Perto deste ponto fixo a função de dois pontos volta a se comportar como uma simples potência de p^2, só que é a potência errada (do ponto de vista de análise dimensional). Chamamos $\gamma(\lambda^*)$ de dimensão anômala do campo (de fato a função γ acabou "pegando" este nome mesmo quando não há ponto fixo na teoria)

Renormalização de operadores locais

Suponha que queiramos obter o comportamento de um operador local obtido como o produto de dois ou mais campos conforme renormalizamos a teoria.

$\mathcal{O}(x) \equiv$ operador composto de campos escalares

Da mesma forma que fizemos para o campo, podemos definir um processo de renormalização para este operador, re-escrevendo a Lagrangeana de forma a obter um contra termo:

$$\delta_{\mathcal{O}}\, \mathcal{O}(x)$$

que garante o operador renormalizado $\mathcal{O}_M \equiv Z_{\mathcal{O}}^{-1}(M)\,\mathcal{O}_0$ satisfaça as condições de normalização em uma escala M. A função de green em que estamos interessados é:

$$\underbrace{G^{(n;1)}}\left(p_1,\ldots,p_n;k\right) = \left\langle \phi(p_1)\ldots\phi(p_n)\,\hat{\mathcal{O}}_M(k)\right\rangle$$

notação: $G^{(n;m)}$ função de Green com n campos e m operadores locais

Escrevendo-a em função dos campos nús, temos:

$$G^{(n;1)}\left(p_1,\ldots,p_n;k\right) = Z(M)^{-n/2} Z_{\mathcal{O}}(M)^{-1}\left\langle \phi_0(p_1)\ldots\phi_0(p_n)\,\mathcal{O}_0(k)\right\rangle$$

Repetindo a dedução da equação de CS, temos:

$$\boxed{\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + n\gamma(\lambda) + \underbrace{\gamma_{\mathcal{O}}(\lambda)}_{\gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) = M\frac{\partial}{\partial M}\ln\left[Z_{\mathcal{O}}(M)\right]}\right] G^{(n;1)} = 0} \qquad \text{(eq. 123.1)}$$

Em muitas teorias temos mais de um operador com os mesmos números quânticos e a mesma dimensão, e neste caso podemos ter misturas entre estes operadores (as correções quânticas de um deles vai gerar contribuições aos outros). Por exemplo:

$$\mathcal{O}^1 = \bar{\psi}\left[\gamma^\mu D^\nu + \gamma^\nu D^\mu\right]\psi$$

$$\mathcal{O}^2 = F^{\mu\lambda}F^{\nu}{}_{\lambda}$$

Neste caso temos que definir um conjunto de operadores $\{\mathcal{O}^i\}$ de forma que:

$$\mathcal{O}_0^{i} = Z_{\mathcal{O}}^{ij}(M)\, \mathcal{O}_M^{j}$$

o que também transforma a dimensão anômala γ em uma matriz:

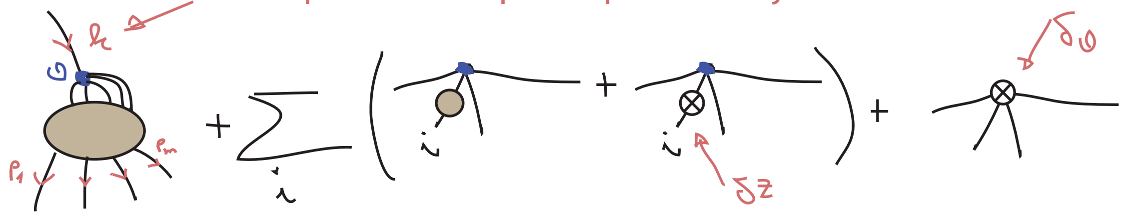
$$\gamma_{\mathcal{O}}^{ij} = \left[Z_{\mathcal{O}}^{-1}(M)\right]^{ik} M \frac{\partial}{\partial M}\left[Z_{\mathcal{O}}(M)\right]^{kj}$$

Para obter uma expressão para γ, calculemos a função de green com m campos escalares e o operador:

$$G^{(m;1)} = \langle \phi(p_1)\ldots\phi(p_m)\, \mathcal{O}_m(k)\rangle$$

estou permitindo que o operador "injete" momento

$$G^{(m;1)} =$$

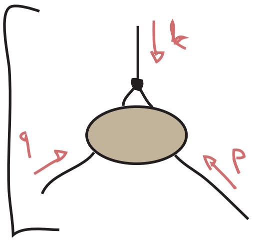


Usando a mesma lógica das páginas 109 a 111, se esta função de Green obedece as equações de CS (eq 123.1), então:

número de linhas externas escalares

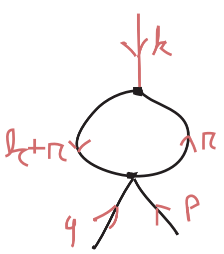
$$\boxed{\gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) = M\frac{\partial}{\partial M}\left(-\delta_{\mathcal{O}} + \frac{m}{2}\delta_Z\right)} \qquad \text{(eq. 124.1)}$$

Um exemplo seria analizar o operador ϕ^2, para evitar confusão entre a massa introduzida por este operador e a massa do campo escalar (que está sendo renormalizada para zero) vamos olhar uma função de green onde este operador carrega um momento diferente de zero, e definir sua normalização por:



$$\left[\ = \langle \phi(p)\phi(q)\,\phi^2(k)\rangle = \frac{i}{p^2}\frac{i}{q^2}\cdot 2\ \right]_{p^2=q^2=k^2=-M^2}$$

A primeiro loop a contribuir para esta função de Green é (de novo, estamos falando de $\lambda\phi^4$):



$$= \frac{i}{p^2}\frac{i}{q^2}\int\frac{d^4r}{(2\pi)^4}(-i\lambda)\frac{i}{r^2}\frac{i}{(k+r)^2} =$$

$$= \frac{i}{p^2}\frac{i}{q^2}\left[-\frac{\lambda}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-d/2)}{\Delta^{2-d/2}}\right]$$

$$\Delta = \Delta(p,q,k) \to \Delta(p^2=q^2=k^2=-M^2)=M^2$$

Em $-M^2$ este loop deve ser cancelado por:

$$\phi^2 \to \phi^2 + \delta_{\phi^2}\,\phi^2$$

$$2\delta_{\phi^2}$$

$$\otimes = \frac{i}{p^2}\frac{i}{q^2}\,2\delta_{\phi^2}$$

$$\boxed{\delta_{\phi^2} = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}}} \quad \text{(eq. 125.1)} \quad \sim \frac{\lambda}{2(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\epsilon}-\log(M^2)+\dots\right)$$

Como em $\lambda\phi^4$ não temos contribuição de ordem λ para δz, então:

(eq. 124.1 com $\frac{d}{dM}(\delta z)\sim\mathcal{O}(\lambda^2)$)

$$\gamma_{\phi^2} = M\frac{d}{dM}\left(-\delta_{\phi^2}\right) = M\frac{-\lambda}{2(4\pi)^2}\left(-\frac{2}{M}\right) \Rightarrow \boxed{\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{16\pi^2}} \quad \text{(eq. 125.2)}$$

Evolução dos parâmetros de massa

(Peskin 12.5)

Podemos usar a evolução de operadores acima para estudar a evolução da massa na teoria. Para tanto introduziremos a massa como uma pequena perturbação na teoria sem massa, esta aproximação é boa desde que a massa física seja comparável aos momentos típicos (fica ruim para momentos menores que a massa).

$\mathcal{L}_M \leftarrow$ lagrangeana sem massas, renormalizada na escala M

$$\downarrow$$

$$\mathcal{L}_M + \frac{1}{2}m^2\phi_M^2$$

$$G^{(n)} = G^{(n;0)} + m^2\,G^{(n;1)} + (m^2)^2\,G^{(n;2)} + \dots + (m^2)^\ell\,G^{(n;\ell)}$$

A generalização de 123.1 para várias inserções do operador é bastante óbvia:

$$\boxed{\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + n\gamma(\lambda) + \ell\gamma_{\phi^2}(\lambda)\right]G^{(n;\ell)} = 0} \quad \text{(eq. 125.3)}$$

aparece da mesma forma que o $n\gamma(\lambda)$ (pgs 105-106), só que com o número de inserções do operador (ℓ) ao invés do número de operadores do campo escalar (n)

Se escrevemos: $$G^{(n)} = \sum_\ell (m^2)^\ell\,G^{(n;\ell)}$$

Então: $$m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} G^{(n)} = \sum_i \ell\,(m^2)^\ell\, G^{(n;\ell)}$$

de forma que a seguinte equação garante 125.3 para cada ordem de m^2:

$$\boxed{\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma(\lambda) + \gamma_{\phi^2}\, m^2 \frac{\partial}{\partial m^2}\right] G^{(n)}\left(\{p_i\}; M, \lambda, m\right) = 0}$$ (eq. 126.1)

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial\left[\log(p/M)\right]}\bar{m}^2 = \gamma_{\phi^2}(\bar{\lambda})\,\bar{m}^2(p)} \Longleftrightarrow \boxed{\bar{m}^2(M) = m^2}$$

O running da massa vai depender essencialmente da dimensão anômala do operador ϕ^2 na teoria em questão. Este argumento vale para qualquer operador que eu adicione perturbativamente:

$$\mathcal{L}(c_i) = \mathcal{L}_m + \sum_i c_i\, \mathcal{O}^i_M(x)$$

dimensão depende da dimensão do operador

$$\boxed{\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma(\lambda) + \sum_i \gamma_i(\lambda)\, c_i \frac{\partial}{\partial c_i}\right] G^{(n)}\left(\{p_i\}; M, \lambda, \{c_i\}\right) = 0}$$ (eq. 126.2)

Podemos escrever isso de forma mais conveniente: $d_i \equiv \mathrm{Dim}\left[\mathcal{O}^i\right]$

$$\Downarrow$$

$$c_i = \rho_i\, M^{4-d_i}$$

$$\hookrightarrow \mathrm{Dim}\left[\rho_i\right] = 0$$

$$\mathcal{L}(\rho_i) = \mathcal{L}_m + \sum_i \rho_i\, M^{4-d_i}\, \mathcal{O}^i_M(x)$$

estamos introduzindo uma dependência em M

esta nova dependência é compensada por ρ_i

Com isso 126.2 fica:

$$\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma(\lambda) + \sum_i \left(\gamma_i(\lambda) + d_i - 4\right) \rho_i \frac{\partial}{\partial \rho_i}\right] G^{(n)}\left(\{p_i\}; M, \lambda, \{\rho_i\}\right) = 0$$

$$G^{(2)} = \dots + \underbrace{-\!\!\otimes\!\!-}_{f(M)} + \dots + \overset{\rho_i M^{4-d_i}}{-\!\!\bullet\!\!-} + \dots$$

(antes a dep. em M estava só aqui)

$$M\frac{\partial}{\partial M}\left(\overset{\rho_i M^{4-d_i}}{-\!\!\bullet\!\!-}\right) \sim (4-d_i)\, M^{4-d_i}\rho_i$$

cancelamento

$$(d_i-4)\,\rho_i \frac{\partial}{\partial \rho_i}\left(\overset{\rho_i M^{4-d_i}}{-\!\!\bullet\!\!-}\right) \sim (d_i-4)\, M^{4-d_i}\rho_i$$

$$\beta_i \equiv (d_i - 4 + \gamma_i)\rho_i$$

$$\boxed{\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + n\gamma(\lambda) + \sum_i \beta_i \frac{\partial}{\partial\rho_i}\right]G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, \{\rho_i\}) = 0}$$ (eq. 127.1)

Perceba que agora todos os acoplamentos (adimensionais) ρ_i, aparecem com a mesma forma de λ. Podemos voltar às nossas bactérias para resolver o problema, só que agora elas fluem num espaço multidimensional com velocidades β e β_i. O resultado vai depender de constante de acoplamento efetivas que evoluem segundo equações:

$$\boxed{\frac{d}{d[\log(p/M)]}\bar{\rho}_i = \beta_i(\bar{\rho}, \bar{\lambda})}$$ (eq. 127.2)

Em suma, temos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \text{contra-termos} + \Rightarrow \bar{\lambda} \leftrightarrow \beta(\lambda)$$

$$+ \rho_i M^{4-d_i}\mathcal{O}^i_M(x) \Rightarrow \bar{\rho}_i \leftrightarrow \beta_i(\rho_i) \quad \circ\circ\circ \quad \beta_i = (d_i - 4 + \gamma_i)\rho_i$$

No limite em que todas as correções são muito pequenas (perto da teoria livre), podemos ignorar as contribuições de γ_i para β_i (γ_i depende de ρ_i ou λ, portanto $\gamma_i\rho_i \sim O(\text{pert}^2)$); neste caso:

$$\frac{d}{d[\log(p/M)]}\bar{\rho}_i = \underbrace{[d_i - 4]\bar{\rho}_i}$$

$$\beta_i(\bar{\rho}_i) = (d_i - 4)\bar{\rho}_i + \underbrace{\gamma_i\bar{\rho}_i}_{\sim 0}$$

$$\bar{\rho}_i = \rho_i\left(\frac{p}{M}\right)^{d_i - 4}$$

O que nos fornece o comportamento que esperávamos depois da análise pelo método do Wilson: operadores com dimensão maior que 4 (não-renormalizáveis em quatro dimensões) tem acoplamentos que diminuem para momentos pequenos.

Em *d* dimensões, temos que tomar cuidado com o termo $\lambda\phi^4$, que fica com acoplamento dimensional. Fazemos então:

$$\text{Dim}[\phi] = \frac{d-2}{2} \qquad \text{Dim}[\phi^4] = 2d - 4$$

$$\hookrightarrow \text{Dim}[\lambda] = d - (2d - 4) = 4 - d$$

$$\lambda \rightarrow \lambda' M^{4-d}$$ (definindo um novo λ adimensional)

$$\mathrm{Dim}[\phi_M^2] = d-2 \rightarrow \rho_m M^{d-(d-2)}\phi_m^2 = \rho_m M^2 \phi_m^2$$ (no caso do operador de massa, nada muda)

finalmente $\Longrightarrow$ $$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2}\rho_m M^2 \phi_M^2 - \frac{1}{4}\lambda M^{4-d}\phi_M^4 + \dots$$

para outros operadores basta trocar: $M^{4-d_i} \rightarrow M^{d-d_i}$ → dimensão do operador

Também precisamos calcular os contratermos em *d* dimensões. O cálculo que fizemos para δ_{ϕ^2} muda da seguinte forma, para *d* próximo a 4:

$$\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} \overset{d\to 4}{\sim} -\frac{2}{d-4} - \mathrm{Log}(M^2) + (d-4)\left[-\frac{1}{4}\mathrm{Log}^2(M^2) - \frac{1}{2}\gamma\,\mathrm{Log}(M^2)\right] + \underbrace{\dots}_{\text{indep de M}} + \mathcal{O}[(d-4)^2]$$

$$M\frac{d}{dM}\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} = -2 + (d-4)\left[-\gamma - \mathrm{Log}(M^2)\right] + \mathcal{O}[(d-4)^2]$$

$$M\frac{d}{dM}\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} \sim \underbrace{-2}_{\text{o que tínhamos antes (em d = 4)}} + \mathcal{O}(d-4)$$

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2}\left[2 - \mathcal{O}(d-4)\right] = \left[\gamma^{(4)}_{\phi^2} + \mathcal{O}[\lambda(d-4)]\right]$$

$$\beta_i = (d_i - d + \gamma_i)\rho_i \longrightarrow \beta_m = \left\{2-(d-4+4) + \gamma^{(4)}_{\phi^2} + \mathcal{O}[\lambda(d-4)]\right\}\rho_m = \left\{-2 + \gamma^{(4)}_{\phi^2} - (d-4) + \mathcal{O}[\lambda(d-4)]\right\}\rho_m$$

$\lambda(d-4) \sim 0$

$\rho_i(d-4) \sim 0$

$$\boxed{\beta_m = \left(-2 + \gamma^{(4)}_{\phi^2}\right)\rho_m + \dots}$$ (eq. 128.1)

Algo similar ocorre com as outras funções: $\beta_i = \left[d_i - d + \gamma_i^{(4)}\right]\rho_i + \dots$

No caso da função β temos um contribuição da dimensão de massa de λ:

$$\boxed{\beta = (d-4)\lambda + \overbrace{\beta^{(4)}(\lambda)}^{\text{o que tínhamos antes (em d = 4)}}}$$ (eq. 128.2)

$$\lambda^2(d-4) \sim 0 \qquad 1\cdot\mathcal{O}(\lambda^2) = \beta^{(4)}(\lambda)$$

$$\beta = (d-4)\lambda + M^{d-4}\mathcal{O}(\lambda^2) = (d-4)\lambda + (1 + (d-4)\mathrm{Log}(M) + \dots)\mathcal{O}(\lambda^2)$$

modificando o que há na pg 108: $G^{(4)} \sim \lambda M^{4-d} + \dots \longrightarrow \left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta\frac{\partial}{\partial\lambda} + \dots\right]G^{(4)} = 0 \Rightarrow \left[\underbrace{\lambda(4-d)M^{4-d}}_{\text{introduziu a ordem } \lambda^1 \text{ (que antes era nula)}} + \beta M^{4-d} + \mathcal{O}(\lambda^2)\right] = 0$

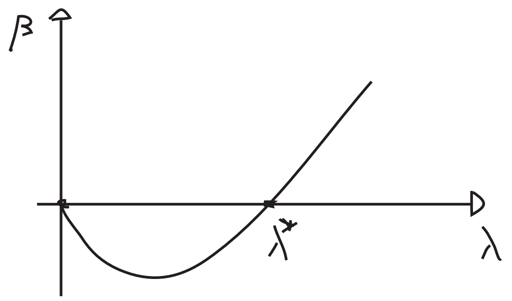
Usando o resultado 108.1: $\beta = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + O(\lambda^3)$

temos:

$$\beta = -(4-d)\lambda + \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2}$$

$$d \geq 4 \Rightarrow \beta > 0 \therefore \lambda \to 0 \, / \, p \to 0$$

$$d < 4 \Rightarrow$$



$$\lambda_* = \frac{16\pi^2}{3}(4-d)$$

o que é o comportamento que previmos nas págs 121-122, com um ponto fixo em λ*

Conexão com os expoentes críticos

Usando o resultado 128.1, podemos obter a evolução do parâmetro de massa em $\lambda\phi^4$:

$\beta_m = (-2+\gamma^{(4)}_{\phi^2})\rho_m \to$

$$\frac{d}{d[\log(p/m)]}\bar{\rho}_m = \beta_m(\bar{\rho}_m) = (-2 + \underbrace{\gamma^{(4)}_{\phi^2}}_{\frac{\lambda}{16\pi^2}})\bar{\rho}_m$$

(eq. 125.2)

$$\lambda = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho_m} d\bar{\rho}_m = -2\, d[\log(p/m)] \Rightarrow \boxed{\bar{\rho}_m = \rho_m \left(\frac{M}{p}\right)^2}$$

(eq. 129.1)

Lembrando que $\rho_m = \frac{m^2}{M^2} \Rightarrow \bar{\rho}_m = \frac{m^2}{p^2}$ (o que apenas nos diz que quando p ~ m o termo de massa se torna importante, e é pouco importante para p >> m)

$$\overline{m^2}(p) = M^2 \bar{\rho}_m = m^2\left(\frac{M}{p}\right)^2$$

Pensando em um sistema de mecânica estatística, lembremos que o comprimento de correlação desepenha o papel da massa deste campo escalar. Levando em conta a evolução desta massa podemos definir:

$$\xi \sim p_0^{-1} \; / \; \bar{\rho}_m(p_0) = 1$$

$$\bar{\rho}_m = 1 \Leftrightarrow p_0^2 = \rho_m M^2$$

um momento específico (não confundir com a componente zero do momento)

$$\xi \sim (M^2 \rho_m)^{-1/2} = m^{-1}$$