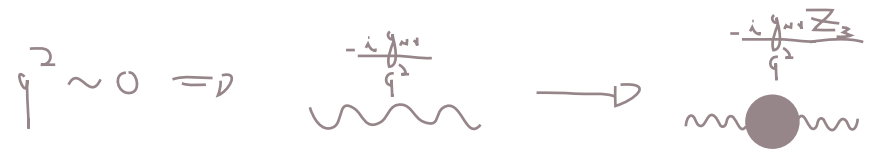
$$= -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left( 1 + \left( \frac{M^2}{q^2} \right) + \left( \frac{M^2}{q^2} \right)^2 + \dots \right) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{1}{1 - \frac{M^2}{q^2}} = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2 - M^2}$$

polo em M (desastre!)  
↓

O resíduo do polo em  $q^2 = 0$  é basicamente dado por:

$$Z_3 = \frac{1}{1 - \Pi(0)}$$

Qualquer espalhamento "soft" (com baixa troca de energia e momento) entre dois elétrons será modificado justamente por este fator:



Como temos um  $e^2$  acompanhando este fator  $Z_3$  podemos vê-lo como uma redefinição da carga:

$$e_r = \sqrt{Z_3} e$$

⇓ mudamos a notação (assim como fizemos com a massa)

$$e = \sqrt{Z_3} e_0$$

⇓ carga que aparece na lagrangeana (carga "nua")  
 ⇓ carga vestida ou física (o que medimos)

Mais uma vez temos a condição advinda da série perturbativa:

$$\begin{cases} e = e_0 + \mathcal{O}(\alpha) \\ Z_3 = 1 + \mathcal{O}(\alpha) \end{cases}$$

$\Pi(q^2)$  tem outro efeito:

$$q^2 \neq 0 \Rightarrow \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{(1 - \Pi(q^2))} \approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2 (1 - \Pi_2(0))}{(1 - \Pi_2(q^2))} \approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{1 + \kappa}$$

$\frac{1}{1 + \kappa} \approx 1 - \kappa + \kappa^2 + \dots$   
 $\frac{1}{1 - \kappa} \approx 1 + \kappa + \kappa^2 + \dots$

$e_0^2 = \frac{e^2}{Z_3} = e^2 (1 - \Pi(0)) \approx e^2 (1 - \Pi_2(0))$

$$\approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{(1 - \Pi_2(q^2))(1 + \Pi_2(0))} \approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{[1 - (\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))]}$$

$\Pi_2(q^2) \Pi_2(0) \sim \mathcal{O}(\alpha^2)$

esta grandeza funciona como uma carga elétrica dependente do momento

Em suma, o efeito das correções ao propagador do fóton é o de mudar o acomplamento da teoria e torná-lo dependente de energia (passa a ser um running coupling):

$$\alpha_0 \rightarrow \alpha_{\text{EFF}}(q^2) = \frac{e_0^2/4\pi}{1 - \Pi(q^2)} \stackrel{\text{O}(\alpha)}{\approx} \frac{\alpha}{[1 - (\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))]}$$

(eq. 56.1)

$$\alpha_{\text{EFF}}(0) \equiv \alpha$$

Calculemos rapidamente  $\Pi(q^2)$ :

$$i\Pi_2^{\text{NN}}(q) = -(-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{i}{k-m} \gamma^\nu \frac{i}{k+q-m} \right]$$

rigorosamente teríamos que usar  $e_0$  e  $m_0$ , mas trocar por  $e$  e  $m$  só introduz um erro de ordem  $\alpha^2$

$$e = e_0(1 + \mathcal{O}(\alpha)) \Rightarrow (e - e_0)^2 = \mathcal{O}(\alpha^2)$$

Seguindo o procedimento usual (parametriz. de Feynman, rotação de Wick), chegamos a:

$$i\Pi_2^{\text{NN}}(q) = -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l_E}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} l_E^2 + g^{\mu\nu} l_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2)}{(l_E^2 + \Delta)^2}$$

(eq. 56.2)

$$\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$$

Que obviamente diverge (temos  $l^5$  no numerador). Temos que escolher algum método de regularização. Neste caso a escolha apresenta sutilezas devidas ao fato de estarmos lidando com uma função cuja forma está restrita pela identidade de WT. Se fizéssemos por exemplo a regularização por cut-off (que consiste simplesmente em não integrar no módulo do momento euclidiano até infinito, mas sim até uma escala máxima  $\Lambda$ ):

$$\int_0^\infty dl_E \rightarrow \int_0^\Lambda dl_E \Rightarrow i\Pi_2^{\text{NN}}(q) \propto e^2 \Lambda^2 g^{\mu\nu}$$

falta um termo  $-\frac{e^2 \Lambda^2}{q^2} q^\mu q^\nu$  para satisfazer WT

$$\hookrightarrow q_\mu \Pi_2^{\text{NN}} \sim e^2 \Lambda^2 q^\nu \neq 0$$

Este resultado viola a identidade de Ward e daria uma massa para o fóton

De fato não é a divergência em si que está violando a invariância de gauge (as id. WT.) mas sim a forma como escolhemos regularizá-la, a prova disso é que podemos encontrar outras regularizações que preservam as identidades de WT. De uma forma geral, o resultado deve independer da regularização escolhida e quando duas regularizações dão resultados diferentes é porque uma delas (ou as duas) está violando alguma(s) das simetrias da teoria. Se elevarmos as simetrias a categoria de axiomas da teoria, então temos um critério para escolher a regularização correta.

Dentro desta lógica concluímos que a regularização por cut-off feita acima não é boa. Uma outra opção é usar Pauli-Villars, como fizemos nas pgs 34-35, o que preservaria WT mas é um tanto complicado. Felizmente temos uma outra opção, a **regularização dimensional**.

A idéia da **regularização dimensional** é calcular os diagramas como função do número  $d$  de dimensões do espaço tempo. Para  $d$  suficientemente pequeno as integrais são finitas, e então voltamos para o mundo real fazendo  $d \rightarrow 4$

Um exemplo:

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = \int \frac{d\mathcal{L}_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi})^d &= \left( \int dx e^{-x^2} \right)^d = \int d^d x e^{-\sum_{i=1}^d x_i^2} = \int d\mathcal{L}_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} = \\ &= \left( \int d\mathcal{L}_d \right) \frac{1}{2} \int_0^\infty d(x^2) (x^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-x^2} = \left( \int d\mathcal{L}_d \right) \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \end{aligned}$$

$x^{d-2} = (x^2)^{\frac{d}{2}-1}$

$$\therefore \int d\mathcal{L}_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (\text{eq. 57.1})$$

$$\int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d(\ell_E^2) \frac{(\ell_E^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = -\frac{1}{2} \int_1^0 dx \frac{x^{1-\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}$$

$x = \frac{\Delta}{(\ell_E^2 + \Delta)} \quad dx = -\frac{\Delta}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} d\ell_E^2$

$(\ell_E^2)^{\frac{d}{2}-1} = \left( \frac{\Delta - \Delta x}{x} \right)^{\frac{d}{2}-1} = x^{1-\frac{d}{2}} \Delta^{\frac{d}{2}-1} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}$