

$$D_\mu \psi \rightarrow \exp\left(i\alpha_j \frac{\sigma^j}{2}\right) D_\mu \psi = V(x) D_\mu \psi$$

Para construir uma lagrangeana completa invariante sobre esta simetria devemos encontrar também um termo envolvendo somente os campos (o que fizemos antes por meio do caminho fechado na pg 135 e por meio do comutador da derivada covariante na pg 136). Neste caso fica mais fácil usar o comutador:

$$[D_\mu, D_\nu] \psi(x) \rightarrow V(x) [D_\mu, D_\nu] \psi(x) \quad (\text{mesma lógica da pg 136})$$

O comutador, por sua vez:

$$[D_\mu, D_\nu] \psi(x) = \underbrace{[D_\mu, D_\nu] \psi(x)}_{\substack{\circ \\ D_\mu D_\nu = D_\nu D_\mu}} - ig [A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}, D_\nu] \psi(x) - ig [D_\mu, A_\nu^i \frac{\sigma^i}{2}] \psi(x) - g^2 [A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}, A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2}] \psi(x) =$$

este termo era zero na teoria Abelianas

$$A_\mu^i = A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \quad \begin{matrix} \swarrow \text{CANCELAMENTO} \\ \searrow \text{CANCELAMENTO} \end{matrix}$$

$$= -ig A_\mu^i D_\nu \psi + ig D_\nu (A_\mu^i \psi) - ig D_\mu (A_\nu^i \psi) + ig A_\nu^i D_\mu \psi - g^2 [A_\mu^i, A_\nu^j] \psi =$$

$$= ig (D_\nu A_\mu^i) \psi - ig (D_\mu A_\nu^i) \psi - g^2 [A_\mu^i, A_\nu^j] \psi =$$

$$= -ig \left\{ D_\mu A_\nu^i - D_\nu A_\mu^i - ig [A_\mu^j, A_\nu^k] \right\} \psi(x) = -ig F_{\mu\nu}^i \psi(x) \quad (\text{eq. 139.1})$$

$$F_{\mu\nu}^i = F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} \quad (\text{field strength tensor})$$

$$F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} \equiv D_\mu A_\nu^i \frac{\sigma^i}{2} - D_\nu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - ig [A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2}, A_\nu^k \frac{\sigma^k}{2}]$$

$$- ig [A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2}, A_\nu^k \frac{\sigma^k}{2}] = -ig A_\mu^j A_\nu^k \left[\frac{\sigma^j}{2}, \frac{\sigma^k}{2} \right] = g A_\mu^j A_\nu^k \epsilon^{ijk} \frac{\sigma^i}{2}$$

renomeando: $k \rightarrow i$
 $i \rightarrow j$
 $j \rightarrow k$

$$F_{\mu\nu}^i = D_\mu A_\nu^i - D_\nu A_\mu^i + g \epsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k \quad (\text{eq. 139.2})$$

A transformação do tensor vem de:

$$[D_\mu, D_\nu] \psi(x) \rightarrow V(x) [D_\mu, D_\nu] \psi(x)$$

$$-ig \underbrace{F_{\mu\nu}^M}_{\text{L?}} \psi(x) \rightarrow -ig \underbrace{V(x) F_{\mu\nu}^M}_{\text{V(x) } \psi(x)} \underbrace{V^\dagger(x)}_{\text{(ref)}} \psi(x) = -ig V(x) F_{\mu\nu}^M \psi(x)$$

$$F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} \rightarrow V(x) F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} V^\dagger(x)$$

versão infinitesimal:

$$F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} \rightarrow F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} + \left[\alpha^i \frac{\sigma^i}{2}, F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} \right]$$

Note que o tensor não é mais invariante por transformações de gauge. Não é difícil, no entanto, construir invariantes. De 140.1:

$$\text{Tr} \left[F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} F^{\mu\nu j} \frac{\sigma^j}{2} \right] \rightarrow \text{Tr} \left[V(x) F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} V^\dagger(x) V(x) F^{\mu\nu j} \frac{\sigma^j}{2} V^\dagger(x) \right]$$

além disso:

$$\text{Tr} \left[F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} F^{\mu\nu j} \frac{\sigma^j}{2} \right] = \frac{F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu j}}{4} \underbrace{\text{Tr}[\sigma^i \sigma^j]}_{2\delta_{ij}} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu i} \equiv \frac{1}{2} (F_{\mu\nu}^i)^2$$

De forma que o termo apropriado para a Lagrangeana pode ser escrito como:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[F_{\mu\nu}^M F^{\mu\nu M} \right] = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^i)^2$$

(eq. 139.2)

Note que aqui temos termos cúbicos e quarticos nos campos de gauge. Eles interagem entre si! Podemos construir uma teoria só com campos de Gauge se quisermos, chamada de Teoria de Yang-Mills

Podemos, é claro, também construir uma teoria com os campos de Yang-Mills acoplados a férmions:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{D}) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^i)^2 - m \bar{\psi} \psi$$

Dois parâmetros: (1) m
(2) g

Observe que a interação férmion-bóson e a interação bóson-bóson são ambas proporcionais a mesma constante:

$$\bar{\psi} \left[i(-ig \gamma^\mu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}) \right] \psi$$

$$\left(\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g \epsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k \right)^2$$

obs: essa lagrangeana era conhecida como Lagrangeana de Yang-Mills. Mas no jargão moderno, "Teorias de Yang-Mills" se referem a lagrangeanas somente com campos de Gauge (sem férmions ou escalares)

→ todos os termos com 3 ou 4 campos vão estar multiplicados por g

As equações de movimento clássicas para os campos A_μ^i são dadas por:

$$\partial^\nu F_{\nu\mu}^i + g \epsilon^{ijk} A^j{}^\nu F_{\nu\mu}^k = -g \bar{\Psi} \gamma_\mu \frac{\sigma^i}{2} \Psi$$

Outros grupos não abelianos

Poderíamos ter seguido os mesmos passos para outras simetrias além de SU(2), as modificações no procedimento são mínimas desde que:

- (1) As transformações formem um grupo contínuo
- (2) Este grupo seja representado por um conjunto de matrizes V , unitárias e $n \times n$

Neste caso, o campo fermiônico vai ser um objeto de n componentes com a transformação:

$$\Psi(x) \rightarrow \underbrace{V(x)}_{\text{LOCAL}} \Psi(x)$$

$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \vdots \\ \Psi_n(x) \end{pmatrix}$

$\bar{\Psi} \propto \bar{\Psi}^i(x) (n \times n) \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \vdots \\ \Psi_n(x) \end{pmatrix}$

Como o grupo é contínuo, podemos escrever V na forma infinitesimal:

$$V(x) = 1 + i \alpha^a(x) t^a + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

$V(x) \Psi(x) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \vdots \\ \Psi_n(x) \end{pmatrix} + i \alpha^1(x) \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \vdots \\ \Psi_n(x) \end{pmatrix} + \dots$

$+ i \alpha^2(x) \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \vdots \\ \Psi_n(x) \end{pmatrix} + \dots$

Com esta expressão em mãos podemos fazer tudo que fizemos para SU(2), basta trocar $\frac{\sigma^i}{2} \rightarrow t^a$ de forma que teremos estas matrizes t ao invés das matrizes de Pauli.

Agora, por exemplo, definimos: $A_\mu^M \equiv A_\mu^a t^a$

O único lugar em que usamos explicitamente uma propriedade das matrizes de Pauli foi um pouco antes da equação 139.2, onde usamos o comutador destas matrizes. Podemos generalizar esta idéia para as matrizes t^a (lembrando que elas geram um grupo):

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c \quad (\text{eq. 141.1})$$

\hookrightarrow Constantes de estrutura
(é sempre possível encontrar uma base para as matrizes t^a na qual f^{abc} é completamente antissimétrica)

o equivalente de 139.2 seria:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (\text{eq. 141.2})$$

Todo o resto fica muito semelhante. As transformações (infinitesimais) dos campos são:

$$\Psi \rightarrow (1 + i \alpha^a t^a) \Psi \quad (\text{eq. 142.1})$$

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A_\mu^b \alpha^c \quad (\text{eq. 142.2})$$

Já a versão finita é dada por:

$$\Psi(x) \rightarrow V(x) \Psi(x) \quad (\text{eq. 142.3})$$

$$A_\mu^a t^a \rightarrow V(x) \left(A_\mu^a t^a + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) V^\dagger(x) \quad (\text{eq. 142.4})$$

A derivada covariante se transforma da mesma forma que o campo fermiônico e o tensor de gauge é definido por:

$$[D_\mu, D_\nu] = -i g F_{\mu\nu}^a t^a \quad (\text{eq. 142.5})$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

É não é invariante, mas se transforma (infinitesimalmente) segundo:

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow F_{\mu\nu}^a - f^{abc} \alpha^b F_{\mu\nu}^c \quad (\text{eq. 142.6})$$

E construímos a Lagrangeana invariante da mesma forma que fizemos antes:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i \not{D}) \Psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 - m \bar{\Psi} \Psi \quad (\text{eq. 142.7})$$

exigindo que $\text{Tr}[t^a t^b] = \frac{\delta^{ab}}{2}$

De onde obtemos a equação de movimento:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + g f^{abc} A_\mu^b F_{\mu\nu}^c = -g j_\nu^a \quad (\text{eq. 142.8})$$

$$j_\nu^a = \bar{\Psi} \gamma_\nu t^a \Psi \quad \text{Corrente conservada} \quad (\text{eq. 142.9})$$

O Loop de Wilson

(Peskin 15.3)

Voltemos à discussão do caminho fechado que estudamos na página 135. Concluímos que, apesar de voltarmos ao mesmo ponto, o produto de comparadores não era trivial (= 1). De fato obtivemos (pág 135):

$$U(x) = 1 - i e \epsilon^2 \underbrace{F_{\mu\nu}(x)}_{\text{field strength}} + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

o valor de μ e ν depende do plano em que colocamos o caminho
 área do quadrado

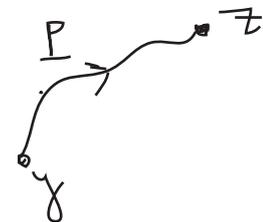
Essa conclusão foi tirada para o caso infinitesimal, mas ela mostra uma verdade mais geral: o comparador entre dois pontos x e y , depende do caminho tomado entre os pontos. Para isto ficar claro, podemos partir da conexão: A_μ (estamos de volta no caso Abelian, por enquanto)

com a apropriada lei de transformação (eq. 134.1) e a partir dela construir um comparador que tenha a transformação adequada:

$$U(x, y) \rightarrow e^{i\alpha(y)} U(y, x) e^{-i\alpha(x)}$$

De fato:

$$U_P(z, y) = \exp \left[-i e \int_P dx^\mu A_\mu(x) \right]$$



(eq. 143.1)

$$U_P(z, y) \rightarrow \text{EXP} \left[-i e \int_P dx^\mu \left(A_\mu(x) - \frac{1}{e} d_\mu \alpha(x) \right) \right] =$$

$$= \text{EXP} \left[-i e \int_P dx^\mu A_\mu(x) + i \alpha(x) \right] = e^{i\alpha(y)} U_P(z, y) e^{-i\alpha(x)}$$

Logo, este objeto (chamado de **Linha de Wilson (Wilson Line)**) é uma realização concreta (para distâncias quaisquer) do comparador abstrato que vínhamos usando (e que acabávamos usando só no limite infinitesimal)

De fato, todas as propriedades que demos para $U(x, y)$ e $\phi(x, y)$ na páginas 132 e 133 estão satisfeitas por: $\phi(z, y) = -e \int_P dx^\mu A_\mu(x)$

A linha de Wilson que começa e termina no mesmo ponto é chamada de **Loop de Wilson**:

$$U_P(y, y) = \text{EXP} \left[-i e \oint_P dx^\mu A_\mu(x) \right]$$

(eq. 143.2)

Assim como no caso do caminho fechado da página 135, este loop é invariante de Gauge. Podemos reescrevê-lo na forma:

$$U_P(y, y) = \text{EXP} \left[-ie \int_{\Sigma} d\sigma^{\mu\nu} \partial_\nu A_\mu(x) \right] = \text{EXP} \left[-ie \int_{\Sigma} d\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right]$$

↪ Superfície gerada pelo Loop ↪ Elemento de área nesta superfície ↪ $\sigma^{\mu\nu}$ é anti-simétrico

vemos que o Loop de Wilson é dado pela integral do fluxo do field strength pela área do loop. Isso nos mostra que podemos usar o Loop de Wilson como elemento invariante básico para construir lagrangeanas (como antes fazíamos com F).

A generalização do Linha e do Loop de Wilson para teorias não Abelianas requer um certo cuidado. A linha deve agora se transformar conforme:

$$U_L(y, x) \rightarrow V(y) U_L(y, x) V^\dagger(x)$$

não podemos fazer a simples analogia ao que usamos em 143.1: $U_L(y, y) \neq \text{EXP} \left[ig \int_P dx^\mu A_\mu^a(x) t^a \right]$

porque esta exponencial, definida por sua série, conteria termos do tipo:

$$-g^2 \int_P dx_1^\mu \int_P dx_2^\nu \underbrace{A_\mu^a(x_1) t^a}_{A_\mu^a(x_1)} \underbrace{A_\nu^b(x_2) t^b}_{A_\nu^b(x_2)}$$

↪ na região em que, ao longo da linha, passamos por x_1 antes de passar por x_2 , deveríamos ter $A_\mu^a(x_2) A_\nu^b(x_1) \neq A_\nu^b(x_1) A_\mu^a(x_2)$

$$\left(A_\mu^a(x) \rightarrow V(x) \left(A_\mu^a(x) + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) V^\dagger(x) \right)$$

a forma de corrigir isto é definir uma parametrização para a linha $S(x) \begin{cases} S(y) = 0 & x(0) = y \\ S(x) = 1 & x(1) = x \end{cases}$

e definir uma Path-Ordered Exponential:

$$U_L(y, x) = P \left\{ \text{EXP} \left[ig \int_0^1 ds \frac{dx^\mu}{ds} A_\mu^a(x(s)) t^a \right] \right\} \equiv \text{(eq. 144.1)}$$

$$\equiv 1 + ig \int_0^1 ds \frac{dx^\mu}{ds} A_\mu^a(x(s)) t^a - \frac{g^2}{2} \int_0^1 ds \frac{dx^\mu}{ds} \int_0^s ds' \frac{dx^\nu}{ds'} A_\mu^a(x(s)) A_\nu^b(x(s')) t^a t^b + \dots$$

note que sempre vale $s' < s$