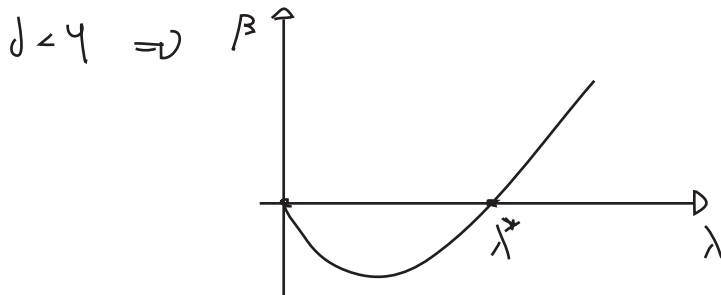


Usando o resultado 108.1:  $\beta = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$

temos:

$$\beta = -(1-\delta)\lambda + \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2}$$

$$\delta \geq 1 \Rightarrow \beta > 0 \quad \therefore \lambda \rightarrow 0 / p \rightarrow 0$$



$$\lambda_* = \frac{16\pi^2}{3} (1-\delta)$$

o que é o comportamento que previmos nas págs 121-122, com um ponto fixo em  $\lambda^*$

### Conexão com os expoentes críticos

Usando o resultado 128.1, podemos obter a evolução do parâmetro de massa em  $\lambda\phi^4$ :

$$\beta_m = (-2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)}) \bar{p}_m \rightarrow \frac{d}{d[\log(\mu/m)]} \bar{p}_m = \beta_m(\bar{p}_m) = (-2 + \underbrace{\gamma_{\phi^2}^{(4)}}_{\frac{\lambda}{16\pi^2}}) \bar{p}_m \quad (\text{eq. 125.2})$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \frac{1}{\bar{p}_m} d\bar{p}_m = -2 d[\log(\mu/m)] \Rightarrow \boxed{\bar{p}_m = p_m \left(\frac{M}{p}\right)^2} \quad (\text{eq. 129.1})$$

Lembrando que  $p_m = \frac{m^2}{M^2} \Rightarrow \bar{p}_m = \frac{m^2}{p^2}$  (o que apenas nos diz que quando  $p \sim m$  o termo de massa se torna importante, e é pouco importante para  $p \gg m$ )

$$\bar{m}^2(p) = M^2 \bar{p}_m = m^2 \left(\frac{M}{p}\right)^2$$

Pensando em um sistema de mecânica estatística, lembremos que o comprimento de correlação desempenha o papel da massa deste campo escalar. Levando em conta a evolução desta massa podemos definir:

$$\xi \sim \bar{p}_0^{-1} \quad / \quad \bar{p}_m(p_0) = 1 \quad \therefore \quad \boxed{\bar{p}_m = 1 \Leftrightarrow p_0^2 = p_m M^2}$$

um momento específico (não confundir com a componente zero do momento)

$$\xi \sim \left(M^2 \bar{p}_m\right)^{-1/2} = m^{-1}$$

Usando o mesmo critério para definir  $\xi$  perto do ponto fixo  $\lambda^*$ , obtemos:

$$\frac{d}{d[\log(M/\mu)]} \bar{P}_m = \left( -2 + \gamma_{\phi^2}(\lambda^*) \right) \bar{P}_m \Rightarrow \boxed{\bar{P}_m = P_m \left( \frac{M}{\mu} \right)^{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda^*)}} \quad (\text{eq. 130.1})$$

$$\bar{P}_m(P_0) = 1 \Rightarrow P_m \left( \frac{M}{P_0} \right)^{\underbrace{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda^*)}_{V^{-1}}} = 1 \Rightarrow P_0^{V^{-1}} = P_m^{V^{-1}}$$

$$P_0 = P_m^V M$$

$$\boxed{\xi \sim P_m^{-V}}$$

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{16\pi^2}$$

$$\lambda_* = \frac{16\pi^2}{3} (4-d)$$

$$V^{-1} = 2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda^*) = 2 - \frac{\lambda^*}{16\pi^2} = 2 - \frac{1}{3} (4-d) + \mathcal{O}[(4-d)^2]$$

Wilson & Fisher mostraram que podemos obter o resto da expansão.

Comparando com o que obtivemos para o modelo de Landau:

$$\xi = [2k(T - T_c)]^{-1/2}$$

vemos que  $P_m$  é que desempenha o papel do parâmetro que mede a distância para a temperatura crítica, e  $V$  mede como o comprimento de correlação cresce conforme nos aproximamos desta temperatura:

$$P_m \sim (T - T_c) \Rightarrow \xi \sim (T - T_c)^{-V}$$

$$V = \frac{1}{2 - \frac{1}{3} (4-d) + \mathcal{O}[(4-d)^2]}$$

$$V \approx \frac{1}{2} \quad (\text{de acordo com o modelo de Landau})$$

↳ contruindo uma teoria escalar com simetria  $O(N)$  é possível mostrar que:

$$V^{-1} = 2 - \frac{N+2}{N+8} (4-d)$$

↳ com  $N$  campos escalares

O que nos permite descrever o comportamento perto do ponto crítico de diferentes materiais magnéticos:

$$N = 1 \Rightarrow \text{com eixo preferencial de magnetização}$$

$N = 2 \Rightarrow$  com plano preferencial de magnetização

$N = 3 \Rightarrow$  isotrópicos

E os valores previstos concordam bem com experimentos ( $d = 3$ ):

$N$	1	2	3
$\nu_{\text{TEOR}}$	0,6	0,63	0,65
$\nu_{\text{EXP}}$	0,64	0,67	0,71

Curiosamente, o comportamento crítico pode ser estudado para uma grande variedade de sistemas (flúidos, ligas binárias, superfluidos, ...). É um fato experimental que os expoentes perto do ponto crítico dependem apenas da dimensão da variável que flutua e não dos detalhes microscópicos. Isso pode parecer um milagre, mas do ponto de vista da teoria quântica de campos, é um fato natural, uma consequência direta do grupo de renormalização. Quando o sistema passa a ser dominado pela dinâmica de grandes distâncias restam apenas alguns operadores relevantes, e tudo fica muito simples. Esta idéia, levada para as teorias relativísticas, nos explica porque as teorias interessantes para física de partículas são renormalizáveis. Isto indica apenas que estamos longe do cut-off destas teorias.

Exponent	Landau	QFT	Lattice	Experiment	
$N = 1$ Systems:					
$\gamma$	1.0	1.241 (2)	1.239 (3)	1.240 (7)	binary liquid
				1.22 (3)	liquid-gas
				1.24 (2)	$\beta$ -brass
$\nu$	0.5	0.630 (2)	0.631 (3)	0.625 (5)	binary liquid
				0.65 (2)	$\beta$ -brass
$\alpha$	0.0	0.110 (5)	0.103 (6)	0.113 (5)	binary liquid
				0.12 (2)	liquid-gas
$\beta$	0.5	0.325 (2)	0.329 (9)	0.325 (5)	binary liquid
				0.34 (1)	liquid-gas
$\eta$	0.0	0.032 (3)	0.027(5)	0.016 (7)	binary liquid
				0.04 (2)	$\beta$ -brass
$N = 2$ Systems:					
$\gamma$	1.0	1.316 (3)	1.32 (1)		
$\nu$	0.5	0.670 (3)	0.674 (6)	0.672 (1)	superfluid $^4\text{He}$
$\alpha$	0.0	-0.007 (6)	0.01 (3)	-0.013 (3)	superfluid $^4\text{He}$
$N = 3$ Systems:					
$\gamma$	1.0	1.386 (4)	1.40 (3)	1.40 (3)	EuO, EuS
				1.33 (3)	Ni
				1.40 (3)	RbMnF <sub>3</sub>
$\nu$	0.5	0.705 (3)	0.711 (8)	0.70 (2)	EuO, EuS
				0.724 (8)	RbMnF <sub>3</sub>
$\alpha$	0.0	-0.115 (9)	-0.09 (6)	-0.011 (2)	Ni
$\beta$	0.5	0.365 (3)	0.37 (5)	0.37 (2)	EuO, EuS
				0.348 (5)	Ni
				0.316 (8)	RbMnF <sub>3</sub>
$\eta$	0.0	0.033 (4)	0.041 (14)		

# Invariância de Gauge para grupos não abelianos

## A geometria da Invariância de Gauge

(Peskin 15.1; Ryder 3.6)

Voltando um pouco para trás, sabemos que uma das formas de obter a QED consiste em exigir que a teoria para um campo fermiônico seja invariante sobre a transformação local:

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \Psi(x)$$

A Lagrangeana:  $\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi$  não é invariante e precisamos introduzir a derivada covariante:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\not{D}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi$$

(o que introduz um novo campo que se acopla com a corrente conservada, é vetorial, sem massa e tem a transformação esperada para o campo eletromagnético sob a simetria de gauge do eletromagnetismo)

O problema com a derivada usual fica claro se pensarmos na definição desta derivada:

$$\underbrace{h^\mu}_{\rightarrow \text{derivada na direção de } n} \partial_\mu \Psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\underbrace{\Psi(x + \epsilon n)}_{\downarrow} - \underbrace{\Psi(x)}_{\downarrow}]$$

Estes dois campos sofrem transformações diferentes já que

$$\alpha(x + \epsilon n) \neq \alpha(x)$$

$\partial_\mu \Psi$  não se transforma de uma forma simples sobre a simetria. Precisamos compensar a diferença de fase de forma a encontrar uma derivada que permita comparar os dois pontos no espaço e tenha uma transformação bem definida.

Definamos: (comparador)

$$\underbrace{U(y, x)}_{\rightarrow \text{escalar}} \xrightarrow{\text{transformação de Gauge}} e^{i\alpha(y)} U(y, x) e^{-i\alpha(x)}$$

$$U(y, y) = 1$$

Uma função que faz este serviço é:  $U(x, y) = e^{i\phi(x, y)} ; \phi(y, y) = 0$

temos então:

$$\Psi(y) \rightarrow e^{i\alpha(y)} \Psi(y)$$

$$U(y, x) \Psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(y)} U(y, x) \cancel{e^{-i\alpha(x)}} \cancel{e^{i\alpha(x)}} \Psi(x) = e^{i\alpha(y)} U(y, x) \Psi(y)$$

mesma transformação

Podemos comparar  $\psi(y)$  e  $U(y, x) \psi(x)$ , já que os dois se transformam com a mesma fase, e definir:

$$n^\mu D_\mu \psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi(x + \epsilon n) - U(x + \epsilon n, x) \psi(x)]$$

(eq. 133.1)

Usando  $U(x, y) = e^{i\phi(x, y)}$   $[U(x, y)]^\dagger = U(y, x) \rightarrow \phi(x, y) = -\phi(y, x)$

$$\phi(x, x) = 0$$

$$U(x, x) = 1$$

$$\phi(x + \epsilon n, x) = 0 + \underbrace{\left. \frac{d\phi}{d\epsilon n_\mu} \right|_{\epsilon n_\mu = 0}}_{-e A_\mu} \epsilon n_\mu + \mathcal{O}[(\epsilon n_\mu)^2]$$

$$U(x + \epsilon n, x) = 1 - i e \epsilon n^\mu A_\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

**Conexão** (pois aparece no limite infinitesimal de uma comparação entre transformações locais em pontos diferentes)

Voltando com esta definição na derivada covariante:

$$\begin{aligned} n^\mu D_\mu \psi &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi(x + \epsilon n) - (1 - i e \epsilon n^\mu A_\mu) \psi(x)] = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\underbrace{\psi(x + \epsilon n) - \psi(x)}_{n^\mu \partial_\mu \psi}] + i e n^\mu A_\mu \psi(x) \end{aligned}$$

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + i e A_\mu \psi$$

Podemos obter as transformações habituais para A:

$$\begin{aligned} U(y, x) &\rightarrow e^{i\alpha(y)} U(y, x) e^{-i\alpha(x)} \quad y = x + \epsilon n \\ 1 - i e \epsilon n^\mu A_\mu(x) &\rightarrow e^{i\alpha(x + \epsilon n)} [1 - i e \epsilon n^\mu A_\mu(x)] e^{-i\alpha(x)} \end{aligned}$$