

Onde:  $\Delta = (1 - \beta^2)^{-1/2} m^2 + z \nu^2 - \kappa \gamma \eta^2$

$$\delta_1 = -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{[(1-\beta^2)^{-1/2} m^2 + z \nu^2]^{2-d/2}} \frac{(2-\epsilon)^2}{2} \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma(3 - \frac{d}{2})}{[(1-\beta^2)^{-1/2} m^2 + z \nu^2]^{3-d/2}} m^2 [2(1-\gamma + \beta^2) - \epsilon(1-z)^2] \right\}$$

$\int dz (1-z)$

(eq. 86.1)

As equações 84.1, 85.1, 85.2 e 86.1 fixam todos os coeficientes dos contratermos em ordem  $\alpha$ .

É possível mostrar (via integração por partes) que  $\delta_1 = \delta_2$  e que, portanto,  $z_1 = z_2$  (em ordem  $\alpha$ ). Podemos provar que isto continua valendo para qualquer ordem  $\alpha$  (o que não faremos aqui). Como um comentário final note o que aconteceria se pensarmos não apenas no elétron, mas também no muon, interagindo via QED. A equação 82.3 nos diz que:

elétron -  $e = e_0 \frac{z_2 z_3^{1/2}}{z_1}$

muon -  $e' = e_0 \frac{z_2' z_3'^{1/2}}{z_1'}$

auto-energia do muon e correção do vértice, ambas dependem da massa do muon

Corremos o risco do muon sentir uma carga física diferente da do elétron, mesmo que comecemos com a mesma carga nua. No entanto como  $Z_1 = Z_2$  eles se cancelam, e temos:

$$e = e' = e_0 z_3^{1/2}$$

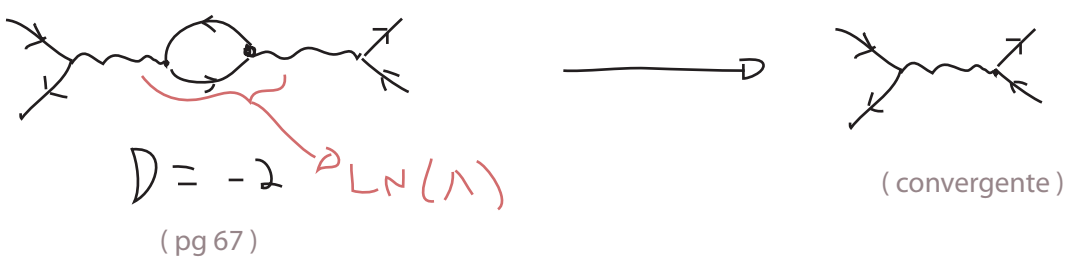
As identidades de WT (ou seja, a simetria de Gauge) garantem que a correção à carga venham somente do fóton, independente de qual partícula esta interagindo. Isto garante que o acoplamento de gauge da teoria continue universal, e que todas as partículas sintam o mesmo "running" deste acoplamento.

## Renormalização em ordem superior

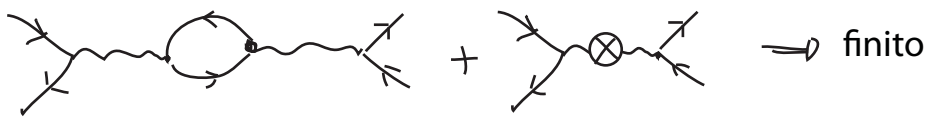
(Peskin 10.4, Ryder 9.7)

Vejamos agora as sutilezas que aparecem quando consideramos diagramas com mais de um loop. Vimos que a divergência superficial de um diagrama pode nos enganar quando ele contém subdiagramas divergentes. No caso em que o diagrama que queremos calcular é convergente caso remo-

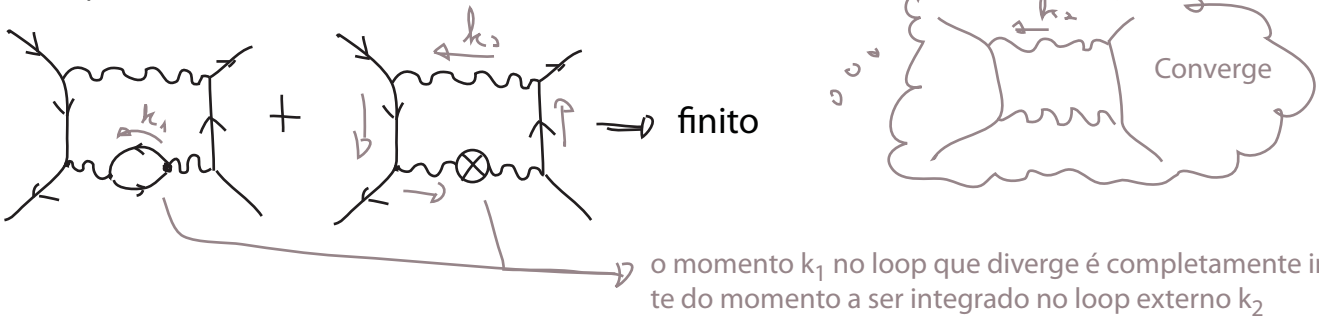
vamos o sub-diagrama divergente, fica relativamente simples:



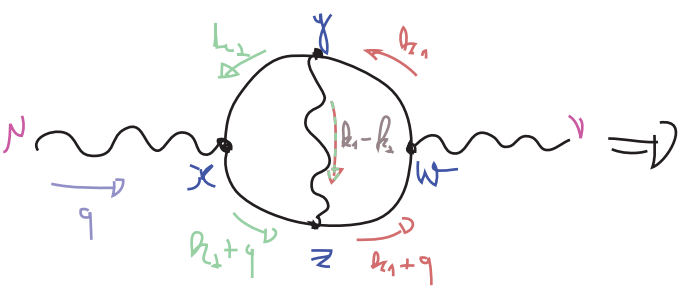
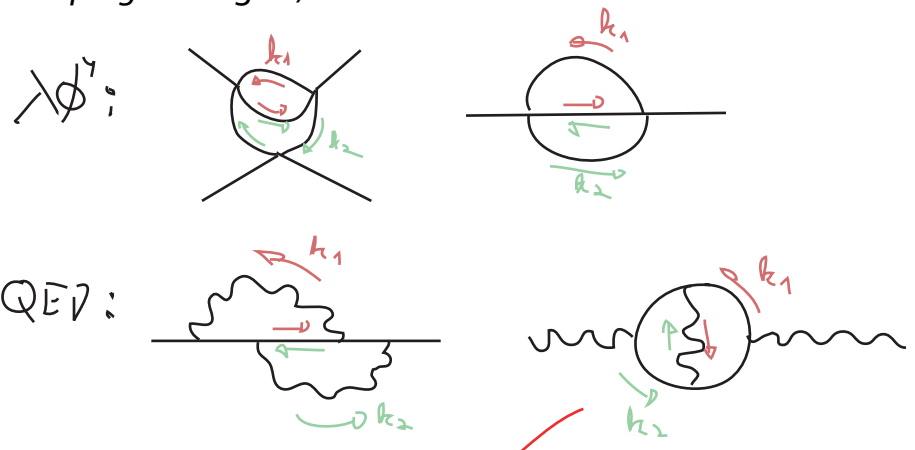
neste caso a divergência é cancelada pelo mesmo contratermo que cancelou a divergência do sub-diagrama:



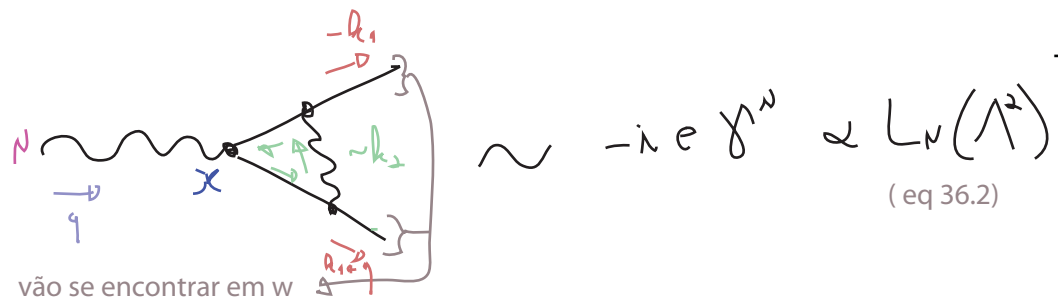
O mesmo vale para diagramas mais complicados. No exemplo abaixo basta somar os dois diagramas para cancelar a divergência na auto energia do fóton antes de fazer a integral no loop mais externo (que é finita)



A situação começa a ficar complicada quando temos diagramas em que dois loops divergentes compartilham um mesmo propagador, chamamos isto de **divergências sobrepostas** (*nested* ou *overlapping* em inglês)



Pensemos primeiro na região em que  $k_2$  é grande. Neste caso  $x, y$  e  $z$  tem que estar próximos (tanto o fóton quanto os elétrons no loop são muito virtuais) mas  $w$  pode ser mais distante. Podemos pensar nisso como uma correção de um fóton ao vértice em  $x$ :



Se voltamos com este vértice no diagrama completo antes de integrar em  $k_1$ , obteremos:

$$\text{Diagram} \sim \alpha (\gamma^\mu \not{q}^2 - \not{q}^\mu \not{q}^\nu) \Pi_2(q^2) \cdot \alpha L_N(\Lambda^2)$$

(pg 60)

$$\Pi_2(q^2) \sim \int_0^1 dx \, x(1-x) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \Delta^{\frac{d}{2}-2} \sim L_N(\Lambda^2) + L_N(\Delta) + \dots$$

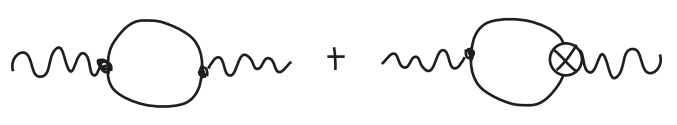
$m^2 - x(1-x)q^2$

$$\text{Diagram} \sim \alpha^2 (L_N(\Lambda^2) + \frac{L_N(q^2)}{\dots}) L_N(\Lambda^2)$$

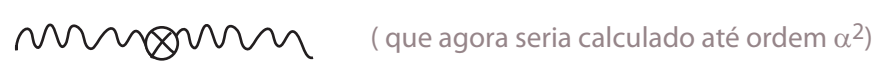
domina quando  $k_1$  ou  $k_2$  é pequeno  
domina quando  $k_1$  também é grande

Estes termos proporcionais a  $L_N(q^2) L_N(\Lambda^2)$  vão contra nossa expectativa de que as divergências aparecem multiplicando simples polinômios em  $q^2$  (pense no que fizemos na pag 70). Chamamos as divergências que de fato multiplicam polinômios em  $q^2$  de **divergências locais**, essas divergências que não multiplicam polinômios são chamadas de **divergências não locais**.  
 pois no espaço das posições são funções delta (ou derivadas da delta)

A aproximação acima indica que, na região em que um dos momentos é pequeno e o outro grande, o que temos é uma divergência local dentro de um loop não divergente. Isso sugere que os diagramas necessários para corrigir a divergência são:



De fato, se fizéssemos a conta veríamos que estes cancelam a divergência não local. Uma vez somados, resta apenas uma divergência local que é cancelada como de costume, pelo diagrama



É possível mostrar que isso funciona a todas as ordens de perturbação, contanto que a teoria seja renormalizável pelo critério da divergência superficial. Isto quer dizer que uma vez que colocarmos os contratermos necessários para cancelar as divergências locais, todas as divergências (locais ou não) são removidas a todas as ordens - este resultado é conhecido como teorema BPHZ (Bogoliubov - Parasiuk - Hepp - Zimmermann)

## O Grupo de Renormalização

(Peskin 8 &amp; 12.1, Ryder 9.4)

Vimos que, fazendo a renormalização de uma teoria, podemos obter resultados que independem da dinâmica no ultravioleta. As divergências somem e conseguimos uma teoria que funciona. No entanto é um tanto misterioso como as excitações de maior energia da teoria podem ter tão pouco efeito. Vamos então tentar ter uma imagem mais clara de como isso pode ocorrer.

Começemos pensando no funcional gerador de  $\lambda\phi^4$

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int [\mathcal{L} + \mathcal{J}\phi]} = \left( \prod_k \int d\phi(k) \right) e^{i \int [\mathcal{L} + \mathcal{J}\phi]}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{V} \sum_k e^{-i k x} \phi(k)$$

unitária

$$\mathcal{D}\phi(x) = \prod_k d\phi(k)$$

fazer uma regularização por cut-off significa integrar somente sobre:  $\phi(k) / |k| \leq \Lambda$   
 $k > \Lambda \rightarrow \phi(k) = 0$

pensando desta forma podemos estudar especificamente o efeito dos momentos da ordem do cut-off: basta integrar só sobre eles. Para evitar valores de  $k$  que, apesar de pequenos, tem valores enormes de  $k_0$  e  $\vec{k}$ , trabalharemos no espaço Euclideano.

$$|k_E| \leq \Lambda$$

Além disso, a teoria de campo no espaço Euclideano nos leva para perto de sistemas atômicos, onde podemos ter mais intuição do que significa o cut-off ultravioleta e a renormalização. Um bom exemplo de um sistema de mecânica estatística que é bem descrito por um campo escalar é um ferromagneto na teoria de Landau. A energia livre de Gibbs deste sistema é:

$$G = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\nabla s)^2 + b(T - T_c) s^2 + c s^4 - H s \right]$$

E a densidade de spin  $s(x)$  faz o papel do campo escalar, ao passo que o campo externo  $H$  é a fonte. Nesse caso é bastante óbvio que existe um cut-off físico, não faz sentido falar em flutuações da densidade de spin em distâncias menores que o espaçamento entre os átomos que compõe o material.

Pensemos um pouco sobre este sistema em termos de temperatura: se estamos longe de qualquer ponto crítico, é de se esperar que hajam flutuações de spin na escala atômica. No entanto assim que nos afastamos para escalas maiores, da ordem de algumas dezenas de distâncias atômicas, o sistema já deve parecer uniforme e nenhuma flutuação é visível. Podemos descrever este comportamento usando teoria de campos. Mas primeiro vamos lembrar um pouco da física por trás do problema

Estamos imaginando, por simplicidade, que se trata de um material com um eixo preferencial de magnetização

$T \sim 0$   
 $H = 0$  }  $\rightarrow$  Magnetização  $M$  paralela ou antiparalela a este eixo

$$M = \int d^3x S(x)$$

tanto o campo como os spins são definidos na direção deste eixo

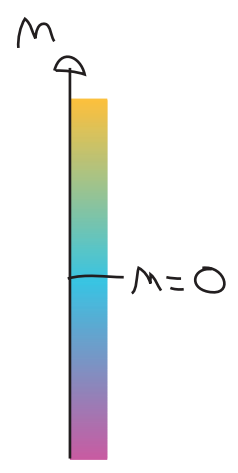
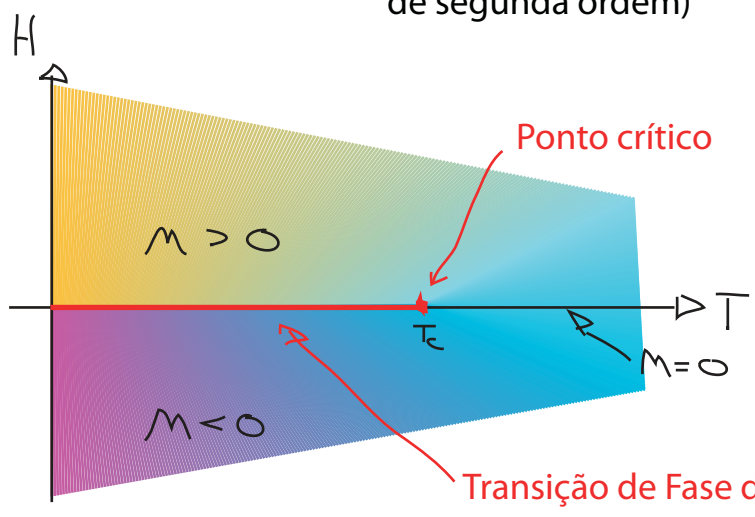
$T \sim 0$   
 $H \neq 0$  }  $\rightarrow$  Favorece  $M$  paralelo ou antiparalelo

Mudança de  $H$  pequeno e negativo para pequeno e positivo }  $\rightarrow$  Mudança descontínua em  $M$   
 $T \sim 0$  } **Transição de fase de primeira ordem**

$T_c > T > 0 \rightarrow$  Spins cada vez mais desordenados  $|M|$  vai diminuindo

$T = T_c$   
 $H = 0$  }  $\rightarrow M = 0$

$\hookrightarrow$  Valores grandes de  $H$  ainda induzem magnetização, mas a descontinuidade perto de  $H = 0$  desaparece. Este é o ponto crítico (ou transição de fase de segunda ordem)



Ao longo da linha da transição de fase os dois estados ( $M > 0$  e  $M < 0$ ) coexistem em equilíbrio. A energia livre de Gibbs só depende de  $M$  e  $T$  e é dada por:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial M} \right|_T = H$$

Perto do ponto crítico  $M$  é pequeno e podemos expandir  $G(M)$  como:

$$G(M) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4$$

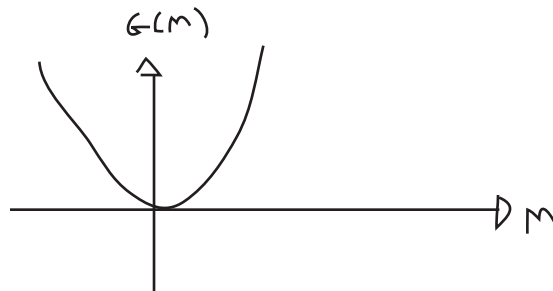
o sistema é simétrico por mudança no sinal de  $M$ , então  $G(M)$  tem que ser par

Para encontrar o estado do sistema em  $H = 0$ , devemos minimizar  $G$ :

$$H=0 \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial M} = 2B(T)M + 4C(T)M^3 = 0$$

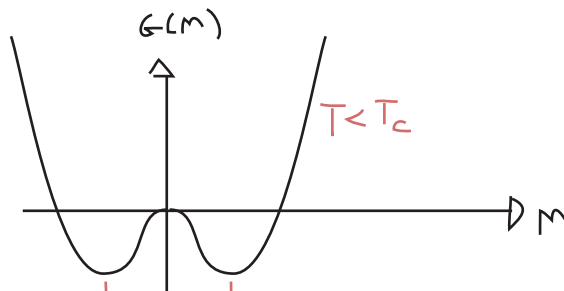
Resta fixar  $B$  e  $C$ , suponha que:

$$B, C > 0 \Rightarrow M = 0$$



No entanto se  $B$  puder ser negativo (digamos, abaixo de uma dada temperatura) então temos uma solução menos trivial:

$$\left. \begin{array}{l} C > 0 \\ B(T < T_c) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$



dois mínimos com magnetizações opostas

Fica claro que podemos modelar o sistema definindo:

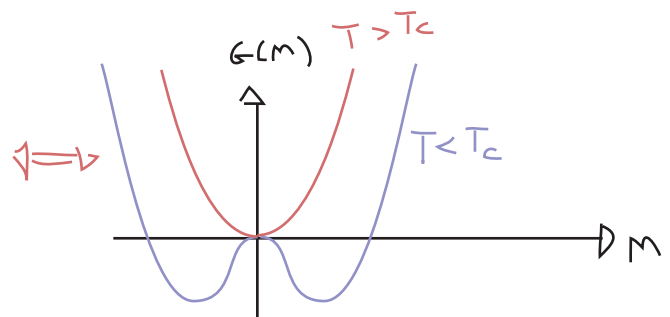
$$B(T) = b_5 (T - T_c) \quad C(T) = c \quad b_5, c > 0$$

Neste caso temos:

$$M = \begin{cases} 0 \\ \pm \left[ \frac{b_5}{2c} (T_c - T) \right]^{1/2} \end{cases}$$

$$T > T_c$$

$$T < T_c$$



Para obter o comportamento para  $H$  não nulo precisamos resolver

$$\frac{\partial G}{\partial M} \Big|_T = H \quad G = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4$$

ou podemos minimizar (em relação a  $M$ ):  $G(M, H) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4 - HM$

Só temos o duplo mínimo para  $H = 0$  e  $T < T_c$ . Substituindo a definição de  $M$ , e as expressões para  $B(T)$  e  $C(T)$  na energia de Gibbs, obtemos a expressão que comparamos com o campo escalar:

$$G = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\nabla s)^2 + b(T - T_c) s^2 + c s^4 - H s \right] \quad H = H(x)$$

este termo adicional inclui a física microscópica, é o jeito mais simples de introduzir a tendência dos spins de se alinhar

Suponha que:  $H(x) = H_0 \delta^{(3)}(x)$  } Vamos ver qual é a resposta em pontos longe de  $x$ . Procurando o mínimo de  $G$  em relação a configurações do campo  $s$  obtemos:

$$0 = \delta G[S(x)] = -\nabla^2 s + 2b(T - T_c)s + 4cs^3 - H$$

$$\left. \begin{array}{l} T > T_c \Rightarrow \chi \neq 0 \\ M \sim 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} S < 1 \\ S^3 \sim 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (-\nabla^2 + 2b(T - T_c)) S(x) = H(x)$$

$$H(x) = H_0 \delta^{(3)}(x) \Rightarrow (-\nabla^2 + 2b(T - T_c)) D(x) = H_0 \delta^{(3)}(x)$$

Função de Green!

Configuração do campo  $s(x)$  que surge quando o spin em  $x = 0$  é forçado a se alinhar com  $H$

$$D(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{H_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{k}|^2 + 2b(T - T_c)} = \frac{H_0}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-r/\xi} = \langle S(x) S(0) \rangle$$

$$\sum_{S(x)} S(x) S(0) e^{-\frac{H}{kT}}$$

comprimento de correlação  $\rightarrow \xi = [2b(T - T_c)]^{-1/2}$

É importante perceber que, apesar do resultado depender dos coeficientes  $b$  e  $c$ , que são dados pela física no UV (física atômica), a lei de potência em  $(T - T_c)$  só depende de podermos expandir  $G$  em série, e da simetria que o torna par. De fato, obteríamos o mesmo resultado para qualquer sistema com esta simetria (existem vários exemplos). O fato de que podemos usar teoria de campos para descrever certas propriedades de sistemas de mecânica estatística perto do ponto crítico **independentemente de detalhes na escala atômica** (a chamada **universalidade**) está intimamente ligado ao fato de podermos construir TQCs **independentes de cut-off**.

Note que o valor de  $s(x)$  estará ligado ao valor em  $x=0$  dependendo de quão longe ele está de  $x=0$ . A escala de "longe" é dada por  $\xi$ , note que este diverge quando chegamos perto da temperatura crítica - o sistema fica fortemente correlacionado. Voltando para nossa analogia com teoria quântica de campos, estamos falando de uma partícula escalar que carregaria a informação da existência da fonte em  $x=0$ , e que a "massa" desta partícula ( $\xi^{-1}$ ) é da ordem de  $[b(T-T_c)]^{-1/2}$ . Se estivermos longe da temperatura crítica  $|T| \gg |T_c|$ , então o único parâmetro que determina a massa é  $B(T)$ , que vem da **escala ultravioleta da teoria**. O tamanho de  $m$  é então fixado pela única escala natural do sistema, portanto esperamos que  $m \sim \Lambda$  (que no exemplo seria o inverso do típico tamanho atômico).

No cálculos que fizemos até agora, estávamos interessados justamente no caso em que  $m \ll \Lambda$ , e ajustamos os parâmetros da teoria para obter esta situação. Com isso em mente, vamos ver como fica a separação de escalas na integral de trajetória.

$$Z = \int [D\phi]_{\Lambda} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\Delta_0}{4!} \phi^4 \right] \right\} \quad (\text{eq. 93.1})$$

$$[D\phi]_{\Lambda} \equiv \prod_{|k| < \Lambda} d\phi(k)$$

$$\phi(k) \begin{cases} \hat{\phi}(k) = \begin{cases} \phi(k) & |k| \leq \Lambda \\ 0 & |k| < \Lambda \text{ ou } |k| \geq \Lambda \end{cases} \\ \phi(k) = \begin{cases} \phi(k) & |k| < \Lambda \\ 0 & |k| \geq \Lambda \end{cases} \end{cases} \quad \Lambda < 1$$

$$\phi(k) \rightarrow \phi(k) + \hat{\phi}(k)$$

$$Z = \int D\phi \int D\hat{\phi} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi + \partial_\mu \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_0^2 (\phi + \hat{\phi})^2 + \frac{\Delta_0}{4!} (\phi + \hat{\phi})^4 \right] \right\} =$$

Todos os termos do tipo  $\phi(k_1) \hat{\phi}(k_2)$  são iguais a zero (ortogonalidade para  $k \neq k'$ )

$$= \int D\phi e^{-\int \mathcal{L}(\phi)} \int D\hat{\phi} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \hat{\phi}^2 + \lambda \left( \frac{1}{6} \phi^3 \hat{\phi} + \frac{1}{4} \phi^2 \hat{\phi}^2 + \frac{1}{6} \phi \hat{\phi}^3 + \frac{1}{4!} \hat{\phi}^4 \right) \right] \right\}$$