A equação de Callan-Symanzik

(Peskin 12.2, Ryder 9.4)

Embora o tratamento que fizemos para o campo escalar seja bastante claro do ponto de vista físico ele pode se tornar bastante difícil tecnicamente se formos tratar teorias mais complicadas do que o campo escalar (sabemos, por exemplo, que a QED tem problemas com regularização por cut-off). Vamos então tentar achar formas mais gerais de encontrar as equações que estabelecem o fluxo dos parâmetros da lagrangeana. Para isso voltaremos ao formalismo das teorias renormalizadas (em que fizemos $\Lambda \to \infty$ e inserimos os contratermos)

$\Lambda \to \infty$

$m \ll \Lambda$

Trajetória infinitamente "longa" (em número de iterações) antes que a massa cresça

Passa arbitrariamente perto de um ponto fixo (mas sem passar nele)

Perto do ponto fixo, cada iteração a mais move a massa muito pouco, mas vai desaparecendo com todos os operadores irrelevantes. Acabamos com uma teoria que só tem operadores relevantes (os termos originais + contratermos) mas com coeficientes que foram corrigidos uma infinidade de vezes (os δ's são divergentes). Fica claro que as lagrangeanas que estão nestas trajetórias são um subconjunto de todas lagrangeanas possíveis.

- toda informação sobre o fluxo dos coeficientes irrelevantes foi jogado fora
- ainda podemos estudar os relevantes e marginais, mas não em função de Λ e $b\Lambda$

Neste caso usamos as condições de renormalização que são definidas em uma escala de renormalização (na pg 76, por exemplo, esta escala foi escolhida como $p^2 = 0$). Vendo como os coeficientes dependem desta escala μ, podemos recuperar a informação do fluxo.

Comecemos com uma teoria escalar sem massa (o termo m^2 renormalizado é exatamente zero). As condições da página 76 não servem mais (o $\delta\lambda$ obtido destas condições, por exemplo, tem singularidades para $m^2 = 0$, veja pgs 76-77). Usaremos então uma escala arbitrária M:

$$p^2 = -M^2 \quad \begin{cases} \left.\text{—(1PI)—}\right|_{p^2=-M^2} = 0 \\ \dfrac{d}{dp^2}\Big[\text{—(1PI)—}\Big]_{p^2=-M^2} = 0 \\ \text{Amp}(p_1,p_2,p_3,p_4) = -i\lambda \Big|_{(p_1+p_2)^2=(p_1+p_3)^2=(p_1+p_4)^2=-M^2} \end{cases}$$

ficando na região $p^2 < 0$ temos uma análise análoga ao que faríamos no espaço euclideano, onde tudo é mais simples. O comportamento para $p^2 > 0$ é mais complicado pois temos que tomar cuidado com singularidades advindas de estados ligados e ramificações

Com estas novas condições:

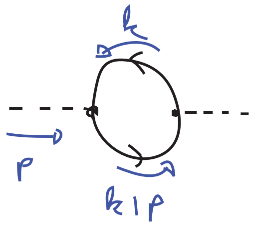
$$\langle \Omega | \phi(p)\,\phi(-p) | \Omega \rangle = \frac{i}{p^2} \Big/ p^2 = -m^2$$

$$\phi = Z^{-1/2}\phi_0$$

$$\langle \Omega | \phi_0(p)\,\phi_0(-p) | \Omega \rangle = \frac{iZ}{p^2} \Big/ p^2 = -m^2$$

(Z não é mais o resíduo do polo da função de dois pontos)

Para ver o efeito destas condições, considere que a teoria tem uma interação de Yukawa, das pgs. 80-81 temos:

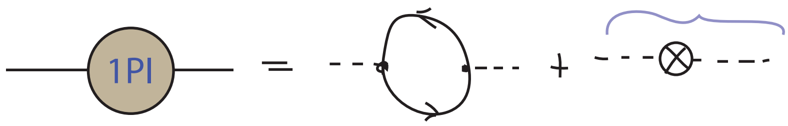


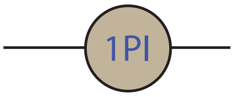
$$= \frac{4 i y^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx\,(d-1)\,\frac{\Gamma(1-d/2)}{\Delta^{1-d/2}}$$

$$\boxed{\Delta = m_\phi^2 - x(1-x)\,p^2}$$

$$m_\phi^2 = 0 \Rightarrow \Delta \propto p^2$$

$$-(p^2\delta Z - \delta m)$$





$$= \frac{4 i y^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 \frac{dx}{[-x(1-x)p^2]^{1-d/2}}\,(d-1)\,\Gamma(1-d/2) - (p^2\delta Z - \delta m)$$

$d \sim 2$

$$\frac{4 i y^2}{(4\pi)}\left[\frac{2}{\epsilon} - 2 - \gamma - \ln(-p^2) + \ln(4\pi)\right]\int_0^1 \frac{dx}{[x(1-x)]^{1-d/2}}$$

a parte que diverge não depende de p² portanto será cancelada por algo equivalente em δm.

$$d \sim 4 \Rightarrow \frac{12 i y^2}{(4\pi)}\left[-p^2\left(\frac{2}{\epsilon} + \ln(4\pi) - \gamma + \frac{1}{3} - \ln(-p^2)\right)\right]\int_0^1 \frac{dx}{x(x-1)}$$

não contribui para δm, apenas para δz.

$$\to -p^2\left(\frac{1}{2-d/2} + \ln\left(\frac{1}{-p^2}\right) + C\right)$$

Se fizermos esta regularização por cut-off, as contribuições para δz e δm, se misturam e não fica tão fácil ver que a massa não sai de zero, por isso continuaremos usando reg. dimensional. No entanto, para deixar claro o papel do cut-off, faremos a troca:

$$-p^2\left(\frac{1}{2-d/2}+\ln\left(\frac{1}{-p^2}\right)+C\right) \xrightarrow{EQ.} -p^2\left(\ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right)+C\right)$$

se comportam da mesma forma

são diferentes, mas não nos importam

O mesmo seria válido para $\lambda\phi^4$, mas teríamos que ir até dois loops para ver a primeira correção em δZ. Essa separação nos permite esquecer totalmente da massa e analizar o acoplamento. Nos diz que (como só temos polos em d = 4) as divergências de δZ (e $\delta\lambda$) serão logarítmicas.

Note que poderíamos ter escolhido outra escala de renormalização, M' para a mesma teoria. As funções de Green da teoria dependem apenas de m_0, λ_0 e Λ. M só aparece quando fazemos a troca:

$$\left.\begin{matrix}\lambda_0\\ \phi_0\\ \Lambda\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\lambda\\ \phi\\ M\end{matrix}\right.$$

$$\underbrace{\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\ldots\phi(x_n)\}|\Omega\rangle}_{G^{(n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = Z^{-n/2}\underbrace{\langle\Omega|T\{\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\ldots\phi_0(x_n)\}|\Omega\rangle}_{G_0^{(n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$$

O que acontece se fizermos uma pequena mudança em M?

$$M \to M+\delta M$$
$$\lambda \to \lambda+\delta\lambda$$
$$\phi \to (1+\delta\eta)\phi \quad \ldots$$

$$\phi = Z^{-1/2}\phi_0$$
$$\downarrow$$
$$\phi = Z^{-1/2}(1+\delta\eta)\phi_0$$

Na função de Green só importa a mudança em Z (já que G_0 só depende dos parâmetros nús):

$$Z^{-1/2} \to (1+\delta\eta)Z^{-1/2} \to Z^{-n/2} \to (1+\delta_\eta)^n Z^{-n/2} \sim (1+n\delta_\eta)Z^{-n/2}$$

$$G^{(n)} \to (1+n\delta_\eta)G^{(n)}$$

Pensando em G como uma função de M e λ, esta trasnformação é dada por:

$$\boxed{dG^{(n)} = \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M}\delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial\lambda}\delta\lambda = n\delta_\eta G^{(n)}} \quad (\text{eq. } 105.1)$$

Definindo os parâmetros adimensionais:

$$\boxed{\beta \equiv \frac{M}{\delta M}\delta_\lambda}$$ Função beta

(eq. 106.1)

$$\boxed{\gamma \equiv -\frac{M}{\delta M}\delta_\eta}$$ Função gama

(eq. 106.2)

Temos:

$$\left(\frac{\partial G^{(n)}}{\partial M}\delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda}\delta_\lambda - n\delta_n G^{(n)} = 0\right) \times \frac{M}{\delta M}$$

$$M\frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} + \underbrace{\frac{M}{\delta M}\delta_\lambda}_{\beta}\frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} - n\underbrace{\frac{M}{\delta M}\delta_n}_{-\gamma} G^{(n)} = 0$$

$$\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta\frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma\right] G^{(n)}(x_1,\dots,x_n; M, \lambda) = 0$$

Pensemos sobre β e γ:

são os mesmo para qualquer n

são adimensionais, e não há qualquer outro parâmetro com dimensão de massa

$$\begin{matrix}\beta \\ \gamma\end{matrix}(\cancel{n}, \cancel{M}, \lambda) \Rightarrow \quad \beta = \beta(\lambda) \qquad \gamma = \gamma(\lambda)$$

$$\boxed{\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma(\lambda)\right] G^{(n)}(x_1,\dots,x_n; M, \lambda) = 0}$$

Equação de Callan- Symanzik

(eq. 106.3)

$\beta(\lambda) \longleftrightarrow$ ligada a mudança na constante de acoplamento

$\gamma(\lambda) \longleftrightarrow$ ligada a mudança no campo (field strength)

Esta equação nos diz que a mudança em M será sempre acompanhada e compensada pelas outras duas.

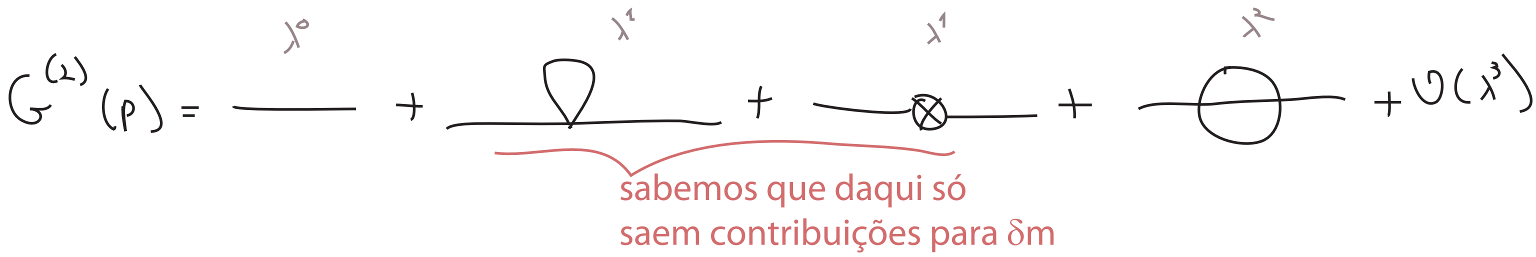
Podemos generalizar o argumento acima para outras teorias renormalizáveis (com acoplamentos adimensionais). Haverá uma função γ para cada campo e uma função β para cada acoplamento. No caso da QED (sem massa, $m_e = 0$) (n é o número de elétrons e m o de fótons):

$$\boxed{\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(e)\frac{\partial}{\partial e} + n\,\gamma_2(e) + m\,\gamma_3(e)\right] G^{(n,m)}(x_1\dots x_{n+m}; M, e) = 0}$$

(eq. 106.4)

Calculando as funções β e γ

Mais uma vez, fiquemos na teoria $\lambda\phi^4$ sem massa. Como estas funções não dependem de qual função de Green usamos na equação de Callan-Symanzik (CS), podemos escolher as mais simples:



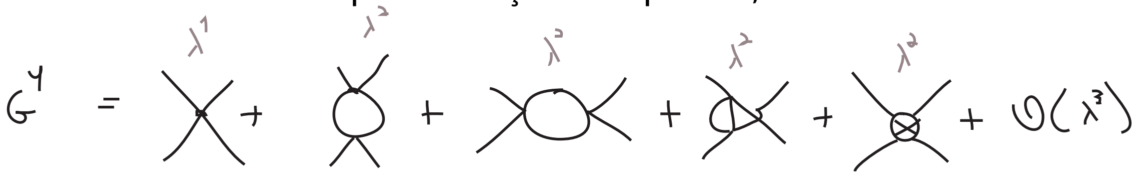
Como o cáculo de dois loops é trabalhoso, acaba sendo mais simples usar a função de 4 pontos. No entanto podemos obter alguma informação sobre γ daqui: como não há correções a $G^{(2)}$ em ordem λ, só introduzimos a dependência em M e λ em $G^{(2)}$ em ordem λ^2. Assim a equação de CS para $G^{(2)}$ fica:

$$\left[M \underbrace{\frac{d}{dM}}_{0} + \beta(\lambda) \underbrace{\frac{d}{d\lambda}}_{0} + 2\gamma(\lambda)\right] G^{(2)}(p) = 0$$

$\mathcal{O}(\lambda) \longrightarrow 0$

$\gamma(\lambda) = 0 + \mathcal{O}(\lambda^2)$

Passando então para a função de 4 pontos, temos:



$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + 4\gamma(\lambda)\right] G^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0$$

Já calculamos esta função de Green (na verdade a versão amputada dela, pgs 77-78):

$$G^4 = \left[-i\lambda + (-i\lambda)^2\left[i\underbrace{V(s)}_{\text{definido na eq. 77.3}} + iV(t) + iV(u)\right] - i\delta_\lambda\right] \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{4} \frac{i}{p_i^2}}_{\text{propagadores da pernas externas}}$$

(que tem correções ~ λ^2 conforme vimos na pg 79)

Nossa condição de renormalização agora exige que as correções a λ se cancelem em:

$$s = t = u = -M^2$$

O que nos dá um contratermo:

$$\delta_\lambda = (-i\lambda)^2 \cdot 3V(-M^2) = \frac{3\lambda^2}{2(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \, \frac{\Gamma(2-d/2)}{(x(1-x)M^2)^{2-d/2}}$$

$$d \to 4: \quad \delta_\lambda = \frac{3\lambda^2}{2(4\pi)^2}\left[\frac{1}{2-d/2} - \ln(M^2) + \ldots\right]$$

indep de M e finito

Temos então:

$$M\frac{d}{dM}G^{(4)} \underset{\mathcal{O}(\lambda^2)}{=} \frac{3i\lambda^2}{(4\pi)^2}\prod_{i=1}^{4}\frac{i}{p_i^2}$$

$\mathcal{O}(\lambda^2)$ (vem tudo de δ_λ)

$$\frac{d}{d\lambda}G^{(4)} = \left(-i + \mathcal{O}(\lambda)\right)\prod_{i=1}^{4}\frac{i}{p_i^2}$$

$\delta_\lambda \sim \mathcal{O}(\lambda^2)$

$$\left[M\frac{d}{dM} + \beta(\lambda)\frac{d}{d\lambda} + \underbrace{4\gamma(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)}\right]G^{(4)} = 0$$

$$\frac{3i\lambda^2}{(4\pi)^2}\prod\frac{i}{p_i^2} + \beta(\lambda)\left(-i + \mathcal{O}(\lambda)\right)\prod\frac{i}{p_i^2} + \overbrace{4\gamma(\lambda)G^{(4)}}^{\mathcal{O}(\lambda^3)} = 0$$

tem que ter no mínimo de ordem λ^2

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)} \qquad \text{(eq. 108.1)}$$

$\beta(\lambda) = A + B\lambda + C\lambda^2 + \ldots$

$(\lambda^0) \Rightarrow \boxed{-iA = 0}$

$(\lambda^1) \Rightarrow A - iB = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$

$(\lambda^2) \Rightarrow \frac{3i}{(4\pi)^2} - iC = 0$

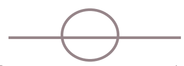
$\boxed{C = \frac{3}{(4\pi)^2}}$

Com este resultado, podemos voltar na equação de CS para a função de dois pontos e obter a primeira contribuição à função γ:

$$\left[M\frac{d}{dM} + \underbrace{\beta(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)}\frac{d}{d\lambda} + \underbrace{2\gamma(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)}\right]\underbrace{G^{(2)}}_{A + B\lambda^2 + f_2(M)\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3)} = 0 \qquad \beta(\lambda)\frac{d}{d\lambda}G^{(2)} \sim \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$(\lambda^2) \Rightarrow \lambda^2 M\frac{df_2(M)}{dM} + 2\gamma(\lambda)A = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{2A}M\frac{df_2(M)}{dM}} \qquad \text{(eq. 108.2)}$$

que pode ser obtido calculando



De uma forma mais geral (qualquer teoria escalar renormalizável sem massa), teremos sempre:

$$G^{(2)}(p) = \text{———} + \underbrace{\left(\text{LEAD. LOOP}\right)}_{\text{contribuição não-nula com o menor número de loops}} + \text{——}\otimes\text{——} + \dots$$

$$= \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2}\left[\cancel{-i}\,\cancel{p^2} A \underbrace{\ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right)}_{\text{conforme mostramos na pág. 105 (divergências em } \delta Z \text{ são Logs)}} + \text{termos finitos}\right]\frac{\cancel{i}}{\cancel{p^2}} + \frac{i}{p^2}\left(i p^2 \delta z\right)\frac{i}{p^2} + \dots$$

$$\frac{\partial G^{(2)}}{\partial M} = -\frac{i}{p^2}\frac{\partial}{\partial M}\delta z$$

depende da teoria

$$A \sim \mathcal{O}(\lambda^n) \quad \begin{cases} G \sim \underline{\underline{\text{CONST.}}} + \mathcal{O}(\lambda^n) \\[1ex] \dfrac{\partial G}{\partial \lambda} \sim \mathcal{O}(\lambda^{n-1}) \end{cases}$$

$$\left[M\frac{\partial}{\partial M}G^{(2)} + \underbrace{\underbrace{\beta(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda)}\underbrace{\frac{\partial}{\partial \lambda}G^{(2)}}_{\mathcal{O}(\lambda^{n-1})}}_{\mathcal{O}(\lambda^n)} + \underbrace{\underbrace{2\gamma(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda)}\underbrace{G^{(2)}}_{\text{CONST.}+\mathcal{O}(\lambda^n)}}_{\mathcal{O}(\lambda)}\right] = 0$$

$n > 1$ $\Rightarrow$ A contribuição do termo envolvendo β vai ser sempre de ordem superior a que envolve γ

$$-\frac{i}{p^2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta z + 2\gamma(\lambda)\frac{i}{p^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{1}{2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta z} \qquad \text{(eq. 109.1)}$$

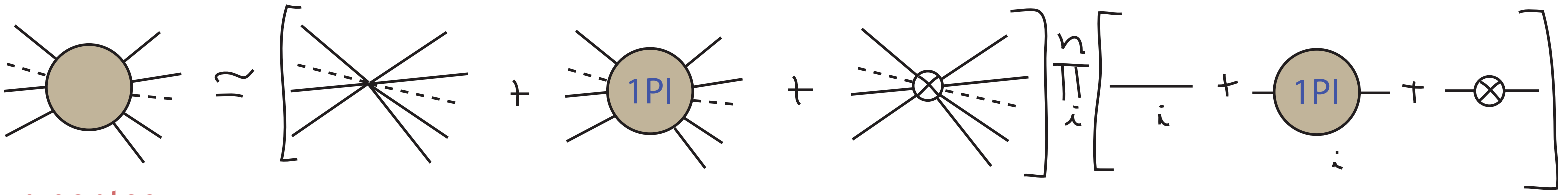
Se lembrarmos que δz tem que cancelar a divergência dos loops em alguma escala $-p^2 = M$, concluí-mos que:

$$\left\{\frac{i}{p^2}\left[A\ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right)\right] + \frac{i}{p^2}\left(i p^2 \delta z\right)\frac{i}{p^2}\right\}_{p^2=-M^2} = 0$$

$$\delta z = A\ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{2}M\cdot A\cdot\left(-\frac{2}{M}\right) = \underline{-A}$$

coeficiente do logaritmo divergente
que contribuí para δz
(o mesmo ocorre na QED ou Yukawa)

Podemos obter algo análogo para a função β. Pensemos numa teoria com um acoplamento g de um vértice com n linhas, a função de n pontos será dada por:



n pontos

$$\frac{i}{p_i^2} + \frac{i}{p_i^2}\left[A_i \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p_i^2}\right)\right] - \frac{i}{p_i^2}\delta z_i$$

$P(M)$

$$G^{(n)} \simeq \left(\prod_i^n \frac{i}{p_i^2}\right)\left[-ig - i\beta \ln\left[\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right] - i\delta_g - ig\sum_i^n\left(A_i \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p_i^2}\right) - \delta z_i\right)\right]$$

(só estou interessado nas correções a um loop (por isso ignoro os produtos entre contratermos e entre 1PIs)

algum invariante do tipo das variáveis de Mandelstam estamos assumindo que as condições de renorm. são para todas as variáveis deste tipo ~ $-M^2$

$$\left[M\frac{d}{dM} + \beta(g)\frac{d}{dg} + n\gamma(g)\right]G^{(n)}(P) = 0$$

$$\boxed{n\,\gamma(\lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M\frac{\partial}{\partial M}\delta z_i}$$

$$\left(\prod_i^n \frac{i}{p_i^2}\right)\left\{M\frac{d}{dM}\left(-i\delta_g + ig\sum_i^n \delta z_i\right) + \beta(g)\underbrace{\frac{dG^{(n)}}{dg}}_{\left[-i+\mathcal{O}(g^{\geq 1})\right]} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta z_i\, \underbrace{G^{(n)}}_{-ig+\mathcal{O}(g^{\geq 2})}\right\} = 0$$

Não sabemos, a priori, em que ordem de g temos a primeira contribuição a δ_g ou δz_i, mas para que β possa cancelar estas contribuições ele tem que começar a receber contribuições na mesma ordem em que δ_g ou $g\,\delta z_i$ e, em L.O., podemos ignorar <u>estes termos</u>

$$M\frac{d}{dM}\left(-i\delta_g + ig\sum_i^n \delta z_i\right) - i\beta(g) - ig\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta z_i = 0$$

$$\boxed{\beta(g) = M\frac{d}{dM}\left(-\delta_g + \frac{1}{2}g\sum_i^n \delta z_i\right)} \qquad \text{(eq. 110.1)}$$

Mais uma vez as condições de renormalização nos dizem quem são δg e δz

$$\delta_g = -\beta \ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) + \underbrace{\ldots}_{\text{as partes finitas independem de } M}$$

$$\boxed{\beta(g) = -2B - g\sum_i A_i} \quad \text{(eq. 111.1)}$$

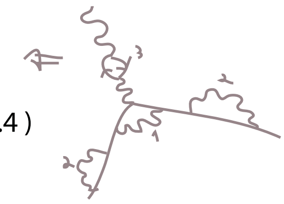
Um fato importante a ser notado é que, como não estamos interessados na parte finita (de fato somente no coeficiente da divergência) - não precisamos ser muito cuidadosos ao especificar as condições de normalização, basta fazer qualquer invariante (que fixa a escala dos logarítmos) igual a $-M^2$. É claro que isso só vale em L.O.

Argumentos semelhantes se aplicam para teorias mais complicadas. No caso da QED temos (gauge de Feynman):

$$\boxed{\gamma_2(e) = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM}\delta_2} \quad \text{(eq. 111.2)}$$

$$\boxed{\gamma_3(e) = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM}\delta_3} \quad \text{(eq. 111.3)}$$

$$\boxed{\beta(e) = M\frac{d}{dM}\left(-e\delta_1 + e\delta_2 + \frac{e}{2}\delta_3\right)} \quad \text{(eq. 111.4)}$$



Se modificarmos os δ's calculados nas páginas 84 a 86 para férmions sem massa e para a condição de renormalização em $-M^2$, temos:

$$\delta_1 = \delta_2 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} + \dots \sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)$$

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3}\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} + \dots \sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)$$

De forma que:

$$\gamma_2(e) = \frac{1}{2}M\left[-\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(-\frac{2}{M}\right)\right] = \frac{e^2}{(4\pi)^2}$$

$$\gamma_3(e) = \frac{e^2}{12\pi^2}$$

$$\beta(e) = \cancel{M}\frac{e}{\cancel{2}}\left[\cancel{-}\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(\cancel{-}\cancel{\frac{2}{M}}\right)\right]\frac{4}{3} = \frac{e^3}{12\pi^2}$$

Importante: a sutileza aqui é que escolhemos um gauge específico, então algumas destas funções mudam se mudarmos o gauge, outras não. δ_2 (ligada ao propagador do elétron) não é invariante de gauge, δ_3 e β são ivariantes (ligados à polarização do vácuo).