

$$\Delta E = \int d^3x |\psi(\vec{x})|^2 \left(-\frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^3(\vec{x}) \right) = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} |\psi(0)|^2$$

só estados de onda s tem $\psi(0) \neq 0$

$$\Delta E_{2s} = -1,123 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$$

A função delta no potencial é fruto de uma aproximação um pouco grosseira (quando expandimos em $|\vec{q}|^2/m^2$, podemos fazer melhor escrevendo:

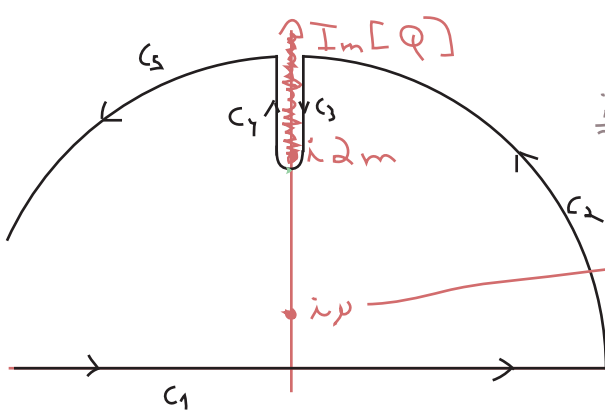
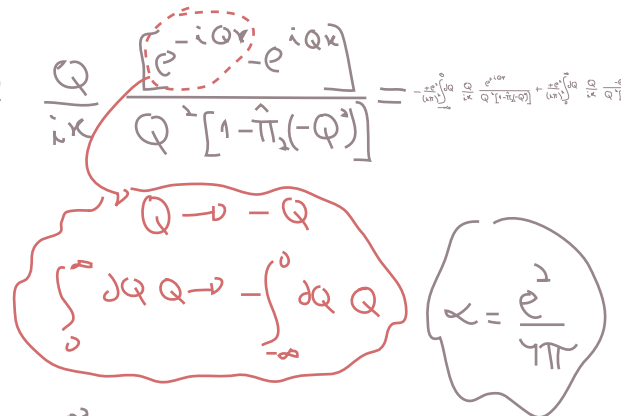
$$|\vec{q}| \equiv Q$$

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-e^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} = \frac{-e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dQ \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) Q^2 \frac{e^{iQx \cos\theta}}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} =$$

$$= \frac{+e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dQ \int_1^{-1} d(\cos(\theta)) Q^2 \frac{e^{iQx \cos\theta}}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} = \frac{+e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dQ \frac{Q}{i\kappa} \frac{[e^{-iQx} - e^{iQx}]}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} =$$

$$= \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \int_0^\infty dQ \frac{Q e^{iQx}}{Q^2 + \mu^2} [1 + \hat{\pi}_2(-Q^2)]$$

inserido para regularizar o polo em $Q^2=0$



$$\frac{i\alpha}{\pi\kappa} \oint = \frac{i\alpha}{\pi\kappa} 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow 0} [1 + \hat{\pi}_2(-iN)] = -\frac{\alpha}{\kappa}$$

contribui para a integral dando o potencial $-\frac{\alpha}{\kappa}$

$$\oint = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3+C_4} \Rightarrow \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \int_{C_1} = -\frac{\alpha}{\kappa} - \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \int_{C_3+C_4}$$

$\hat{\pi}_2(Q^2)$ tem um Branch Cut para $\begin{cases} -Q^2 > 4m^2 & \text{Im}[Q] > 2m \\ Q^2 \in \mathbb{R} & \text{Re}[Q] = 0 \end{cases}$

As integrais perto do corte (curvas C_3 e C_4) nos dão a correção do potencial:

$$\int_{C_3+C_4} = \int_{i2m+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dQ F(Q) + \int_{i\infty-\epsilon}^{i2m-\epsilon} dQ F(Q) = -\int_{i2m}^{i\infty} dQ F(Q+\epsilon) + \int_{i2m}^{i\infty} dQ F(Q-\epsilon) = 2i \text{Im} \left[\int_{i2m}^{i\infty} dQ F(Q-\epsilon) \right]$$

$$F(Q) = \frac{Q e^{iQx}}{Q^2 + \mu^2} [1 + \hat{\pi}_2(-Q^2)]$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Re}[F(Q+\epsilon)] &= \text{Re}[F(Q-\epsilon)] \\ \text{Im}[F(Q+\epsilon)] &= -\text{Im}[F(Q-\epsilon)] \end{aligned} \right\}$$

$$SV(x) = \frac{2\alpha}{\pi\kappa} \text{Im} \left[\int_{i2m}^{i\infty} \frac{Q e^{iQx}}{Q^2 + \mu^2} \left[1 + \hat{\Pi}_2(-(\mathcal{Q}-\epsilon)^2) \right] \right] =$$

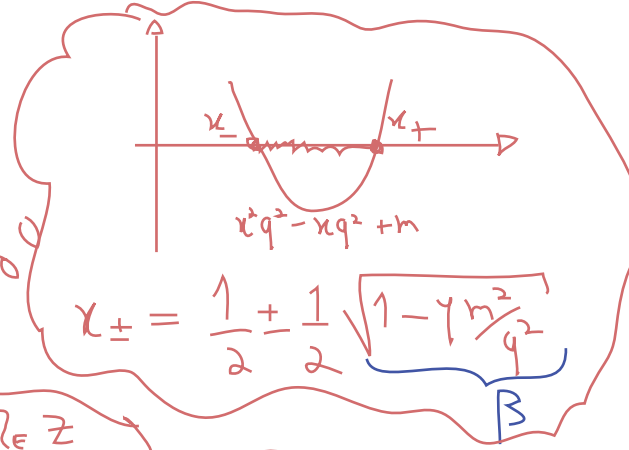
$Q - \epsilon \sim Q$ $q \equiv -iQ$

$$= \frac{2\alpha}{\pi\kappa} \text{Im} \left[\int_{2m}^{\infty} \frac{dq}{q} e^{-qx} \left[1 + \hat{\Pi}_2(-(\lambda q - \epsilon)^2) \right] \right] = \frac{2\alpha}{\pi\kappa} \int_{2m}^{\infty} \frac{e^{-qx}}{q} \text{Im} \left[\hat{\Pi}_2(q^2 + \lambda\epsilon) \right]$$

Vamos obter a parte imaginária desta função para $q^2 > 4m^2$ partindo de 60.3:

$$\int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right)$$

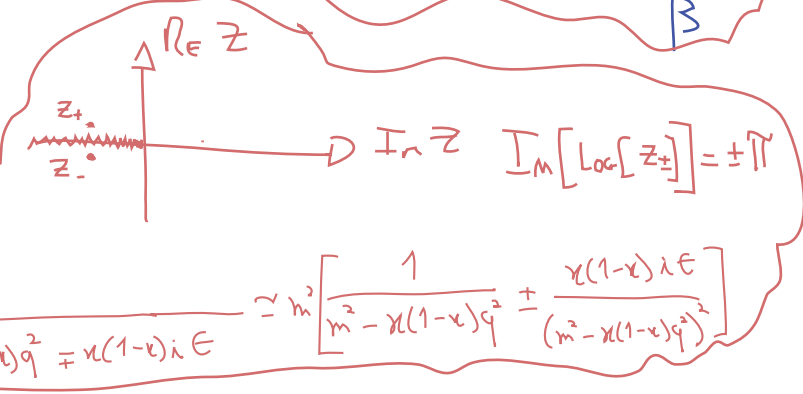
$\rho(x, q^2)$



$$\text{Im}[\rho(x, q^2)] \neq 0 \iff m^2 - x(1-x)q^2 < 0$$

$x_- < x < x_+$

$\sqrt{1 - 4m^2/q^2} \in \mathbb{R} \quad (\forall q^2 > 4m^2)$



$$z_{\pm} = \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2 \pm x(1-x)\lambda\epsilon} \approx m^2 \left[\frac{1}{m^2 - x(1-x)q^2} \pm \frac{x(1-x)\lambda\epsilon}{(m^2 - x(1-x)q^2)^2} \right]$$

$$\text{Im} \left[\hat{\Pi}_2(q^2 + i\epsilon) \right] = -\frac{2\alpha}{\pi} (-\pi) \int_{x_-}^{x_+} dx (1-x)x =$$

$y \equiv x - \frac{1}{2}$

$$= +2\alpha \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dy \left(\frac{1}{4} - y^2 \right) = +\frac{2\alpha}{3} \sqrt{1 - 4m^2/q^2} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2} \right)$$

$$SV(x) = \frac{-2\alpha}{\pi\kappa} \int_{2m}^{\infty} \frac{e^{-qx}}{q} \frac{2\alpha}{3} \sqrt{1 - 4m^2/q^2} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2} \right)$$

Estudemos isto em duas regiões:

(I) $x \gg 1/m \implies$ Neste caso a exponencial e^{-qx} suprime fortemente o integrando e a principal contribuição vem do limite inferior. Neste caso: $q \approx 2m$

$$\delta V(x) = \frac{-2\alpha}{\pi x} \int_0^\infty dt \frac{e^{-(t+2m)x}}{(t+2m)} \approx \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t}{t+4m}} \frac{(t+2m)^2 + 2m^2}{(t+2m)^2}$$

$t = q - 2m$

$$\approx \frac{-2\alpha}{\pi x} \int_0^\infty dt \frac{e^{-(t+2m)x}}{2m} \approx \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t}{4m}} \frac{1}{2} + \mathcal{O}(t)$$

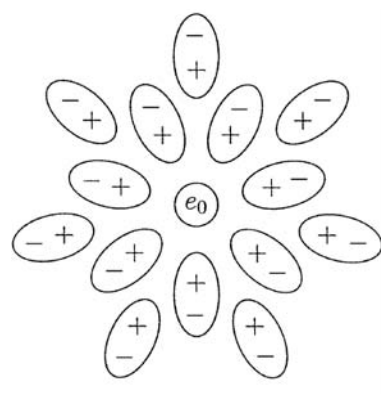
$$x \gg \frac{1}{m} \rightarrow \delta V(x) \approx -\frac{\alpha}{x} \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mx}}{(mx)^{3/2}} \quad (\text{eq. 64.1})$$

$$V(x) = -\frac{\alpha}{x} \left(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mx}}{(mx)^{3/2}} + \dots \right)$$

Potencial de Uehling

O importante é notar que a correção é suprimida exponencialmente para grandes distâncias e a escala é dada pelo comprimento de onda Compton do elétron (de fato $1/2m$). A interpretação é de que a distâncias menores que $1/2m$ temos uma densidade considerável de pares virtuais elétron-pósitron, isto funciona como um dielétrico que esconde parte da carga.

Polarização do Vácuo:



Vejamos o que acontece quando vamos para o limite oposto:

$$\textcircled{\text{II}} \quad -q^2 \gg m^2 \Rightarrow \frac{1}{\Pi_2(q^2)} \approx -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right)$$

(eq. 60.3)

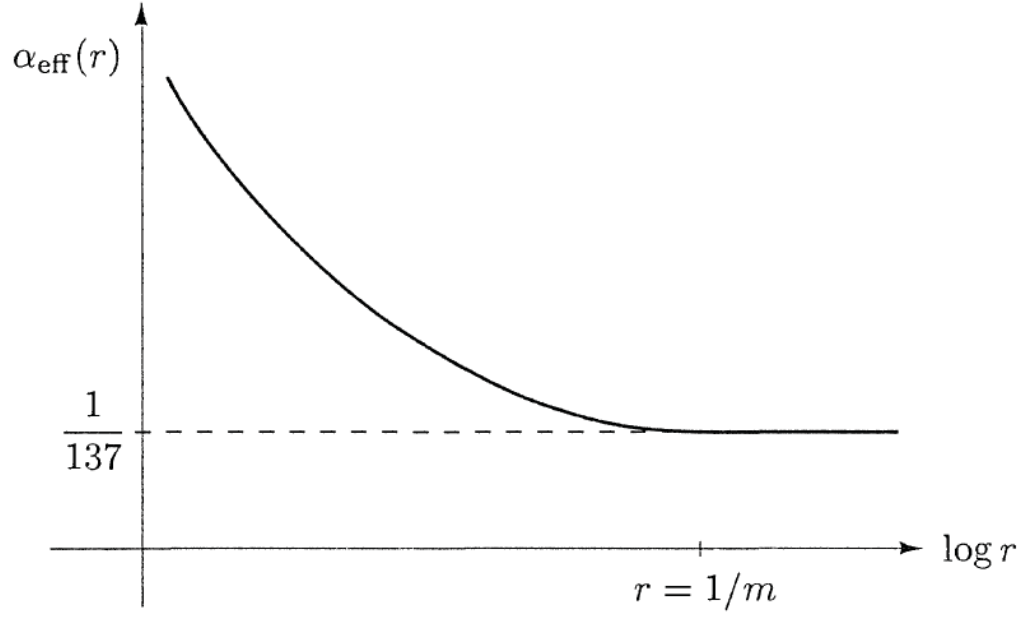
$+ \ln(m^2) - \ln(x(1-x)) - \ln(-q^2)$

$$\approx \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left\{ \ln \left[\frac{-q^2}{m^2} \right] + \ln(x(1-x)) \right\} = \frac{\alpha}{3\pi} \left[\ln \left[\frac{-q^2}{m^2} \right] - \frac{5}{3} + \mathcal{O} \left(\frac{m^2}{q^2} \right) \right]$$

O que na constante de acoplamento nos dá (eq. 56.1):

$$\alpha_{\text{EFF}}^2(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left[-\frac{q^2}{m^2} e^{5/3} \right]}$$

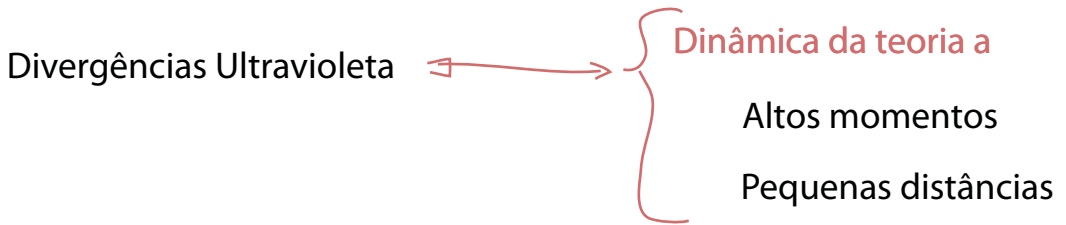
Para espalhamentos muito duros (ou seja, distância de interação pequenas), $-q^2$ fica grande e o acoplamento efetivo aumenta. Podemos fazer uma imagem qualitativa disto fazendo $q = 1/r$ e obtendo o gráfico abaixo:



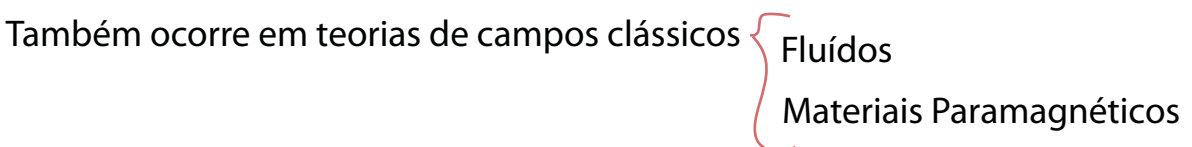
Renormalização

(Peskin 10.1)

Vimos alguns cancelamentos de divergências no caso da QED, mas por enquanto pode parecer complicado descobrir quais diagramas temos que considerar para que estes cancelamentos ocorram. Além disso a presença de divergências põe em dúvida a validade da série perturbativa. Veremos agora como é possível modificar a teoria para escrevê-la em termos de grandezas físicas finitas desde o princípio de forma que tenhamos uma teoria que possa ser expandida perturbativamente. Começamos pensando um pouco sobre estas divergências.



deve existir um cut-off a partir do qual preciso de uma descrição mais fundamental



Posso estudar ondas sonoras (ou de spin) e fluxos

↳ Esperamos que esta descrição falhe quando chegamos a tamanhos e velocidades típicos dos átomos. Ou seja, quando a descrição contínua falha.