$$U_P(y,y) = \mathrm{EXP}\Big[-ie\int_{\underbrace{\Sigma}_{\text{Superfície gerada pelo Loop}}} \underbrace{d\sigma^{\mu\nu}}_{\text{Elemento de área nesta superfície}}\, \partial_\nu A_\mu(x)\Big] = \mathrm{EXP}\Big[-\frac{ie}{2}\int_\Sigma d\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\Big]$$

$\sigma^{\mu\nu}$ é anti-simétrico

vemos que o Loop de Wilson é dado pela integral do fluxo do field strength pela área do loop. Isso nos mostra que podemos usar o Loop de Wilson como elemento invariante básico para construir lagrangeanas (como antes fazíamos com F).

A generalização do Linha e do Loop de Wilson para teorias não Abelianas requer um certo cuidado. A linha deve agora se transformar conforme:

$$U_P(y,x) \longrightarrow V(y)\, U_P(y,x)\, V^\dagger(x)$$

não podemos fazer a simples analogia ao que usamos em 143.1: $U_P(y,y) \neq \mathrm{EXP}\left[ig\int_P dx^\mu A^a_\mu(x) t^a\right]$

porque esta exponencial, definida por sua série, conteria termos do tipo:

$$-g^2\int_P dx_1^\mu \int_P dx_2^\nu \underbrace{A^a_\mu(x_1)t^a}_{A^M_\mu(x_1)}\underbrace{A^b_\nu(x_2)t^b}_{A^M_\nu(x_2)}$$

→ na região em que, ao longo da linha, passamos por x_1 antes de passar por x_2, deveríamos ter $A^M_\nu(x_2)\, A^M_\mu(x_1) \neq A^M_\mu(x_1)\, A^M_\nu(x_2)$

$$\left(A^M_\mu(x) \longrightarrow V(x)\left(A^M_\mu(x) + \frac{i}{g}\partial_\mu\right)V^\dagger(x)\right)$$

a forma de corrigir isto é definir uma parametrização para a linha

$$s(x)\begin{cases} s(y) = 0 \\ s(y) = 1\end{cases} \qquad \begin{matrix} x(0) = y \\ x(1) = y\end{matrix}$$

e definir uma Path-Ordered Exponential:

$$\boxed{U_P(y,y) = P\left\{\mathrm{EXP}\left[ig\int_0^1 ds\,\frac{dx^\mu}{ds}\,A^M_\mu(x(s))\right]\right\}} \equiv \qquad \text{(eq. 144.1)}$$

$$\equiv 1 + ig\int_0^1 ds\,\frac{dx^\mu}{ds}\,A^M_\mu(x(s)) - \frac{g^2}{2}\underbrace{\int_0^1 ds\,\frac{dx^\mu}{ds}\int_0^s ds'}_{}\,\frac{dx^\nu}{ds'}\,A^M_\mu(x(s))\,A^M_\nu(x(s')) + \dots$$

note que sempre vale $s' < s$

Isto é muito semelhante ao que fizemos para o ordenamento temporal, com s fazendo o papel do tempo. A linha de Wilson assim definida é solução da seguinte equação (basta derivar cada termo da série e notar que isto resulta no termo anterior multiplicado pelo fator abaixo):

$$\frac{d}{ds} U_P(x(s),y) = \left(ig \frac{dx^\mu}{ds} A^a_\mu(x(s))\, t^a \right) U_P(x(s),y)$$

Devemos mostrar que este objeto tem a transformação adequada. Podemos reescrever esta equação na forma:

$$\frac{dx^\mu}{ds}\frac{d}{dx^\mu} U_P(x(s),y) = \left(ig \frac{dx^\mu}{ds} A^a_\mu(x(s))\, t^a \right) U_P(x(s),y)$$

$$\frac{dx^\mu}{ds}\left(\partial_\mu - ig A^a_\mu t^a \right) U_P(x(s),y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dx^\mu}{ds} D_\mu U_P(x,y) = 0}$$ (eq. 145.1)

Sob a transformação de Gauge: $A^m_\mu \longrightarrow A'^m_\mu = V(x)\left(A^m_\mu(x) + \frac{i}{g}\partial_\mu \right) V^\dagger(x)$

Queremos mostrar que: $U_P(z,y,A^m_\mu) \to \boxed{U_P(z,y,A'^m_\mu) = V(z)\, U_P(z,y,A^m_\mu)\, V(y)}$

(eq. 145.2)

Sabemos que: $D_\mu \psi(x) \longrightarrow V(x) D_\mu \psi(x)$, explicitando a dependência em A:

$$D_\mu(A^m_\mu)\psi(x) \longrightarrow D_\mu(A'^m_\mu)V(x)\psi(x) = V(x) D_\mu(A^m_\mu)\psi(x)$$

logo: $D_\mu(A'^m_\mu)V(x) = V(x) D_\mu(A^m_\mu)$

então: $D_\mu(A'^m_\mu)\underbrace{V(z)\, U_P(z,y,A^m_\mu)V(y)}_{\text{RHS. DE 145.2}} = V(z) D_\mu(A^m_\mu) U_P(z,y,A^m_\mu) V(y)$

$\frac{\partial}{\partial z^\mu}$

esta expressão é zero se $D_\mu(A^m_\mu)U_P(z,y,A^m_\mu) = 0$

Isto mostra que $U_P(z,y,A^m_\mu)$ e $U_P(z,y,A'^m_\mu)$ (definido por 145.2) ambos satizfazem a equação 145.1 (com a derivada covariante transformada de A para A'). Como a solução da equação diferencial é única, concluímos que a lei de transformação 145.2 está correta.

O caminho fechado neste caso não será invariante, mas terá a transformação:

$$U_P(y,y) \longrightarrow V(y)\, U_P(y,y)\, V^\dagger(y)$$

mas o traço é: $Tr\left[U_P(y,y)\right] \to Tr\left[\cancel{V(y)}\, U_P(y,y)\, \cancel{V^\dagger(y)}\right]$

Por isso, o que chamamos de Loop de Wilson em teorias não-Abelianas é o traço da linha de Wilson em um caminho fechado. Usando a invariancia do loop de Wilson podemos mostrar a invariância de $(F^a_{\mu\nu})^2$ basta considerar a transformação sobre um caminho simples e infinitesimal (um pequeno quadrado, como na página 135), isto está feito no Peskin, pg 494.

Quantização de Teorias não-Abelianas

(Ryder 7.1-7.2, Peskin 16.1-16.2)

Queremos agora quantizar a teoria obtida para um campo de gauge não-abeliano:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2$$

o que significa obter os correlatores a partir do funcional gerador abaixo:

$$Z[J] = \frac{1}{N}\int DA^a_\mu \; e^{i\int d^4x\,\left(\mathcal{L}_{YM} + J^\mu_a A^a_\mu\right)}$$

Lembrando rapidamente do caso abeliano, tínhamos (Peskin 9.4):

$$Z[J] = \frac{1}{N}\int DA_\mu \; e^{i\int (\mathcal{L} + J^\mu A_\mu)\, d^4x}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) =$$

basta usar integração por parte para passar as derivadas de um lado para outro

$$= \frac{1}{2}A^\mu \underbrace{\left(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\nu\partial_\mu\right)}\, A^\nu$$

$$\left(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu\right)A^\nu = 0 \quad \text{(eq. de Maxwell)}$$

Em princípio só precisaríamos inverter este operador, mas aí esbarramos em um problema: imagine uma configuração de campo específica (estamos somando sobre TODAS ELAS):

$$A^\mu(x) = \partial^\mu \alpha(x)$$

$$\triangleright\; \left(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\nu\partial_\mu\right)\partial^\mu\alpha = \left(\Box\partial_\nu - \partial_\nu\Box\right)\alpha = 0$$

O operador tem autovalores zero, e portanto é singular. De fato, a integral:

$$\int \mathcal{D}A_\mu \, \exp\left\{\frac{i}{2}\int d^4x \, A_\mu(x)\left(\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu\right)A_\nu(x)\right\}$$

vai receber uma contribuição igual a "1" cada vez que considerarmos uma contribuição deste tipo. É divergente.

A raiz do problema está na invariância de gauge. Quando somamos sobre diversas configurações de A_μ, somamos inclusive aquelas equivalentes (ligadas por uma transformação de gauge) o que é uma forma de "multipla contagem".

$$\begin{array}{lcl} A_\mu & \longleftrightarrow & \cancel{A_\mu + \partial_\mu \alpha_1} \\ & \longleftrightarrow & \cancel{A_\mu + \partial_\mu \alpha_2} \\ & \longleftrightarrow & \cancel{A_\mu + \partial_\mu \alpha_3} \ \ldots \end{array}$$

já incluimos esta configuração

não devemos incluir estas

O mesmo ocorre no caso não-abeliano, só que agora as configurações equivalentes estão ligadas por:

$$A^\mu_\mu = A^a_\mu t^a \longleftrightarrow A^{\mu\alpha}_\mu \equiv (A^\alpha_\mu)^a t^a = e^{i\alpha^a t^a}\left[A^b_\mu t^b + \frac{i}{g}\partial_\mu\right] e^{-i\alpha^c t^c}$$

O que faremos para evitar esta múltipla contagem é o mesmo que fizemos no caso abeliano, introduzindo a fixação de Gauge por meio da identidade:

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha \, \delta\Big(\underbrace{G(A^{\mu\alpha}_\mu)}_{\text{Vínculo: } G(A^{\mu\alpha}_\mu)=0}\Big) \, \det\left[\frac{\delta G(A^{\mu\alpha}_\mu)}{\delta\alpha}\right] \quad \text{(eq. 147.1) (*)}$$

esta identidade está provada no Ryder pgs 246-248, e nas minhas notas de 2012 pgs 54-56

Lembrando que:

$$(A^\alpha_\mu)^a = A^a_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A^b_\mu \alpha^c = \frac{1}{g}\left(\delta^{ac}\partial_\mu + g f^{abc} A^b_\mu\right)\alpha^c \equiv A^a_\mu + \frac{1}{g} D^{ac}_\mu \alpha^c$$

Desde que o vínculo $G(A^{\mu\alpha}_\mu)$ seja linear em α, $\det\left[\frac{\delta G(A^{\mu\alpha}_\mu)}{\delta\alpha}\right]$ não será função de α:

$$\Delta_G\left[A^\mu_\mu\right] \equiv \det\left[\frac{\delta G(A^{\mu\alpha}_\mu)}{\delta\alpha}\right] = \Delta_G\left[A^{\mu\alpha}_\mu\right] \quad \text{(invariante de gauge)}$$

podemos tirá-lo da integral em 147.1:

$$\Delta_G^{-1}\left[A^\mu_\mu\right] = \int \mathcal{D}\alpha \, \delta\left(G(A^{\mu\alpha}_\mu)\right) \quad \text{(eq. 147.2)}$$

Inserindo a identidade 147.1 na integral do funcional gerador, temos:

$$\int DA_\mu^a \, e^{i\int d^4x \mathcal{L}_{YM}} \int D\alpha \, \delta\left(G(A_\mu^{a\alpha})\right) \Delta_G[A_\mu^a] =$$

$$\mathcal{L}_{YM}(A_\mu^a) = \mathcal{L}_{YM}(A_\mu^{a\alpha}) \equiv \mathcal{L}_{YM}^\alpha$$

$$= \int D\alpha \int DA_\mu^a \, e^{i\int d^4x \mathcal{L}_{YM}^\alpha} \delta\left(G(A_\mu^{a\alpha})\right) \Delta_G[A_\mu^a] =$$

Podemos então aplicar a transformação de gauge que leva $A_\mu^{a\alpha} \longrightarrow A_\mu^a$

A medida de integração não muda, a final de contas a transformação de A não passa de uma translação seguida por uma rotação (unitária) do vetor A^a, então:

$$= \underbrace{\left(\int D\alpha\right)}_{} \int DA_\mu^a \, e^{i\int d^4x \mathcal{L}_{YM}} \delta\left(G(A_\mu^a)\right) \Delta_G[A_\mu^{a\alpha}]$$

Nada na integral em A depende de α, isto não passa de um infinito multiplicativo.

É aqui que surge a diferença entre os casos abeliano e não-abeliano. No caso abeliano, para uma fixação de gauge genérica:

$$G(A) = \partial^\mu A_\mu(x) - \omega(x) \Longrightarrow G(A_\mu^\alpha) = \partial^\mu A_\mu + \partial^2\alpha - \omega$$

$$\frac{\delta G}{\delta \alpha} = \frac{\delta}{\delta\alpha}\left(\partial^2\alpha\right)$$

$\Delta_G[A_\mu]$ também independe de A
e pode ser tirado da integral e ignorado (outro fator multiplicativo)

Agora temos:

$$G(A_\mu^a) = \partial^\mu A_\mu^a(x) - \omega^a(x) \Longrightarrow G(A_\mu^{a\alpha}) = \partial^\mu\left(A_\mu^a + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^a + f^{abc}A_\mu^b\alpha^c\right) - \omega^a(x)$$

$$\frac{\delta G}{\delta \alpha^d} = \frac{\delta}{\delta\alpha^d}\left(\frac{1}{g}\partial^\mu\partial_\mu\alpha^a + \partial^\mu \underbrace{f^{abc}A_\mu^b\alpha^c}_{}\right) = \frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu^{ad}$$

Agora $\Delta_G[A_\mu^{a\alpha}]$ depende de A

$\frac{\delta G(A_\mu^a)}{\delta \alpha^b}$ é uma matriz quadrada (índices *a* e *b*) de dimensão N^2-1 (*a*,*b* são índices que numeram os geradores do grupo e estamos pensando em SU(N))

Podemos escrever o determinante como uma integral funcional de funções de números de Grassmann:

$$\underbrace{\mathrm{Det}\, M}_{\text{matriz nxn}} = \int D\bar{c}\, Dc\; e^{-\int d^4x\, \underbrace{\bar{c}}\cdot M \cdot c}$$

campo de números de Grassmann. Multipleto com n componentes, no caso em questão isso significa campos se transformando na rep. adjunta de SU(N)

Finalmente:

$$\Delta_G[A_\mu^a] = \mathrm{Det}\left[\frac{\delta G(A_\mu^\alpha)}{\delta \alpha}\right] = \int D\bar{c}\, Dc\; \mathrm{Exp}\left[\underbrace{i}\int d^4x\; \bar{c}_a(-\partial^\mu D_\mu^{ac})c_c\right]$$

fatores g e -i incluídos na definição de c

c:
- Adjunta de SU(N)
- Anti-comutam (estatística de férmions)
- Escalares de Lorentz (spin 0)

Relação spin-estatística errada!

Fantasmas (Ghosts) de Faddeev-Popov

$$\mathcal{L}_{FPG} \equiv \bar{c}_a(-\partial^\mu D_\mu^{ac})c_c = \bar{c}_a(-\delta^{ac}\partial^2 - g f^{abc}\partial^\mu A_\mu^b)c_c =$$

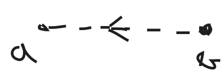
$$= \underbrace{-\bar{c}_a \Box c_a}_{\text{Termo cinético: } \partial_\mu \bar{c}_a \partial^\mu c_a} \underbrace{- g f^{abc}\bar{c}_a \partial^\mu(A_\mu^b c_c)}_{\text{Interação Ghost-Gauge}} \qquad \text{(eq. 149.1)}$$

Termo cinético: $\partial_\mu \bar{c}_a \partial^\mu c_a$

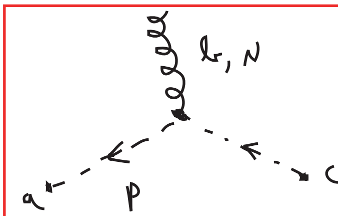
Interação Ghost-Gauge

$$g f^{abc}(\partial^\mu \bar{c}_a) A_\mu^b c_c$$

$$\langle c^a(x)\bar{c}^b(y)\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2}\delta^{ab} e^{-ik(x-y)}$$



$= \frac{i\delta^{ab}}{p^2}$ (eq. 149.2)



$= \underbrace{g f^{abc}}_{\text{Acoplamento de gauge}} p^\mu$

Acoplamento de gauge

(eq. 149.3)