

Note que o valor de $s(x)$ estará ligado ao valor em $x=0$ dependendo de quão longe ele está de $x=0$. A escala de "longe" é dada por ξ , note que este diverge quando chegamos perto da temperatura crítica - o sistema fica fortemente correlacionado. Voltando para nossa analogia com teoria quântica de campos, estamos falando de uma partícula escalar que carregaria a informação da existência da fonte em $x=0$, e que a "massa" desta partícula (ξ^{-1}) é da ordem de $[b(T-T_c)]^{-1/2}$. Se estivermos longe da temperatura crítica $|T| \gg |T_c|$, então o único parâmetro que determina a massa é $B(T)$, que vem da **escala ultravioleta da teoria**. O tamanho de m é então fixado pela única escala natural do sistema, portanto esperamos que $m \sim \Lambda$ (que no exemplo seria o inverso do típico tamanho atômico).

No cálculos que fizemos até agora, estávamos interessados justamente no caso em que $m \ll \Lambda$, e ajustamos os parâmetros da teoria para obter esta situação. Com isso em mente, vamos ver como fica a separação de escalas na integral de trajetória.

$$Z = \int [D\phi]_{\Lambda} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\Delta_0}{4!} \phi^4 \right] \right\} \quad (\text{eq. 93.1})$$

$$[D\phi]_{\Lambda} \equiv \prod_{|k| < \Lambda} d\phi(k)$$

$$\phi(k) \begin{cases} \hat{\phi}(k) = \begin{cases} \phi(k) & |k| \leq \Lambda \\ 0 & |k| < \Lambda \text{ ou } |k| \geq \Lambda \end{cases} \\ \phi(k) = \begin{cases} \phi(k) & |k| < \Lambda \\ 0 & |k| \geq \Lambda \end{cases} \end{cases} \quad \Lambda < 1$$

$$\phi(k) \rightarrow \phi(k) + \hat{\phi}(k)$$

$$Z = \int D\phi \int D\hat{\phi} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi + \partial_\mu \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_0^2 (\phi + \hat{\phi})^2 + \frac{\Delta_0}{4!} (\phi + \hat{\phi})^4 \right] \right\} =$$

Todos os termos do tipo $\phi(k_1) \hat{\phi}(k_2)$ são iguais a zero (ortogonalidade para $k \neq k'$)

$$= \int D\phi e^{-\int \mathcal{L}(\phi)} \int D\hat{\phi} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \hat{\phi}^2 + \lambda \left(\frac{1}{6} \phi^3 \hat{\phi} + \frac{1}{4} \phi^2 \hat{\phi}^2 + \frac{1}{6} \phi \hat{\phi}^3 + \frac{1}{4!} \hat{\phi}^4 \right) \right] \right\}$$

Queremos então integrar em $\hat{\phi}$, se tratarmos todos os termos (com exceção do cinético) como interações (incluindo o termo de massa), podemos escrevê-los como derivadas agindo em $\text{Exp}[-\int \mathcal{L}_0(\hat{\phi})]$

Onde:

$$\int \mathcal{L}_0 = \int d^d x \partial_\nu \hat{\phi}(x) \partial^\nu \hat{\phi}(x) = \int d^d k \int_{k-\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_{k-\Lambda \leq |k'| < \Lambda} \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} e^{-i k x} e^{-i k' x} k_\nu k'^\nu \hat{\phi}(k) \hat{\phi}(k') =$$

$$= \int_{k-\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k^2 \underbrace{\hat{\phi}(-k)}_{\hat{\phi}^*(k)} \hat{\phi}(k)$$

condição para que $\phi(x)$ seja real, ver Peskin pg 285

Isso nos leva a um propagador (no espaço dos momentos):

$$\hat{\phi}(k) \hat{\phi}(p) = \frac{\int \mathcal{D}\hat{\phi} \hat{\phi}(k) \hat{\phi}(p) e^{-\int \mathcal{L}_0}}{\int \mathcal{D}\hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_0}} = \frac{1}{k^2} (2\pi)^d \delta(k+p) \Theta(k)$$

$\Theta(k) = \begin{cases} 1 & k-\Lambda \leq |k| < \Lambda \\ 0 & \text{quer outro } k \end{cases}$

Os outros termos da lagrangeana de $\hat{\phi}$ são tratados como interações em teoria de perturbação. Tomemos como exemplo o termo $\hat{\phi}^2$:

$$\text{Exp} \left\{ - \int d^d x \lambda_0 \left(+ \frac{1}{4} \hat{\phi}^2 \right) \right\} \simeq - \int d^d x \frac{\lambda_0}{4} \hat{\phi}^2 \hat{\phi} \hat{\phi}$$

Em princípio poderíamos calcular funções de dois pontos com quaisquer combinações de ϕ e $\hat{\phi}$:

$$\langle \phi \phi e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \langle \hat{\phi} \hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \langle \phi \hat{\phi} \phi \hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \dots$$

Mas se considerarmos que momentos próximos ao cut-off só aparecerão em integrais de loop e nunca nas linhas externas dos diagramas, então os campos $\hat{\phi}$ só aparecem em loops. Em termos do teorema de Wick temos:

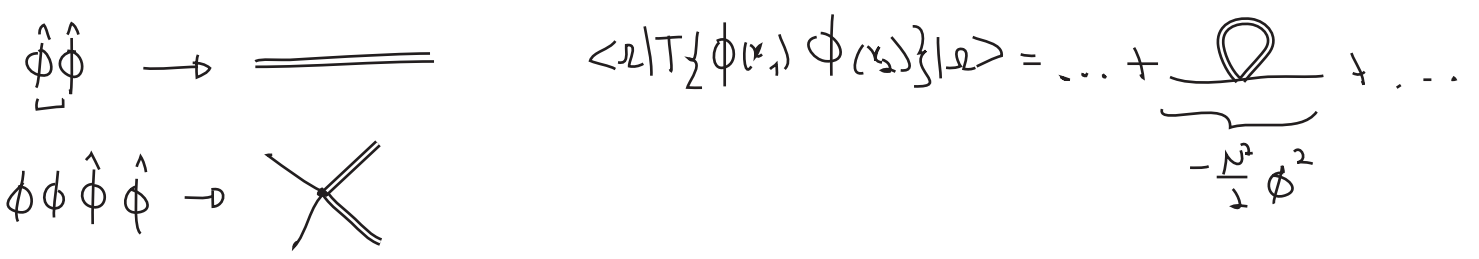
$$\left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[- \int \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \hat{\phi} \hat{\phi} \right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[- \int \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \underbrace{\hat{\phi} \hat{\phi}} \right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[- \int \frac{\lambda_0}{2} \phi^2 \right] \right\rangle$$

↙ operador com n campos ϕ ↘ estamos assumindo que os campos externos serão ϕ e não $\hat{\phi}$

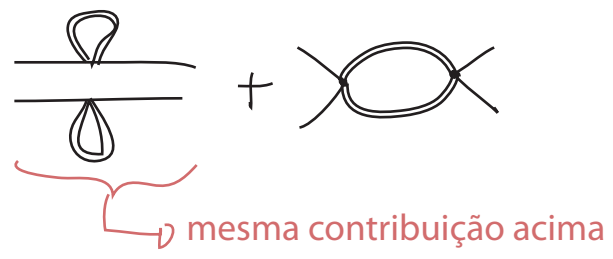
$$N = \frac{\lambda_0}{2} \int_{b\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} = \frac{\lambda_0}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1 - b^{d-2}}{\Gamma(d/2)} \Lambda^{d-2}$$

O importante a ser notado aqui é que este termo também seria obtido de um termo $-\frac{N}{2} \phi^2$ na lagrangeana

Para ver o que ocorre em ordens superiores, é útil definir diagramas:



Em ordem λ_0^2 temos, para a função de 4 pontos:



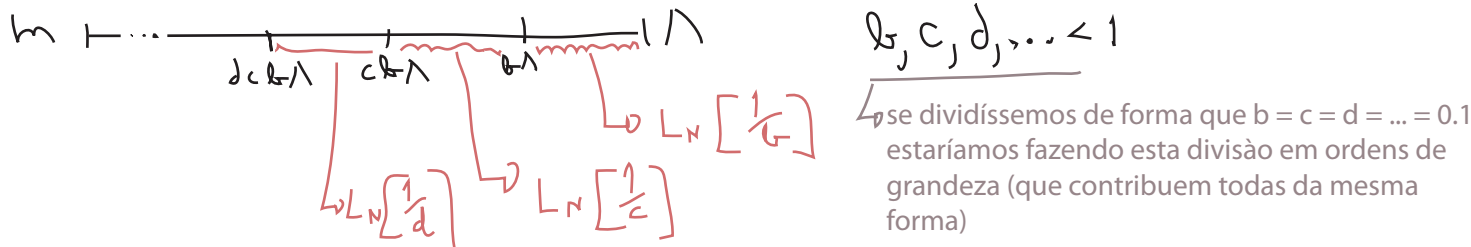
assumindo que o momento das pernas externas é muito pequeno comparado com $b\Lambda$, podemos ignorá-los e obter

$$L_0 = -\frac{1}{4!} \int d^d x \zeta \phi^4 \quad \text{equivale a} \quad \text{X diagram} \quad -i\zeta$$

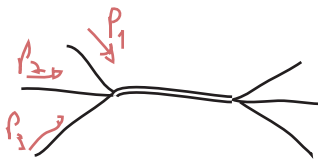
$$\zeta \equiv -4! \frac{2}{2!} \left(\frac{\lambda_0}{4}\right)^2 \int_{b\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{k^2}\right)^2 = \frac{-3\lambda_0^2}{(4\pi)^{d/2}} \frac{(1-b^{d-4})}{\Gamma(d/2)} \Lambda^{d-4}$$

$$\stackrel{d \rightarrow 4}{=} -\frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} L_N \left[\frac{1}{b} \right] \quad \text{(eq. 95.1)}$$

Note que se fizessemos mais subdivisões (multiplicativamente), cada intervalo teria uma contribuição similar:

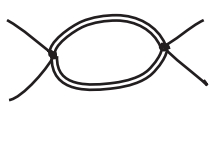


Este procedimento gera contribuições não só a ϕ^2 e ϕ^4 , mas também a ordens superiores. O termo $\phi^3 \hat{\phi}$ por exemplo:



$$\sim \frac{\lambda_0^2}{(p_1 + p_2 + p_3)^2} \oplus (p_1 + p_2 + p_3)$$

Obtemos acoplamentos com derivadas também. Para o diagrama abaixo por exemplo, desprezamos o momento das linhas extremas. Se ao invés disso fizermos uma expansão para o momento externo pequeno, o próximo termo seria:



$$= -\frac{1}{4!} \int d^d x \zeta \phi^4 - \frac{1}{4} \int d^d x \eta \phi^2 (\partial_\mu \phi)^2 + \dots$$

De forma geral obteremos todas as interações possíveis (de potências arbitrariamente altas) entre o campo ϕ e suas derivadas. Temos diversas contribuições desconectadas que acabam sendo eliminadas pela normalização de qualquer correlator, então podemos finalmente escrever

$$Z = \frac{1}{N} \int \left[\mathcal{D}\phi \right] e^{-\int d^d x \mathcal{L}_{EFF}}$$

$$\mathcal{L}_{EFF} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi^4 + \left(\text{contribuições conectadas de } \hat{\phi} \right) \quad (\text{eq. 96.1})$$

Este processo de excluir um campo das linhas externas da teoria fazendo seu momento (ou massa) muito grande comparado com as outras é chamado de "integrate out" o campo (não conheço uma tradução para o português melhor do que "integrar" o campo). Façamos então uma comparação entre a lagrangiana original e a que obtivemos após a integração

$$k' = \frac{k}{\Lambda} \quad \kappa' = \kappa \Lambda$$

$$0 < k < \Lambda \rightarrow 0 < |k'| < 1$$

$$\int d^d x \mathcal{L}_{EFF} = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (1 + \Delta z) (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m_0^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4!} (\lambda_0 + \Delta \lambda) \phi^4 + \Delta C (\partial_\mu \phi)^4 + \Delta D \phi^6 + \dots \right]$$

contribuições da "out-integration" de $\hat{\phi}$

$$= \int d^d x' \Lambda^{-d} \left[\frac{1}{2} (1 + \Delta z) \Lambda^2 (\partial'_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m_0^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4!} (\lambda_0 + \Delta \lambda) \phi^4 + \Delta C \Lambda^4 (\partial'_\mu \phi)^4 + \dots \right]$$

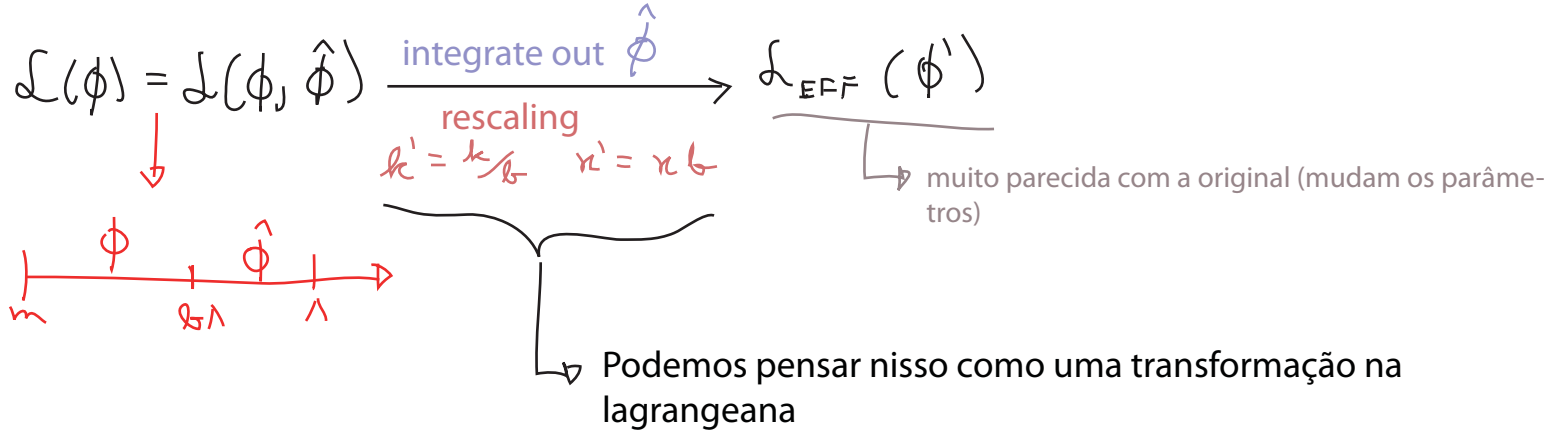
Podemos voltar a uma forma muito parecida com a lagrangeana original fazendo as seguintes definições:

$$\begin{aligned} \phi' &= [b^{2-d} (1 + \Delta z)]^{1/2} \phi \\ m'^2 &= (m_0^2 + \Delta m^2) (1 + \Delta z)^{-1} b^{-2} \\ \lambda' &= (\lambda_0 + \Delta \lambda) (1 + \Delta z)^{-2} b^{d-4} \\ c' &= (c_0 + \Delta c) (1 + \Delta z)^{-2} b^d \\ \mathcal{D}' &= (\mathcal{D}_0 + \Delta \mathcal{D}) (1 + \Delta z)^{-3} b^{2d-6} \\ &\vdots \end{aligned}$$

(eq. 97.1)

$$\int d^d x \mathcal{L}_{EFF} = \int d^d x' \left[\frac{1}{2} (\partial'_\mu \phi')^2 + \frac{1}{2} m'^2 \phi'^2 + \frac{\lambda'}{4} \phi'^4 + c' (\partial'_\mu \phi')^4 + \mathcal{D}' \phi'^6 + \dots \right]$$

Pensando em todo o processo, o que fizemos foi:



Podemos, de fato, repetir o processo para uma nova "fatia" do espaço de momentos ($cb\Lambda < |k| < b\Lambda$). Cada transformação sucessiva resulta em uma nova transformação dos coeficientes dos termos na lagrangeana (como em 97.1). Se fizermos todos os parâmetros desta transformação (b, c, \dots) infinitesimalmente próximos de 1 (o que equivale a fazer as "fatias" tenderem a zero) temos uma transformação contínua. Neste caso vemos que podemos descrever o resultado de integrar sobre os graus de liberdade com momentos grandes como uma trajetória ou caminho (em inglês é comum usar "flow") sobre o espaço das possíveis lagrangeanas. O conjunto destas transformações é chamado de **Grupo de Renormalização (RG)** (embora não formem verdadeiramente um grupo, pois não são inversíveis).

Notem que temos então duas formas de atacar o mesmo problema. Suponha que estejamos interessados em um processo qualquer em que os momentos típicos (da partículas reais) sejam muito menores que uma escala qualquer Λ (usemos a teoria escalar para ilustrar):

Método 1: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda_0 \phi^4}{4!}$

Calculamos a função de n-pontos

↓
Surgem divergências assim que consideramos loops (porque é neles que entra a dinâmica de altas energias)

↓ Renormalização

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \text{contratermos}$$

$m^2 = m_0^2 \pm \delta m$
 $\lambda = \lambda_0 \pm \delta \lambda$

as divergências aqui (nos δ 's) nos forçam assumir que os parâmetros nús (m_0, λ_0) eram infinitos, o que parece criar problemas para a série perturbativa

→ resultados finitos

Método 2: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda_0 \phi^4}{4!}$

Diversas transformações sucessivas em que "integramos" os modos de alto momento, embutindo o seu efeito de volta na lagrangeana. Em cada passo temos só **integrais finitas** e os parâmetros da lagrangeana são também sempre assumidos pequenos.

$(m_0 \ll \Lambda)$ $(\lambda \text{ perturbativo})$

m_0, λ_0 finitos!

há de se tomar cuidado, pois λ vai mudando e por enquanto assumimos que ele nunca vai ficar forte o bastante para invalidar a teoria de perturbação.

$$\mathcal{L}_{\text{EFF}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda \phi^4}{4!} + \text{ todos os termos possíveis (de qualquer dim.)}$$

→ resultados finitos (o campo que sobra é zero para qualquer momento um pouco acima dos momentos externos considerados)

Os dois métodos devem nos fornecer os mesmos resultados, mas o segundo deixa diversas idéias mais claras. Para começar a teoria de perturbação é válida em qualquer ponto do cálculo, desde que a constante de acoplamento não evolua para valores grandes (o que de fato acontece em algumas teorias). Além disso fica claro que todas as grandezas vão depender da escala que estamos considerando (aquela que sobra no final, depois de integrarmos tudo acima dela).

Vejamos como a lagrangeana tende a variar sobre as transformações do grupo de renormalização. As lagrangeanas são definidas no espaço dos coeficientes de seus termos (que são operadores compostos dos campos), no caso escalar, por exemplo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + c (\partial_\mu \phi)^4 + \mathcal{D} \phi^6 + \dots$$

→ parâmetros que definem o espaço de lagrangeanas escalares

↙ da forma que definimos as transformações do RG este termo fica sempre igual.