

De fato não é a divergência em si que está violando a invariância de gauge (as id. WT.) mas sim a forma como escolhemos regularizá-la, a prova disso é que podemos encontrar outras regularizações que preservam as identidades de WT. De uma forma geral, o resultado deve independer da regularização escolhida e quando duas regularizações dão resultados diferentes é porque uma delas (ou as duas) está violando alguma(s) das simetrias da teoria. Se elevarmos as simetrias a categoria de axiomas da teoria, então temos um critério para escolher a regularização correta.

Dentro desta lógica concluímos que a regularização por cut-off feita acima não é boa. Uma outra opção é usar Pauli-Villars, como fizemos nas pgs 34-35, o que preservaria WT mas é um tanto complicado. Felizmente temos uma outra opção, a **regularização dimensional**.

A idéia da **regularização dimensional** é calcular os diagramas como função do número  $d$  de dimensões do espaço tempo. Para  $d$  suficientemente pequeno as integrais são finitas, e então voltamos para o mundo real fazendo  $d \rightarrow 4$

Um exemplo:

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = \int \frac{d\mathcal{R}_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi})^d &= \left( \int dx e^{-x^2} \right)^d = \int d^d x e^{-\sum_{i=1}^d x_i^2} = \int d\mathcal{R}_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} = \\ &= \left( \int d\mathcal{R}_d \right) \frac{1}{2} \int_0^\infty d(x^2) (x^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-x^2} = \left( \int d\mathcal{R}_d \right) \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \end{aligned}$$

$x^{d-2} = (x^2)^{\frac{d}{2}-1}$

$$\therefore \int d\mathcal{R}_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (\text{eq. 57.1})$$

$$\int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d(\ell_E^2) \frac{(\ell_E^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = -\frac{1}{2} \int_1^0 dx \frac{x^{1-\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}$$

$x = \frac{\Delta}{(\ell_E^2 + \Delta)} \quad dx = -\frac{\Delta}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} d\ell_E^2$

$(\ell_E^2)^{\frac{d}{2}-1} = \left( \frac{\Delta - \Delta x}{x} \right)^{\frac{d}{2}-1} = x^{1-\frac{d}{2}} \Delta^{\frac{d}{2}-1} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}$

Usando então a definição da função beta:

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \frac{\Gamma(2-d/2)\Gamma(d/2)}{\Gamma(2)} \underset{1!}{}$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \Gamma(2-d/2)\Gamma(d/2)$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \Gamma(2-d/2)$$

(eq. 58.1)

$\Gamma(z)$  tem polos em todos os números inteiros negativos e em zero, logo teremos polos em

$$d = 4, 6, 8, \dots$$

Como estamos interessados no comportamento perto de  $d = 4$ , podemos definir:  $\epsilon = 4 - d$

$$\Gamma(2 - \frac{d}{2}) = \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)$$

const. de Euler

$$-\frac{d}{2} = \frac{\epsilon}{2} - 2$$

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} = \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\epsilon/2} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon \ln\left(\frac{1}{\Delta}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$(4\pi)^{-d/2} = (4\pi)^{\frac{\epsilon-4}{2}} = (4\pi)^{-2} (4\pi)^{\frac{\epsilon}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ 1 + \frac{1}{2}\epsilon \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right]$$

O produto das três expansões acima nos dá:

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \underset{\substack{d \rightarrow 4 \\ \epsilon \rightarrow 0}}{\sim} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) + \ln(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

Comparemos com o que teríamos obtido via regularização de Pauli-Villars

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ L_N\left(\frac{\Lambda^2}{\Delta}\right) + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}) \right]$$

Reg. Dimensional

Pauli-Villars

De onde vemos que:  $\frac{2}{\epsilon} \longleftrightarrow L_N(\Lambda^2)$

Isso também explica porque temos um logaritmo de algo com dimensão ( $\ln[\Delta]$ ), a escala deste logaritmo está escondida no  $2/\epsilon$

Podemos também provar algumas fórmulas mais gerais:

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2} \frac{\Gamma(n-d/2)}{\Gamma(n)} \quad (\text{eq. 59.1})$$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2-1} \frac{\Gamma(n-d/2-1)}{\Gamma(n)} \quad (\text{eq. 59.2})$$

Além disso é importante lembrar que:  $\begin{cases} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = d \\ \text{portanto a substituição nas integrais (pg 32) fica: } \ell^\mu \ell^\nu \rightarrow \frac{1}{d} \ell^2 g^{\mu\nu} \\ \delta^\mu \delta^\nu \delta_\nu = -(2-\epsilon) \delta^\mu \\ \delta^\mu \delta^\nu \delta^\rho \delta_\nu = 4 \delta^{\mu\rho} - \epsilon \delta^{\mu\nu} \delta^\rho \\ \delta^\mu \delta^\nu \delta^\rho \delta^\sigma \delta_\nu = -2 \delta^{\rho\sigma} \delta^\mu + \epsilon \delta^{\nu\rho} \delta^\sigma \end{cases}$

Voltando ao cálculo de  $\Pi_2^{\mu\nu}(q)$  (eq. 56.2 - com pequenas mudanças para dar conta da mudança de dimensão), os termos com  $\ell^2$  no numerador nos dão:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{(1 - \frac{2}{d}) g^{\mu\nu} \ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} &= (1 - \frac{2}{d}) g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-d/2} \Gamma(1-d/2) = \\ &= - \underbrace{\left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma(1-d/2)}^{\Gamma(2-d/2)} g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \Delta = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2-d/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} (-\Delta g^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Calculando o termos restantes de 56.2 temos (fica como exercício):

$$i\tilde{\Pi}_2(q^2) = (q^2 g^{NV} - g^N g^V) i \Pi_2(q^2) \quad (\text{eq. 60.1})$$

Onde:

$$\Pi_2(q^2) = -\frac{8e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \, x(1-x) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \quad (\text{eq. 60.2})$$

De forma que, fazendo a regularização dimensional, obtemos exatamente a forma exigida pelas identidades de WT.

Fazendo o limite  $d \rightarrow 4$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ ):

$$\Pi_2(q^2) \rightarrow -\frac{8e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) + \ln(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

$-\frac{2\alpha}{\pi}$

a integral da parte divergente nos dá:  $-\frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{3\epsilon}$

Podemos obter a correção na carga:

$$\frac{e^2 - e_0^2}{e_0^2} = \frac{Z_3 e_0^2 - e_0^2}{e_0^2} = Z_3 - 1 = \frac{1}{1 - \Pi(0)} - 1 = \Pi_2(0) \approx -\frac{2\alpha}{3\pi\epsilon}$$

$\uparrow$   
 $\mathcal{O}(\epsilon)$

Temos mais uma vez uma diferença infinita entre o que observamos ( $e^2$ ) e o que aparece na lagrangeana ( $e_0^2$ ), mas essa diferença não é observável. O que é **realmente observável** é a dependência com  $q^2$  desta carga. É fácil ver que esta está livre de divergências:

$$(\text{eq. 56.1}) \Rightarrow \alpha_{\text{FFF}}(q^2) = \frac{\alpha}{[1 - \underbrace{(\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))}_{\tilde{\Pi}_2(q^2)}]}$$

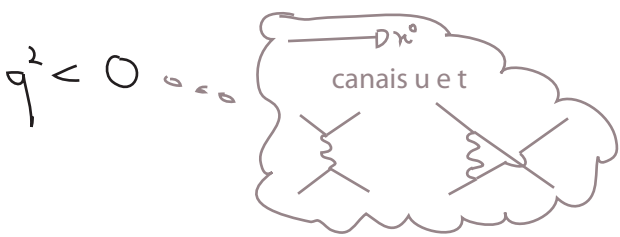
$$\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$$

$$\tilde{\Pi}_2(q^2) = -\frac{8e^2}{2\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) + \ln(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) + \right. \\ \left. -\frac{2}{\epsilon} + \ln(m^2) - \ln(4\pi) + \gamma - \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

$$\tilde{\Pi}_2(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln\left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2}\right)$$

(eq. 60.3)

Primeiro consideremos o caso em que  $q^2 < 0$



neste caso o argumento do logaritmo é positivo e  $\hat{\Pi}_2(q^2)$  é real e analítica em  $q^2$  o que está de acordo com o que assumimos na pg 53.



No caso em que  $q^2 > 0$  (canais s) a função é analítica até  $q^2 = 4m^2$ , e depois disso desenvolve um corte de ramificação (a partir deste ponto é possível produzir um par elétron-pósitron)

Vejamos como isto afeta o potencial elétrico entre cargas opostas (no limite não relativístico):

$$V(\vec{x}) = -\frac{e_0^2}{4\pi|\vec{x}|} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{-e_0^2}{|\vec{q}|^2} \rightarrow \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{-e^2}{|\vec{q}|^2 [1 - \hat{\Pi}_2(-|\vec{q}|^2)]}$$

$|\vec{q}|^2 \ll m^2$  → massa do elétron



$$\hat{\Pi}_2(-|\vec{q}|^2) \approx -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[ -\frac{x(1-x)|\vec{q}|^2}{m^2} + O\left(\frac{|\vec{q}|^2}{m^2}\right) \right] = -\frac{2\alpha}{\pi} \left( -\frac{|\vec{q}|^2}{30m^2} \right)$$

$$V(\vec{x}) = -e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{q}|^2 \left[ 1 - \frac{\alpha|\vec{q}|^2}{15\pi m^2} \right]} \approx -e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{q}|^2} \left[ 1 + \frac{\alpha|\vec{q}|^2}{15\pi m^2} \right]$$

$$= -e^2 \left[ \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} + \frac{\alpha}{15\pi m^2} \int d^3(\vec{x}^0) \right] = -\frac{\alpha}{|\vec{x}|} - \frac{4\alpha^2}{15m^2} \int d^3(\vec{x}^0)$$

O potencial muda para pequenas distâncias 4

Isto muda os níveis de energia do átomo de hidrogênio: