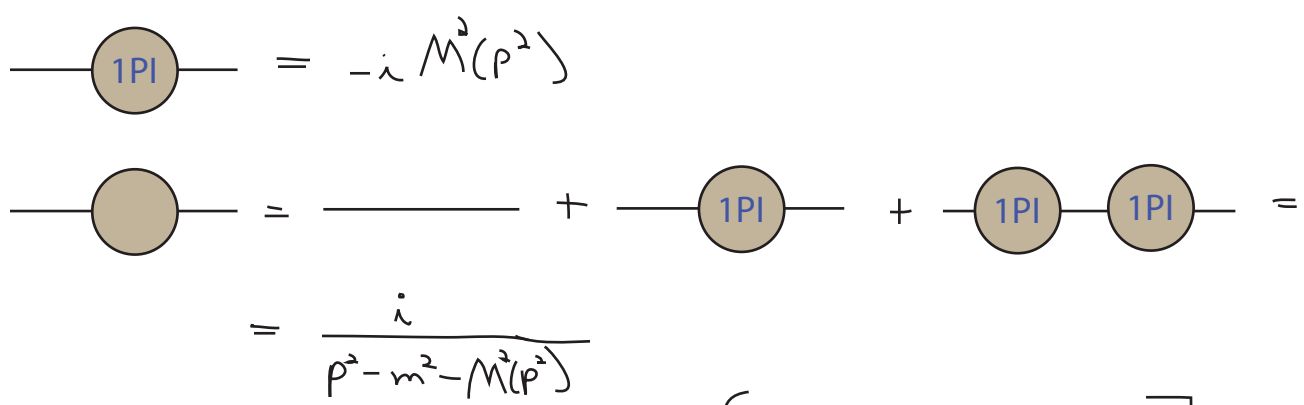


$$= \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left(\frac{6}{\epsilon} - 3\delta + 3L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)4m^2] - 2L_N[m^2] \right)$$

Juntando este resultado ao de 77.1, temos

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left\{ \left(\frac{2}{\epsilon} - \delta + L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)S] \right) + \left(\frac{2}{\epsilon} - \delta + L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)u] \right) \right. \\ &+ \left. \left(\frac{2}{\epsilon} - \delta + L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)t] \right) \right\} - i\frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left(\frac{6}{\epsilon} - 3\delta + 3L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)4m^2] - 2L_N[m^2] \right) \\ &= -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left\{ L_N\left(\frac{m^2 - \gamma(1-\gamma)S}{m^2 - \gamma(1-\gamma)4m^2}\right) + L_N\left(\frac{m^2 - \gamma(1-\gamma)u}{m^2}\right) + L_N\left(\frac{m^2 - \gamma(1-\gamma)t}{m^2}\right) \right\} \end{aligned}$$

δ_z e δ_m vêm da função de dois pontos:



A condição de normalização é (76.1):

$$\left[\text{Loop Diagram} = \frac{i}{p^2 - m^2} \right]_{p^2 \approx m^2}$$

portanto:

$$\boxed{M^2(p^2) \Big|_{p^2=m^2} = 0} \quad (\text{eq. 78.1})$$

e também (expandindo o propagador em torno do polo):

$$p^2 - m^2 - M^2(p^2) = -M^2(p^2) \Big|_{p^2=m^2} + \left(1 - \frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right) (p^2 - m^2) + \mathcal{O}(p^2 - m^2)^2$$

(eq. 78.2)

$$\frac{i}{p^2 - m^2 - M^2(p^2)} = \frac{i \left(1 - \frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right)^{-1}}{p^2 - m^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} = 0}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{1PI} \end{array} = \text{---} + \text{---} \triangle \text{---} + \underbrace{\text{---} \otimes \text{---}}_{\lambda(p^2 \delta z - \delta m)} + \dots$$

$$\begin{aligned}
 \text{---} \triangle \text{---} &\sim \Lambda^2 \\
 &= \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 - m^2} = \lim_{d \rightarrow 4} \left(-\frac{i\lambda}{2} \right) \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1 - \frac{d}{2}}} = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{i\lambda}{2} \right) \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{-\frac{d}{2}}{\epsilon} - m^2 L_N(4\pi) - m^2 L_N\left(\frac{1}{m^2}\right) + m^2 \gamma - m^2 \right]
 \end{aligned}$$

► O mesmo tipo de polo que obtivemos para a divergência logarítmica na pag 59 (!?!?!). O fato é que em regularização dimensional, não é tão fácil ver a divergência quadrática (ou em geral a potência da divergência). Ela aparece como um polo em $d = 2$.

O fato é que $\Gamma(z)$ tem polos em $z = 0, -1, -2, -3, \dots$ mas estes polos são sempre do tipo

$$\Gamma(a \in -b) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\simeq} \frac{(-1)^{-b}}{a \in b!} + \mathcal{O}(\epsilon^0)$$

$$a \in \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{N}_0$$

(eq. 59.1)

$$\int \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)}$$

$$\hookrightarrow n=1 \Rightarrow \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \rightarrow 1 - \frac{d}{2} \leq 0 \quad d \geq 2$$

$$\int \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q_E^2 + \Delta)} \sim \Lambda^2 \iff \begin{cases} \text{dois polos em } d \leq 4 \Rightarrow d = (2, 4) \\ \rightarrow \epsilon = 4 - d \Rightarrow \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) \simeq -\frac{2}{\epsilon} + \dots \\ \hookrightarrow \epsilon = 2 - d \Rightarrow \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \simeq \frac{2}{\epsilon} + \dots \end{cases}$$

$$\int \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q_E^2 + \Delta)} \sim \Lambda^4 \iff \begin{cases} \text{três polos em } d \leq 6 \Rightarrow d = (2, 4, 6) \\ \hookrightarrow \epsilon = 6 - d \Rightarrow \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 2\right) \simeq \frac{1}{\epsilon} \end{cases}$$

$\hookrightarrow n=2 \Rightarrow \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \rightarrow 2 - \frac{d}{2} \leq 0 \quad d \geq 4$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \sim \text{Log} \Lambda \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{apena um polo em } d \leq 4 \\ \epsilon = 4 - d \Rightarrow \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) \sim \frac{2}{\epsilon} + \dots \end{array} \right.$$

$$-i M^2(p^2) = \left(-\frac{i\lambda}{2} \right) \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1 - 1/2}} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m)$$

como esta parte não depende de p^2 , fica fácil satisfazer ambas as condições (78.1 e 78.2)

basta que:

$$\delta_Z = 0 \quad (\text{eq. 80.1})$$

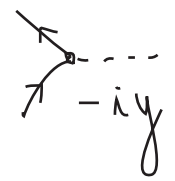
$$\delta_m = -\frac{\lambda}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1 - 1/2}} \quad (\text{eq. 80.2})$$

e teremos: $M^2(p^2) = 0 \quad \forall p^2$

(δ_Z não é zero em ordens superiores de perturbação, veremos isso mais adiante)

Note que a correção para a massa do escalar é quadraticamente divergente!

Esse cancelamento de δ_Z em L.O. é uma peculiaridade de $\lambda\phi^4$, outras teorias escalares não terão esta propriedade. Tomemos, por exemplo, uma teoria escalar com acoplamentos de Yukawa:

$$\mathcal{L}_I = -\gamma \bar{\psi} \psi \phi$$


$$-i M^2(p^2) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} = \Delta = m^2 - \kappa(1-\kappa)p^2$$

$$-\gamma \gamma^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2 - \kappa(1-\kappa)p^2 + m^2}{(\ell^2 + \kappa(1-\kappa)p^2 - m^2)^2} = \frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx (d-1) \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{\Delta^{1 - 1/2}}$$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{\ell_E^2} \sim \int d\ell_E \frac{\ell_E^2}{\ell_E^2} \sim \Lambda^2$$

$$M^{\lambda}(p^2) = \frac{-4g^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx (d-1) \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Delta^{1-d/2}} - (p^2 \delta Z - \delta m)$$

$$\frac{d}{dp^2} M^{\lambda}(p^2) = -\frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left[\underbrace{-x(1-x) \left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma(1-d/2)}_{-\Gamma(2-d/2)} (m_p^2 - x(1-x)p^2)^{d/2-2} \right] - \delta Z$$

$$\left. \frac{d}{dp^2} M^{\lambda}(p^2) \right|_{p^2=m^2} = 0 \Rightarrow \delta Z = -\frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{x(1-x) \Gamma(2-d/2)}{(m_p^2 - x(1-x)m^2)^{2-d/2}} \quad (\text{eq. 81.1})$$

→ ~ L_N(Λ²)

$$M^{\lambda}(m^2) = \frac{-4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1-d/2)}{(m_p^2 - x(1-x)m^2)^{1-d/2}} - (m^2 \delta Z - \delta m)$$

$$M^{\lambda}(m^2) = 0 \Rightarrow \delta m = \frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1-d/2)}{(m_p^2 - x(1-x)m^2)^{1-d/2}} + m^2 \delta Z \quad (\text{eq. 81.2})$$

→ Λ²

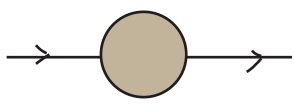
Renormalização da QED

(Peskin 10.3, Ryder 9.5 a 9.7)

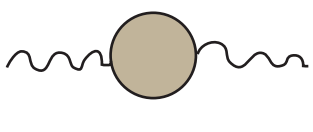
Tentemos agora repetir o processo acima para a QED

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi} (i\not{\partial} - m_0) \Psi - e_0 \bar{\Psi} \not{A} \Psi$$

Vimos que a partir desta lagrangeana obtemos:



$$= \frac{i Z_2}{\not{p} - m} + \dots \quad (\text{pg 5})$$



$$= -\frac{i Z_3 g_{\mu\nu}}{q^2} + \dots \quad (\text{pg 55})$$

Começamos então com a renormalização dos campos:

$$\Psi \equiv Z_2^{1/2} \Psi_R \quad (\text{eq. 82.1})$$

$$A^\mu \equiv Z_3^{1/2} A_{R\mu} \quad (\text{eq. 82.2})$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 (F_{\mu\nu})^2 + Z_2 \bar{\Psi}_R (i\not{\partial} - m_0) \Psi_R - e_0 Z_2 Z_3^{1/2} \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu}$$

A primeira condição de renormalização é a que define a carga física:

$$(e_0 Z_2 Z_3^{1/2} = e Z_1)_{q=0} \quad (\text{eq. 82.3})$$

isto é equivalente a definição de Z_1 que usamos na eq 51.1 já que este é o fator que aparece no vértice (multiplicando a carga) quando $q = 0$. Ademais lembre que:

$$(\text{pg 55}) \Rightarrow Z_3^{1/2} e_0 = e$$

$$(\text{pg 52}) \Rightarrow Z_2 = Z_1$$

de forma que as definições dos Z 's que já vínhamos usando se mantêm.

Fazendo então as definições adicionais:

$$\begin{cases} \delta_3 = Z_3 - 1 \\ \delta_2 = Z_2 - 1 \\ \delta_m = Z_2 m_0 - m \\ \delta_1 = Z_1 - 1 = \frac{e_0}{e} Z_2 Z_3^{1/2} - 1 \end{cases}$$

(eq. 82.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} \underbrace{Z_3}_{1+\delta_3} (F_{\mu\nu})^2 + \underbrace{Z_2}_{1+\delta_2} \bar{\Psi}_R (i\not{\partial} - \underbrace{m_0}_{Z_2 m_0 = m + \delta_m}) \Psi_R - \underbrace{e_0 Z_2 Z_3^{1/2}}_{e Z_1 = e(1+\delta_1)} \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu} = \\ &= -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi}_R (i\not{\partial} - m) \Psi_R - e \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu} + \\ &\quad -\frac{1}{4} \delta_3 (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi}_R (i\delta_2 \not{\partial} - \delta_m) \Psi_R - \delta_1 e \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu} \end{aligned}$$

cujas regras de Feynman são:

$$\begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \xrightarrow{q} \end{array} = \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{solid line} \\ \xrightarrow{q} \end{array} = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$$

$$\text{Diagram} = -ie\gamma^\mu$$

$$\text{Diagram} = i(\not{p}\delta_2 - \delta_1 m)$$

$$\text{Diagram} = -i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\delta_3$$

$$\text{Diagram} = -ie\gamma^\mu\delta_4$$

$$\int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} A_\mu (-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu \right]$$

As condições que fixam as normalizações dos propagadores e definem a carga e a massa do férmion podem ser escritas usando as definições que fizemos anteriormente:

$$\text{Diagram} = i\Pi^{\mu\nu}(q) = i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2)$$

$$\text{Diagram} = -i\Sigma(\not{p})$$

$$\text{Diagram} = -ie\Gamma^\mu(p,p)$$

Só que agora estou REDEFININDO estas grandezas, todas incluem agora as contribuições que vem dos contratermos
 A definição de Γ agora é feita com a carga física

Como discutido na página 71, temos quatro grandezas divergentes na QED, isto levou aos quatro δ 's nos contratermos, as quatro condições que usamos para obtê-los são:

(eq. 83.1) $\Sigma(\not{p}=m) = 0$ (a)

$\Pi(q^2=0) = 0$ (b)

$$\frac{d}{d\not{p}} \Sigma(\not{p}) \Big|_{\not{p}=m} = 0$$
 (c)

$$-ie\Gamma^\mu(p'-p=0) = -ie\gamma^\mu$$
 (d)

Vejamos a aplicação destas condições e o valor dos contratermos em um loop. Já obtivemos a expressão para a auto-energia do elétron usando regularização de Pauli-Villars (eq. 45.1), se tivéssemos feito regularização dimensional, chegaríamos a:

antes da inclusão dos contratermos

$$-i \sum_2^* (\rho) = -i \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\rho^2]^{2-d/2}} \times$$

$$\times [dm - (d-2)x\rho]$$

Levando em conta a contribuição do contratermo ($\rightarrow \otimes \rightarrow$) e usando a condição 83.1(a), temos:

$$(m \delta_2 - \delta m) = \frac{e^2 m}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2}) (d - (d-2)x)}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)m^2]^{2-d/2}} =$$

$$= \frac{e^2 m}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2}) [(1-x)d + 2x]}{[(1-x)^2 m^2 + x\mu^2]^{2-d/2}} \quad (\text{eq. 84.1})$$

Para utilizar a condição 83.1(c) precisamos calcular:

$$\frac{d}{d\rho} \sum_2^* (\rho) = \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\rho^2]^{2-d/2}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{-2x(1-x)\rho \left(\frac{d}{2} - 2\right)}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\rho^2]} [dm - (d-2)x\rho] - (d-2)x \right\}$$

$\epsilon = d - 4$

$$\frac{d}{d\rho} \sum_2^* (\rho) \Big|_{\rho=m} = \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{4-\epsilon}{2}}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]^{2-d/2}} \left\{ - (2-\epsilon)x + \right.$$

$$\left. + \frac{\epsilon}{2} \frac{2x(1-x)m}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]} m [4 - 2x + \epsilon(x-1)] \right\}$$

* a divergência vem toda desta parte, todo o resto é proporcional a ϵ e dá uma contribuição finita quando multiplicado por $1/\epsilon$ que vem da função Γ .

Levando em conta a contribuição do contratermo $(\rightarrow \otimes \rightarrow)$ e usando a condição 83.1(c), temos:

$$\delta_2 = \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{d-4}{2}}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]^{2-\frac{d}{2}}} \left\{ (2-\epsilon)x - \epsilon \frac{x(1-x)m^2}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]} \left[4 - 2x + \epsilon(x-1) \right] \right\} \quad (\text{eq. 85.1})$$

Incluindo $(\nu \rightsquigarrow \otimes \nu)$ na contribuição à auto-energia do fóton que calculamos em 60.2 e usando 83.1(b) temos:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = (q^\mu q^\nu - q^\nu q^\mu) i\Pi_2^*(q^2) - i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\delta_3 = i(q^\mu q^\nu - q^\nu q^\mu) (\Pi_2^* - \delta_3)$$

antes da inclusão dos contratermos

$$\Pi_2(q^2) = \Pi_2^*(q^2) - \delta_3 \xrightarrow{83.1(b)} \delta_3 = \Pi_2^*(0) \quad 60.2$$

$$\delta_3 = -\frac{8e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx \left[x(1-x) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{[m^2]^{2-\frac{d}{2}}} \right] \quad (\text{eq. 85.2})$$

Para o vértice da QED, temos agora:

$$-ie\Gamma^\mu = -ie\Gamma^{*\mu} - ie\gamma^\mu\delta_1$$

antes da inclusão dos contratermos (mas sem Z_2 na LSZ!)

A condição 83.1(d) nos dá: $(1-\delta_1)\Gamma^\mu = \Gamma^{*\mu} (p'=p=0)$ (pg 27)

$$\delta_1 = -\delta F_1(0) \quad \rightarrow \quad F_1 = 1 + \delta F_1(0)$$

$\gamma^\mu F_1(0) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu F_2(q^2)}{2m} \xrightarrow{q=0} \gamma^\mu F_1(0)$

Como estamos fazendo tudo em regularização dimensional, precisamos escrever o resultado obtido em 36.2 nesse método, obtemos:

$$\delta F_1(q^2) = \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \frac{(2-\epsilon)^2}{2} + \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Delta^{3-\frac{d}{2}}} \left[q^2 [2(1-x)(1-y) - \epsilon xy] + m^2 [2(1-y+z)^2 - \epsilon(1-z)^2] \right] \right\}$$

Onde: $\Delta = (1-\beta)^2 m^2 + z \nu^2 - \kappa \gamma \eta^2$

$$\delta_1 = -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{[(1-\beta)^2 m^2 + z \nu^2]^{2-d/2}} \frac{(2-\epsilon)^2}{2} \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{[(1-\beta)^2 m^2 + z \nu^2]^{3-d/2}} m^2 [2(1-\gamma+\beta^2) - \epsilon(1-z)^2] \right\} \\ \int dz (1-z)$$

(eq. 86.1)

As equações 84.1, 85.1, 85.2 e 86.1 fixam todos os coeficientes dos contratermos em ordem α .

É possível mostrar (via integração por partes) que $\delta_1 = \delta_2$ e que, portanto, $z_1 = z_2$ (em ordem α). Podemos provar que isto continua valendo para qualquer ordem α (o que não faremos aqui). Como um comentário final note o que aconteceria se pensarmos não apenas no elétron, mas também no muon, interagindo via QED. A equação 82.3 nos diz que:

elétron - $e = e_0 \frac{z_2 z_3^{1/2}}{z_1}$

muon - $e' = e_0 \frac{z_2' z_3^{1/2}}{z_1'}$

auto-energia do muon e correção do vértice, ambas dependem da massa do muon

Corremos o risco do muon sentir uma carga física diferente da do elétron, mesmo que comecemos com a mesma carga nua. No entanto como $Z_1 = Z_2$ eles se cancelam, e temos:

$$e = e' = e_0 z_3^{1/2}$$

As identidades de WT (ou seja, a simetria de Gauge) garantem que a correção à carga venham somente do fóton, independente de qual partícula esta interagindo. Isto garante que o acoplamento de gauge da teoria continue universal, e que todas as partículas sintam o mesmo "running" deste acoplamento.

Renormalização em ordem superior

(Peskin 10.4, Ryder 9.7)

Vejamos agora as sutilezas que aparecem quando consideramos diagramas com mais de um loop. Vimos que a divergência superficial de um diagrama pode nos enganar quando ele contém subdiagramas divergentes. No caso em que o diagrama que queremos calcular é convergente caso remo-