Podemos comparar $\psi(y)$ e $U(y,x)\,\psi(x)$, já que os dois se transformam com a mesma fase, e definir:

$$\boxed{n^\nu D_\nu \psi = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\left[\psi(x+\epsilon n) - U(x+\epsilon n, x)\,\psi(x)\right]}$$

(eq. 133.1)

Usando $U(x,y) = e^{i\phi(x,y)}$ $\quad [U(x,y)]^\dagger = U(y,x) \rightarrow \phi(x,y) = -\phi(y,x)$

$\phi(x,x) = 0$

$U(x,x) = 1$

$$\phi(x+\epsilon n, x) = 0 + \underbrace{\left.\frac{\partial\phi}{\partial(\epsilon n_\nu)}\right|_{\epsilon n_\nu = 0}}_{-e\,A^\nu} \epsilon n_\nu + \mathcal{O}\left[(\epsilon n_\nu)^2\right]$$

$$U(x+\epsilon n, x) = 1 - i e \epsilon n^\nu \underbrace{A_\nu}_{\text{Conexão}} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Conexão (pois aparece no limite infinitesimal de uma comparação entre transformações locais em pontos diferentes)

Voltando com esta definição na derivada covariante:

$$n^\nu D_\nu \psi = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\left[\psi(x+\epsilon n) - (1 - i e \epsilon n^\nu A_\nu)\psi(x)\right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\left[\psi(x+\epsilon n) - \psi(x)\right]}_{n^\nu \partial_\nu \psi} + i e n^\nu A_\nu \psi(x)$$

$$D_\nu \psi = \partial_\nu \psi + i e A_\nu \psi$$

Podemos obter as transformações habituais para A:

$$\underbrace{U(y,x)}_{1 - i e \epsilon n^\nu A_\nu(x)} \longrightarrow e^{i\alpha(y)}\, U(y,x)\, e^{-i\alpha(x)} \qquad y = x + \epsilon n$$

$$1 - i e \epsilon n^\nu A_\nu(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x+\epsilon n)}\left(1 - i e \epsilon n^\nu A_\nu(x)\right) e^{-i\alpha(x)}$$

Com α também infinitesimal:

$$\cancel{1} - ie\epsilon n^{\nu}A_{\nu}(x) \to (1 + i\alpha(x+\epsilon n))(1 - ie\epsilon n^{\nu}A_{\nu}(x))(1 - i\alpha(x))$$

$$\to \cancel{1} + \underbrace{i\alpha(x+\epsilon n) - ie\epsilon n^{\nu}A_{\nu}(x) - i\alpha(x)}$$

$$= i\epsilon n^{\nu}\partial_{\nu}\alpha(x)$$

$$-\cancel{i}\,\cancel{e}\,\cancel{\epsilon}\,\cancel{n^{\nu}}A_{\nu}(x) \to \cancel{i}\,\cancel{\epsilon}\,\frac{\cancel{n^{\nu}}}{e}\partial_{\nu}\alpha(x) - \cancel{i}\,\cancel{e}\,\cancel{\epsilon}\,\cancel{n^{\nu}}A_{\nu}(x)$$

$$\boxed{A_{\nu}(x) \to A_{\nu}(x) - \frac{1}{e}\partial_{\nu}\alpha(x)} \qquad \text{(eq. 134.1)}$$

Podemos checar que estas definições nos levam a uma derivada que se transforma da forma desejada:

$$D_{\nu}\psi(x) = \left(\partial_{\nu}\psi(x) + ieA_{\nu}\psi(x)\right) \to \partial_{\nu}\left(e^{i\alpha(x)}\psi(x)\right) + ie\left[A_{\nu} - \frac{1}{e}\partial_{\nu}\alpha(x)\right]e^{i\alpha(x)}\psi(x) =$$

$$= e^{i\alpha(x)}\left\{\cancel{i\psi(x)\partial_{\nu}\alpha(x)} + \partial_{\nu}\psi(x) + ieA_{\nu}\psi(x) \cancel{- i\psi(x)\partial_{\nu}\alpha(x)}\right\}$$

$$D_{\nu}\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}D_{\nu}\psi(x)$$

(note que pensando na introdução de A como uma redefinição da derivada, temos uma forma clara de construir teorias invariantes por esta simetria, basta usar sempre derivadas covariantes)

Podemos também usar argumentos geométricos para construir um termo cinético para o campo introduzido. Para isso temos que achar um termo invariante construído com os campos A. Dado o comparador:

$$U(x,y) = e^{i\phi(x,y)}$$

$$\phi(x+\epsilon n, x) = \underbrace{\cancel{\phi(x,x)}}_{0} - eA^{\nu}(x)\epsilon n_{\nu} + \underbrace{\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial(\epsilon n_{\nu})\partial(\epsilon n_{\nu})}\right|_{\epsilon n=0}(\epsilon n_{\nu})(\epsilon n_{\nu})} + O\left[(\epsilon n_{\nu})^3\right] =$$

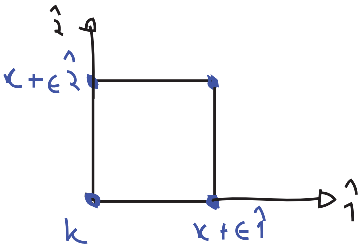
$$-eA^{\nu} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial(\epsilon n_{\nu})}\right|_{\epsilon n_{\nu}=0} \Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial(\epsilon n_{\nu})}\underbrace{\left(\frac{\partial\phi}{\partial(\epsilon n_{\nu})}\right)}_{-eA^{\nu}}(\epsilon n_{\nu})(\epsilon n_{\nu}) =$$

$$= -e\frac{\partial A^{\nu}}{\partial(\epsilon n_{\nu})}\left(\frac{\epsilon}{2}n_{\nu}\right)(\epsilon n_{\nu})$$

$$\phi(x+\epsilon n, x) = -e\epsilon n_\mu \Bigg(\underbrace{A^\mu(x) + \frac{\partial A^\mu}{\partial(\epsilon n_\nu)}\left(\frac{\epsilon}{2} n_\nu\right)}_{A^\mu\left(x+\frac{\epsilon}{2}n\right)} \Bigg) + \mathcal{O}\left[(\epsilon n_\mu)^3\right] =$$

$$U(x+\epsilon n, x) = \mathrm{Exp}\left[-ie\epsilon n_\mu A^\mu\left(x+\frac{\epsilon}{2}n\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3)\right]$$ (eq. 135.1)

Podemos construir um objeto invariante pensando em um caminho fechado. Por simplicidade pensemos em um plano definido por dois vetores: $\hat{1}$ e $\hat{2}$



O objeto: $$\mathcal{U}(x) \equiv U(x, x+\epsilon\hat{2})\, U(x+\epsilon\hat{2}, x+\epsilon\hat{1}+\epsilon\hat{2}) \times$$
$$\times\, U(x+\epsilon\hat{1}+\epsilon\hat{2}, x+\epsilon\hat{1})\, U(x+\epsilon\hat{1}, x)$$

é invariante

$$\mathcal{U}(x) \to \cancel{e^{i\alpha(x)}}\, U()\, \cancel{e^{-i\alpha(x+\epsilon\hat{2})}}\, \cancel{e^{-i\alpha(x+\epsilon\hat{2})}}\, U()\, \cancel{e^{-i\alpha(x+\epsilon\hat{1}+\epsilon\hat{2})}} \times$$
$$\times\, \cancel{e^{i\alpha(x+\epsilon\hat{1}+\epsilon\hat{2})}}\, U()\, \cancel{e^{-i\alpha(x+\epsilon\hat{1})}}\, \cancel{e^{i\alpha(x+\epsilon\hat{1})}}\, U()\, \cancel{e^{-i\alpha(x)}}$$

Usando a eq. 135.1, temos:

$$U(x, x+\epsilon n) = U^\dagger(x+\epsilon n, x) = \mathrm{Exp}\left[+ie\epsilon n_\mu A^\mu\left(x+\frac{\epsilon}{2}n\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3)\right]$$

$$\mathcal{U}(x) = \mathrm{Exp}\Big\{-ie\epsilon\Big[-\hat{2}_\mu A^\mu\left(x+\frac{\epsilon}{2}\hat{2}\right) - \hat{1}_\mu A^\mu\left(x+\epsilon\hat{2}+\frac{\epsilon}{2}\hat{1}\right)$$
$$+\hat{2}_\mu A^\mu\left(x+\epsilon\hat{1}+\frac{\epsilon}{2}\hat{2}\right) + \hat{1}_\mu A^\mu\left(x+\frac{\epsilon}{2}\hat{1}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3)\Big\}$$

$$\hat{1}_\mu A^\mu \equiv A_1 \qquad \hat{2}_\mu A^\mu \equiv A_2$$

$$\frac{1}{\epsilon}\left[A_2\left(x+\epsilon\hat{1}+\frac{\epsilon}{2}\hat{2}\right) - A_2\left(x+\frac{\epsilon}{2}\hat{2}\right)\right] = \partial_1 A_2\left(x+\frac{\epsilon}{2}\hat{2}\right)$$

$$\mathcal{U}(x) = \mathrm{Exp}\left\{-ie\epsilon^2\left[\partial_1 A_2\left(x+\frac{\epsilon}{2}\hat{2}\right) - \partial_2 A_1\left(x+\frac{\epsilon}{2}\hat{1}\right)\right] + \mathcal{O}(\epsilon^3)\right\}$$

$$\mathcal{U}(x) = 1 - ie\epsilon^2\underbrace{\left[\partial_1 A_2(x) - \partial_2 A_1(x)\right]}_{} + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

tem que ser invariante, $\hat{1}$ e $\hat{2}$ podiam ter sido quaisque duas direções

$\therefore\ F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é invariante

(field strength tensor)

Poderiamos ter chegado no mesmo termo invariante pensando nas segundas derivadas do campo:

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi(x)$$

$$D_\nu [\underbrace{D_\mu \psi(x)}] \rightarrow e^{i\alpha(x)} D_\nu D_\mu \psi(x)$$

basta pensar nisso como um novo campo com a mesma transformação de ψ

o mesmo vale trocando μ por ν, logo...

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} [D_\mu, D_\nu]\psi(x)$$

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x) = \underbrace{[\partial_\mu, \partial_\nu]}_{=0}\psi(x) + ie[A_\mu, \partial_\nu]\psi(x) + ie[\partial_\mu, A_\nu]\psi(x) - e^2\underbrace{[A_\mu, A_\nu]}_{=0}\psi(x) =$$

$\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$ CANCELAMENTO CANCELAMENTO

$$= ie A_\mu \partial_\nu \psi - ie\, \partial_\nu [A_\mu \psi] + ie\, \partial_\mu [A_\nu \psi] - ie A_\nu \partial_\mu \psi =$$

$$= -ie \psi\, \partial_\nu A_\mu + ie \psi\, \partial_\mu A_\nu$$

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x) = ie F_{\mu\nu} \psi(x)$$

$$F_{\mu\nu} \psi(x) \rightarrow F_{\mu\nu} e^{i\alpha x} \psi(x)$$

Transformação usual de ψ

Invariante

Juntando agora todos estes termos podemos construir facilmente a Lagrangeana invariante mais geral (renormalizável):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D})\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - \underbrace{i c\, \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}}_{\text{viola P e T}} - m\bar{\psi}\psi$$

(também estamos exigindo que seja um escalar de Lorentz)

Notem que só postulando um conteúdo de matéria (o férmion) e argumentos de simetria (como o férmion se transforma e exigindo invariâncias da Lagrangeana), obtivemos a Lagrangeana da QED.

Teoria de Yang-Mills

(Peskin 15.2; Ryder 3.5)

Suponha que tenhamos agora um dubleto de férmions:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$$

para cada ponto do espaço associa 2 spinores, em termos de índices:

$$\psi(x) = \psi^a_\alpha(x)$$

$a = 1,2$ (índice de isospin)

$\alpha = 1,2,3,4$ (índice spinorial)

para um total de 8 componentes

que se transforma segundo:

$$\boxed{\psi(x) \longrightarrow \mathrm{Exp}\left(i\alpha_j \frac{\sigma^j}{2}\right)\psi}$$

(eq. 137.1)

$j = 1, 2, 3$

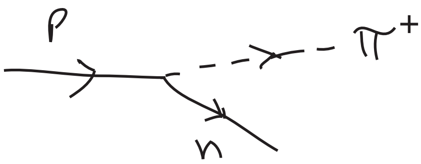
σ_j matrizes de Pauli

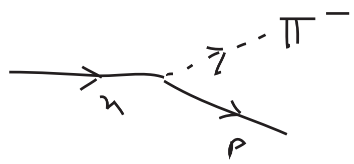
É como a rotação de spins em três dimensões, grupo SU(2) ou O(3)

Um dubleto deste tipo pode ser útil para descrever qualquer teoria onde tenhamos um par de férmions praticamente idênticos (só podem ser diferenciados usando alguma outra interação, que é desprezível para o que estamos querendo descrever), especialmente se a interação em questão pode transforma uma na outra, efetivamente mudando o estado do dubleto. Um bom exemplo é o nucleon:

$$N(x) = \begin{pmatrix} p(x) \\ n(x) \end{pmatrix}$$

O próton e neutron podem ser diferenciados pela carga, mas a QED é muito fraca quando comparada com a força nuclear. Além disso temos os vértices:





$$\begin{pmatrix} p(x) \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ n(x) \end{pmatrix} + \pi^+ \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ n(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} p(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \pi^-$$

Promovamos agora a simetria de 137.1 a uma simetria local:

$$\boxed{\psi(x) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Exp}\left(i\alpha_j(x) \frac{\sigma^j}{2}\right)}_{V(x)}\psi(x) = V(x)\,\psi(x)}$$

(eq. 137.2)

Notem que agora temos três “direções” para transformar y (j=1, 2 ou 3), e que transformações em direções diferentes não comutam:

$$\sigma_1 \sigma_2 \psi(x) \neq \sigma_2 \sigma_1 \psi(x)$$

temos uma Teoria de Gauge não-Abeliano

Para construir invariantes usaremos o mesmo método usado nas páginas 132-135. Como o espinor tem duas componentes, agora o comparador deve ser uma matriz 2x2:

$$U(y,x) \longrightarrow V(y)\,U(y,x)\,V^\dagger(x) \qquad U(y,y) = \hat{1}$$

exigiremos que: $x \neq y \Rightarrow U^{\dagger}U = \hat{1}$

$$U(x+\epsilon n, x) = 1 + ig\epsilon n^{\mu} \underbrace{A_{\mu}^{i}}_{\text{Três campos de Gauge}} \frac{\sigma^{i}}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^{2})$$

inserindo isto em 133.1 temos:

$$n^{\mu} D_{\mu}\psi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}\left[\psi(x+\epsilon n) - U(x+\epsilon n, x)\,\psi(x)\right] =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}\left[\psi(x+\epsilon n) - \left(1 + ig\epsilon n^{\mu} A_{\mu}^{i}\frac{\sigma^{i}}{2}\right)\psi(x)\right] =$$

$$= n^{\mu}\left[\partial_{\mu} - ig A_{\mu}^{i}\frac{\sigma^{i}}{2}\right]\psi \Rightarrow \boxed{D_{\mu} = \partial_{\mu} - ig A_{\mu}^{i}\frac{\sigma^{i}}{2}} \quad \text{(eq. 138.1)}$$

Podemos obter a transformação dos A:

$$U(x+\epsilon n, x) \to V(x+\epsilon n)\,U(x+\epsilon n, x)\,V^{\dagger}(x)$$

$$\left(1 + ig\epsilon n^{\mu} A_{\mu}^{i}\frac{\sigma^{i}}{2}\right) \to V(x+\epsilon n)\Big(\underbrace{1}_{\mathrm{I}} + \underbrace{ig\epsilon n^{\mu} A_{\mu}^{i}\frac{\sigma^{i}}{2}}_{\mathrm{II}}\Big)V^{\dagger}(x)$$

$V(x)V^{\dagger}(x) = \hat{1}$ $\qquad$ $\partial_{\mu}\left(V(x)V^{\dagger}(x)\right) = 0$

$$\mathrm{I} \Rightarrow V(x+\epsilon n)V^{\dagger}(x) = \left[\left(1 + \epsilon n^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \mathcal{O}(\epsilon^{2})\right)V(x)\right]V^{\dagger}(x) = 1 + \epsilon n^{\mu}\left(\partial_{\mu}V(x)\right)V^{\dagger}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^{2}) =$$

$$= 1 \underbrace{- \epsilon n^{\mu} V(x)\,\partial_{\mu}V^{\dagger}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^{2})}_{\mathrm{III}}$$

$$\mathrm{II} + \mathrm{III} \Rightarrow ig\epsilon n^{\mu} A_{\mu}^{i}\frac{\sigma^{i}}{2} \to -\epsilon n^{\mu} V(x)\,\partial_{\mu}V^{\dagger}(x) + ig\epsilon n^{\mu} A_{\mu}^{i}\underbrace{V(x+\epsilon n)}_{1+\mathcal{O}(\epsilon)}\frac{\sigma^{i}}{2}V^{\dagger}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^{2})$$

$$ig A_{\mu}^{i}\frac{\sigma^{i}}{2} \to V(x)\left[-\partial_{\mu} + ig A_{\mu}^{i}\frac{\sigma^{i}}{2}\right]V^{\dagger}(x)$$

$$A_{\mu}^{i}\frac{\sigma^{i}}{2} \to V(x)\left[A_{\mu}^{i}\frac{\sigma^{i}}{2} + \frac{i}{g}\partial_{\mu}\right]V^{\dagger}(x)$$

$$\alpha^{i} \sim 0 \Rightarrow A_{\mu}^{i}\frac{\sigma^{i}}{2} \to \left[1 + i\alpha^{j}\frac{\sigma^{j}}{2} + \mathcal{O}(\alpha^{2})\right]\left[A_{\mu}^{i}\frac{\sigma^{i}}{2} + \frac{i}{g}\partial_{\mu}\right]\left[1 - i\alpha^{k}\frac{\sigma^{k}}{2} + \mathcal{O}(\alpha^{2})\right] =$$

$$= A_{\mu}^{i}\frac{\sigma^{i}}{2} + \frac{1}{g}\left(\partial_{\mu}\alpha^{k}\right)\frac{\sigma^{k}}{2} + i\alpha^{j}\frac{\sigma^{j}}{2}A_{\mu}^{i}\frac{\sigma^{i}}{2} - iA_{\mu}^{i}\frac{\sigma^{i}}{2}\alpha^{k}\frac{\sigma^{k}}{2} + \mathcal{O}(\alpha^{2}) =$$

$$= A_{\mu}^{i}\frac{\sigma^{i}}{2} + \frac{1}{g}\left(\partial_{\mu}\alpha^{i}\right)\frac{\sigma^{i}}{2} + \underbrace{i\left[\alpha^{j}\frac{\sigma^{j}}{2}, A_{\mu}^{i}\frac{\sigma^{i}}{2}\right]} + \mathcal{O}(\alpha^{2})$$

A novidade está aqui (no caso Abeliano o gerador era a identidade e isto dava zero)

Não é difícil mostrar que:

$$D_\mu \psi \rightarrow \mathrm{Exp}\left(i\alpha_j \frac{\sigma^j}{2}\right) D_\mu \psi = V(x)\, D_\mu \psi$$

Para construir uma lagrangeana completa invariante sobre esta simetria devemos encontrar também um termo envolvendo somente os campos (o que fizemos antes por meio do caminho fechado na pg 135 e por meio do comutador da derivada covariante na pg 136). Neste caso fica mais fácil usar o comutador:

$$[D_\mu, D_\nu]\,\psi(x) \rightarrow V(x)[D_\mu, D_\nu]\,\psi(x)$$ (mesma lógica da pg 136)

O comutador, por sua vez:

$$\boxed{[D_\mu, D_\nu]\psi(x)} = \underbrace{[\partial_\mu, \partial_\nu]\psi(x)}_{\overset{\shortparallel}{0}\;\; \partial_\mu\partial_\nu = \partial_\nu\partial_\mu} - ig\left[A^i_\mu \frac{\sigma^i}{2}, \partial_\nu\right]\psi(x) - ig\left[\partial_\mu, A^i_\nu \frac{\sigma^i}{2}\right]\psi(x) \underbrace{- g^2\left[A^i_\mu \frac{\sigma^i}{2}, A^j_\nu \frac{\sigma^j}{2}\right]\psi(x)}_{\text{este termo era zero na teoria Abeliana}} =$$

$$A^m_\mu = A^i_\mu \frac{\sigma^i}{2}$$

CANCELAMENTO CANCELAMENTO

$$= -ig A^m_\mu \partial_\nu \psi + ig\, \partial_\nu (A^m_\mu \psi) - ig\, \partial_\mu (A^m_\nu \psi) + ig A^m_\nu \partial_\mu \psi - g^2 [A^m_\mu, A^m_\nu]\psi =$$

$$= ig(\partial_\nu A^m_\mu)\psi - ig(\partial_\mu A^m_\nu)\psi - g^2[A^m_\mu, A^m_\nu]\psi =$$

$$= -ig\left\{\underbrace{\partial_\mu A^m_\nu - \partial_\nu A^m_\mu - ig[A^m_\mu, A^m_\nu]}_{F^m_{\mu\nu} = F^i_{\mu\nu}\frac{\sigma^i}{2}}\right\}\psi(x) = \boxed{-ig\, F^m_{\mu\nu}\,\psi(x)} \qquad \text{(eq. 139.1)}$$

(field strength tensor)

$$F^i_{\mu\nu}\frac{\sigma^i}{2} \equiv \partial_\mu A^i_\nu \frac{\sigma^i}{2} - \partial_\nu A^i_\mu \frac{\sigma^i}{2} - ig\left[A^i_\mu \frac{\sigma^i}{2}, A^j_\nu \frac{\sigma^j}{2}\right]$$

$$-ig\left[A^i_\mu \frac{\sigma^i}{2}, A^j_\nu \frac{\sigma^j}{2}\right] = -ig\, A^i_\mu A^j_\nu \underbrace{\left[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2}\right]}_{i\epsilon^{ijk}\frac{\sigma^k}{2}} = \underbrace{g A^i_\mu A^j_\nu \epsilon^{ijk}\frac{\sigma^k}{2}}_{\text{renomeando: } k\to i,\ i\to j,\ j\to k}$$

$$\boxed{F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g\,\epsilon^{ijk} A^j_\mu A^k_\nu} \qquad \text{(eq. 139.2)}$$

A transformação do tensor vem de:

$$[D_\mu, D_\nu]\,\psi(x) \rightarrow V(x)[D_\mu, D_\nu]\,\psi(x)$$