$$\boxed{\beta(g) = -2B - g\sum_i A_i}$$ (eq. 111.1)

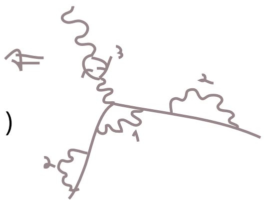
Um fato importante a ser notado é que, como não estamos interessados na parte finita (de fato somente no coeficiente da divergência) - não precisamos ser muito cuidadosos ao especificar as condições de normalização, basta fazer qualquer invariante (que fixa a escala dos logarítmos) igual a $-M^2$. É claro que isso só vale em L.O.

Argumentos semelhantes se aplicam para teorias mais complicadas. No caso da QED temos (gauge de Feynman):

$$\boxed{\gamma_2(e) = \frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial M}\delta_2}$$ (eq. 111.2)

$$\boxed{\gamma_3(e) = \frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial M}\delta_3}$$ (eq. 111.3)

$$\boxed{\beta(e) = M\frac{\partial}{\partial M}\left(-e\delta_1 + e\delta_2 + \frac{e}{2}\delta_3\right)}$$ (eq. 111.4)



Se modificarmos os δ's calculados nas páginas 84 a 86 para férmions sem massa e para a condição de renormalização em $-M^2$, temos:

$$\delta_1 = \delta_2 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} + \dots \sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \mathrm{Ln}\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)$$

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3}\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} + \dots \sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3} \mathrm{Ln}\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)$$

De forma que:

$$\gamma_2(e) = \frac{1}{2} M\left[-\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(-\frac{2}{M}\right)\right] = \frac{e^2}{(4\pi)^2}$$

$$\gamma_3(e) = \frac{e^2}{12\pi^2}$$

$$\beta(e) = \cancel{M}\frac{e}{\cancel{2}}\left[\cancel{-}\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(\cancel{-}\frac{\cancel{2}}{\cancel{M}}\right)\right]\frac{4}{3} = \frac{e^3}{12\pi^2}$$

Importante: a sutileza aqui é que escolhemos um gauge específico, então algumas destas funções mudam se mudarmos o gauge, outras não. δ_2 (ligada ao propagador do elétron) não é invariante de gauge, δ_3 e β são ivariantes (ligados à polarização do vácuo).

O significado de γ e β

Vamos tentar entender γ e β, escrevendo-os em termos dos parâmetros da lagrangeana nua:

$$\lambda\phi^4: \qquad \phi(p) = Z(m)^{-1/2}\,\phi_0(p)$$

$$m \to m+\delta m \Rightarrow \phi \to \phi + \delta\eta\,\phi$$

$$\phi' = (1+\delta\eta)\phi \quad \left\{\begin{array}{l} \phi' = Z(m+\delta m)^{-1/2}\phi_0 \\ \phi = Z(m)^{-1/2}\phi_0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\delta\eta = \frac{\phi'}{\phi} = \frac{Z(m+\delta m)^{-1/2}\cancel{\phi_0}}{Z(m)^{-1/2}\cancel{\phi_0}}$$

$$\delta\eta = \frac{Z(m+\delta m)^{-1/2}}{Z(m)^{-1/2}} - 1$$

Da definição de γ (eq 106.2) temos:

$$\gamma = -\frac{m}{\delta m}\delta\eta = -\frac{m}{\delta m}\left(\frac{Z(m+\delta m)^{-1/2}}{Z(m)^{-1/2}} - 1\right) = -\frac{m}{Z^{-1/2}}\Bigg(\underbrace{\frac{Z(m+\delta m)^{-1/2} - Z^{-1/2}(m)}{\delta m}}_{\frac{\partial}{\partial m}Z^{-1/2}}\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m}{Z^{-1/2}} Z^{-3/2}\frac{\partial}{\partial m}Z$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{2}\frac{m}{Z}\frac{\partial Z}{\partial m}} \quad \text{(eq. 112.1)} \quad \underset{Z=1+\delta Z}{\sim} \quad \frac{1}{2}\, m\left(1-\delta_Z+\mathcal{O}(\delta_Z^2)\right)\frac{\partial}{\partial m}\delta_Z$$

que reproduz o resultado em L.O. de 109.1

mostra a ligação entre γ e a mudança de Z

No caso de β, nossa definição original já era suficientemente clara (eq 106.1):

$$\beta = \frac{m}{\delta m}\delta\lambda \quad \begin{array}{l} m \to m+\delta m \\ \lambda(m+\delta m) = \lambda(m) + \delta\lambda \end{array}$$

$$\boxed{\beta = m\frac{\partial}{\partial m}\lambda(m)} \quad \text{(eq. 112.2)}$$

, o que mostra que β nos fala como o acoplamento muda com esta escala que escolhemos para a cond. de renorm. Veremos em seguida que podemos interpretar isso como a mudança (o *running*) do acoplamento com a escala de energia do evento

Solução da equação de Callan-Symanzik

(Peskin 12.3)

Para estudar as implicações da equação CS, vamos resolvê-la para uma função de dois pontos de uma teoria com um único campo escalar (sem massa)

$$\mathrm{Dim}\left[G^{(2)}\right] = \mathrm{Dim}\left[\frac{1}{p^2}\right] = -2 \quad \therefore \quad G^{(2)} \equiv \frac{i}{p^2}\, \underbrace{g\left(-\frac{p^2}{M^2}\right)}_{\mathrm{Dim}[g]=0} = -\frac{i}{k^2}\, g\left(\frac{k^2}{M^2}\right)$$

tem dimensão -2 e só depende de p e M

$$k \equiv \sqrt{-p^2} \quad \therefore \quad k^2 = -p^2 > 0$$

número (e não um quadrivetor)

$$x \equiv x\left(\frac{k}{M}\right)$$

$$\frac{d}{dM} f(x) = \frac{dx}{dM}\frac{df(x)}{dx} = -\frac{k}{M^2}\frac{df(x)}{dx} \to \frac{df}{dx} = -\frac{M^2}{k}\frac{df}{dM}$$

$$\frac{d}{dk} f(x) = \frac{dx}{dk}\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{M}\frac{df(x)}{dx} \to \frac{df}{dx} = M\frac{df}{dk}$$

$$\frac{df}{dM} = -\frac{k}{M}\frac{df}{dk}$$

$$M\frac{d}{dM} G^{(2)} = -M\frac{i}{k^2}\left(\frac{d}{dM} g\right) = -\frac{i}{k^2}\left(-k\frac{d}{dk} g\right) = -k\left[-\frac{i}{k^2}\frac{d}{dk} g\right]$$

$$\frac{d}{dk}\left(-\frac{i}{k^2} g\right) = +\frac{2i}{k^3} g - \frac{i}{k^2}\frac{d}{dk} g$$

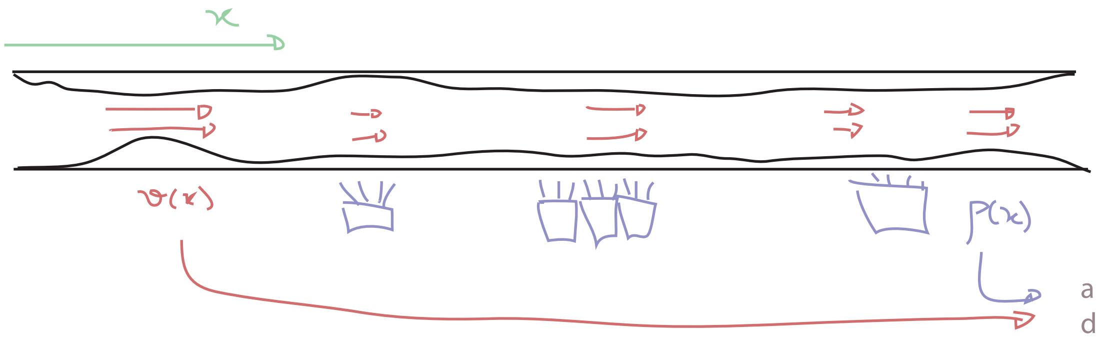
$$M\frac{d}{dM} G^{(2)} = -k\left[\frac{d}{dk}\underbrace{\left(-\frac{i}{k^2} g\right)}_{G^{(2)}} \underbrace{-\frac{2i}{k^3} g}_{+\frac{2}{k}G^{(2)}}\right] = -k\left[\frac{d}{dk} G^{(2)} + \frac{2}{k} G^{(2)}\right] = \left[-k\frac{d}{dk} - 2\right] G^{(2)}$$

CS: $\left[M\frac{d}{dM} + \beta(\lambda)\frac{d}{d\lambda} + 2\gamma(\lambda)\right] G^{(2)} = 0$

$$\boxed{\left[k\frac{d}{dk} + 2 - \beta\frac{d}{d\lambda} - 2\gamma\right] G^{(2)} = 0} \qquad \text{(eq. 113.1)}$$

Teoria livre: $\beta = \gamma = 0$ $\qquad k\frac{d}{dk} G^{(2)} = -2G^{(2)} \Rightarrow G^{(2)} = -\frac{i}{k^2}$

Para vislumbrar como podemos resolver um caso mais geral, vamos pensar em bactérias (!!!). Imagine um tubo estreito por onde corre um fluido com velocidade v(x) (x é a coordenada ao longo do comprimento do tubo). O tubo está infectado por bactérias, cuja população é dada pela densidade D(t,x) e cuja taxa de crescimento é ρ(x)



a taxa de crescimento e velocidade dependem de condições no tubo (eg: espessura e iluminação)

$$\frac{d}{dt}D(t,x) = \overbrace{-v(x)\frac{d}{dx}}^{\text{as bactérias são arrastadas}} D(t,x) + \underbrace{p(x)\,D(t,x)}_{\text{crescimento}}$$

em um dado ponto x_0

$x_- < x_0$

$\left.\frac{dD}{dx}\right|_{x_0} > 0 \Rightarrow$ {pop. cresce pois $D[x_-] < D[x_0]$

$\left.\frac{dD}{dx}\right|_{x_0} < 0 \Rightarrow$ {pop. cresce pois $D[x_-] > D[x_0]$

$$L_v\left[\frac{d}{dt} + v(x)\frac{d}{dx} - p(x)\right] D(t,x) = 0$$

Esta é exatamente a equação que temos fazendo:

(eq. 113.1)

$$\left[k\frac{d}{dk} + 2 - \beta\frac{d}{d\lambda} - 2\gamma\right] G^{(2)} = 0$$

$$\begin{cases} \mathrm{Log}\left(k/M\right) \leftrightarrow t \\ dt \leftrightarrow \frac{1}{k}\,dk \qquad \frac{d}{dt} \leftrightarrow k\frac{d}{dk} \\ \lambda \leftrightarrow x \\ -\beta(\lambda) \leftrightarrow v(x) \\ 2\gamma(\lambda) - 2 \leftrightarrow p(x) \\ G^{(2)}(k,\lambda) \leftrightarrow D(t,x) \end{cases}$$

Suponha que conheçamos: $D(t=0,x) = D_i(x)$

Para saber a densidade bacteriana de um elemento de fluido em ($t_1 > 0$, x_1) temos que olhar a história dele. Sabemos onde ele estava em $t = 0$ integrando sobre o seu movimento passado. Podemos pensar neste elemento fluindo para trás no tempo e definir:

$$\frac{d}{dt}\bar{x}(t;x_1) \equiv -v(\bar{x})$$

$\bar{x}$ → posição de um elemento de fluído indo na direção errada (-v)

$\bar{x}(0;x_1) = x_1$ → este começa em x_1

$\bar{x}(t_1;x_1)$ → posição dele em $t = 0$

Portanto a densidade bacteriana inicial dele era: $D_i(\bar{x}(t_1;x_1))$

E a densidade em (t_1, x_1) será:

$$D(t_1,x_1) = D_i\left(\bar{x}(t_1;x_1)\right)\cdot \mathrm{Exp}\left[\int_0^{t_1} dt'\, p(\underbrace{\bar{x}(t';x_1)}_{\text{posição dele em } t=t'})\right]$$ (eq. 115.1)

No referencial deste elemento a velocidade é zero e só o que as bactérias notam é que a iluminação muda com o tempo:

$$\frac{d}{dt}D(t) = p(t)D(t) \Rightarrow D(t) = D_i\, e^{\int_0^t p(t')dt'}$$

$$dt' = -\frac{1}{v(\bar{x}')}d\bar{x}' \qquad \bar{x}(t') = \bar{x}'$$

$$\bar{x}(0,x_1) = x_1 \qquad \bar{x}(t_1,x_1) = \bar{x}$$

$$\underbrace{D(t_1,x_1)}_{\text{notação}} = D_i\left(\bar{x}(t_1;x_1)\right)\cdot \mathrm{Exp}\left[\int_{\bar{x}}^{x_1} d\bar{x}'\,\frac{p(\bar{x}')}{v(\bar{x}')}\right]$$

Voltando a mundo menos infeccioso da teoria de campos, podemos usar esta solução fazendo as substituições adequadas. De 115.1 temos:

$$\left.\begin{array}{l} \ln(k/M) \longleftrightarrow t \\ \lambda \longleftrightarrow x \\ G^{(2)}(k,\lambda) \longleftrightarrow D(t,x) \\ -\beta(\lambda) \longleftrightarrow v(x) \\ 2\gamma(\lambda)-2 \longleftrightarrow P(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=0 \longleftrightarrow k=M \\ D_i(x) \longleftrightarrow \hat{G}_i^{(2)}(\lambda) \end{array}\right.$$

$$G^{(2)}(k,\lambda) = \underbrace{\hat{G}_i^{(2)}}_{\text{redefino}}\left(\bar{\lambda}(k;\lambda)\right)\mathrm{Exp}\left\{\int_{k'=M}^{k'=k} d\left[\ln\left(\frac{k'}{M}\right)\right]\cdot\left[2\gamma\left[\bar{\lambda}(k';\lambda)\right]\underbrace{-2}\right]\right\}$$ (eq. 115.2)

redefino

$$\hat{G}_i^{(2)}\frac{M^2}{k^2} = -\frac{i}{k^2}G_i^{(2)}$$

$$\mathrm{Exp}\left[-2\int_M^k d\left[\ln\left(\frac{k}{M}\right)\right]\right] = \frac{M^2}{k^2}$$

$$\boxed{G^{(2)}(k,\lambda) = -\frac{i}{k^2}G_i^{(2)}\left(\bar{\lambda}(k;\lambda)\right)\mathrm{Exp}\left\{2\int_{k'=M}^{k'=k} d\left[\ln\left(\frac{k'}{M}\right)\right]\gamma\left[\bar{\lambda}(k';\lambda)\right]\right\}}$$ (eq. 115.3)

Onde:
$$\bar{\lambda}(k;\lambda) \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial\left[\ln(k/M)\right]}\bar{\lambda}(k;\lambda) = \beta\left(\bar{\lambda}(k;\lambda)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{x}(t;x_1) = -v(\bar{x})$$

$$\bar{\lambda}(M;\lambda) = \lambda$$

$$\bar{x}(0;x_1) = x_1$$

$\bar{x}(t;x_1) \Rightarrow$ descrevia a posição de elemento de fluído em t unidades de tempo atrás baseado em um ponto de referência x_1 em que ele está "agora" (usamos t = 0 para agora e t = t1 para o início, mas de fato quaisquer dois tempos poderiam ser usados)

$\bar{\lambda}(k;\lambda) \Rightarrow$ Vai descrever o valor de uma constante de acoplamento modificada: que muda quando mudamos k (a intensidade do momento) a partir de um ponto de referência (que foi tomado como k = M). Note que a taxa de mudança é dada pela função β

$\Rightarrow$ Isto é um parâmetro da função, apenas nos diz quanto ela vale no ponto de referência

$\bar{\lambda}(k) \Rightarrow$ "running coupling constant"

A única forma que temos de determinar a função desconhecida G_i é obtendo a função G(2) em alguma ordem de perturbação e expandir o lado direito de 115.3 no mesmo parâmetro. Por exemplo, em $\lambda\phi^4$

$$\overset{\text{PERT.}}{G^{(2)}(k=M,\lambda) = -\frac{i}{M^2} + O(\lambda^2)} \Longleftarrow \overset{115.3}{G^{(2)}(k=M,\lambda) = -\frac{i}{M^2}G_i^{(2)}\big(\underbrace{\bar{\lambda}(k=M;\lambda)}_{\lambda}\big)}$$

$$\therefore\ G_i^{(2)}(\lambda) = 1 + O(\lambda^2) \longrightarrow G_i^{(2)}(\bar{\lambda}) = 1 + O(\bar{\lambda}^2)$$

Também podemos usar este procedimento para a função de quatro pontos. Calculemos esta função num regime cinemático bem específico:

$$G^{(4)}(p_1,p_2,p_3,p_4) \longrightarrow \begin{array}{l} p_i^2 = -\underline{P}^2 > 0 \\ p_i\cdot p_j = 0 \quad \forall i\neq j \end{array}$$ (os quatro momentos são spacelike)

Neste caso temos uma única grandeza dimensional relevante $\underline{P}^2$ e podemos escrever $G^{(4)}$ na forma:

$$\underbrace{G^{(4)}(\underline{P})}_{\mathrm{Dim}[G^{(4)}]=-8} = \underbrace{\left(\frac{-i}{\underline{P}^2}\right)^4}_{\mathrm{Dim}=-8} \underbrace{g\left(\frac{\underline{P}^2}{M^2}\right)}_{\mathrm{Dim}=0} \Rightarrow \text{podemos de novo fazer a troca } \frac{\partial}{\partial M} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \underline{P}}$$