

Com isso em mente, temos:

$$Z[\bar{J}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A_\mu^\alpha \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{FPC}} \delta(G(A_\mu^\alpha))$$

Esta δ é tratada da mesma forma que o caso abeliano, e temos para uma fixação genérica:

$$\delta(G(A_\mu^\alpha)) = \delta(\partial^\nu A_\nu^\alpha - w)$$

Basta multiplicar Z pela identidade $N(\xi) \int \mathcal{D}w e^{-i \int d^4x \frac{w^2}{2\xi}} = 1$

Escolhido de forma a garantir a ident.

E fazer a integral em w usando a delta:

$$Z[\bar{J}] = \frac{1}{N'} \int \mathcal{D}A_\mu^\alpha \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{FPC}} \text{EXP} \left[i \int d^4x \left(-\frac{(\partial^\nu A_\nu^\alpha)^2}{2\xi} \right) \right]$$

\mathcal{L}_{GF}
(Gauge Fixing)

Absorve as normalizações

Podemos inclusive incluir os férmions para a lagrangeana final:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\nu A_\nu^\alpha)^2 + \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi + \bar{c}_a (-\not{D}^\nu D_\nu^a) c_c$$

(eq. 150.1)

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

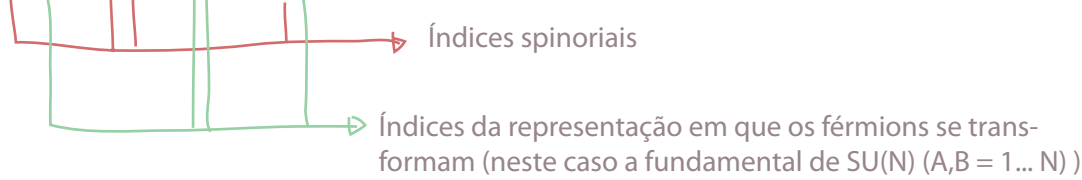
$$D = \not{\partial} (\not{\partial}_\mu - i \gamma A_\mu^a t^a)$$

$$D_\nu^{ac} = (\delta^{ac} \not{\partial}_\nu + g f^{abc} A_\nu^b)$$

Lembrando que ainda restam índices escondidos nos férmions:

$$\bar{\Psi} \not{D} \Psi \rightarrow \bar{\Psi} \not{\partial} t^a \Psi = \bar{\Psi}_{iA} \not{\partial}_{ij} t^a_{AB} \Psi_{jB}$$

Depende da rep. em que os ψ se transformam (esta forma é para a fundamental)



As regras de Feynman da parte fermiônica não mudam muito, basta lembrar que temos um número de férmions igual à dimensão da representação do grupo. O propagador só muda para incluir o índice da simetria interna:

$$\langle \Psi_{iA}(x) \bar{\Psi}_{jB}(y) \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{\not{k} - m} \right)_{ij} \delta_{AB} e^{-ik(x-y)}$$

$A \xrightarrow{p} B = \frac{i(\not{p} + m) \delta_{AB}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

(eq. 151.1)

Uma vez fixado o Gauge, podemos obter o propagador para os bósons de Gauge a partir dos termos:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (\partial^\mu A^{\nu b} - \partial^\nu A^{\mu b})}_{\text{}} \\ & \int d^4x \left[\frac{1}{2} A^{\mu\nu} (g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu) A^{\nu\mu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{\mu\nu})^2 \right] = \\ & = \int d^4x \left[\frac{1}{2} A^{\mu\nu} (g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu) A^{\nu\mu} + \frac{1}{2\xi} A^{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\nu) A^{\nu\mu} \right] \\ & = \int d^4x \frac{1}{2} A^{\mu\nu} \left[\underbrace{g_{\mu\nu} \square + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \partial_\mu \partial_\nu}_{\text{temos que inverter este operador}} \right] A^{\nu\mu} = \\ & = \int d^4x \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{A}^{\mu\nu}(k_1) e^{-ik_1x} \left[g_{\mu\nu} \square + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \partial_\mu \partial_\nu \right] \tilde{A}^{\nu\mu}(k_2) e^{-ik_2x} = \\ & = \int d^4x \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{A}^{\mu\nu}(k_1) e^{-ik_1x} \left[-g_{\mu\nu} k_2^2 - \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) k_{2\mu} k_{2\nu} \right] \tilde{A}^{\nu\mu}(k_2) e^{-ik_2x} = \\ & = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{A}^{\mu\nu}(k) \delta_{ab} \left[\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2 \right] \tilde{A}^{\nu\mu}(-k) \end{aligned}$$

Este operador tem inverso e podemos mostrar que este é:

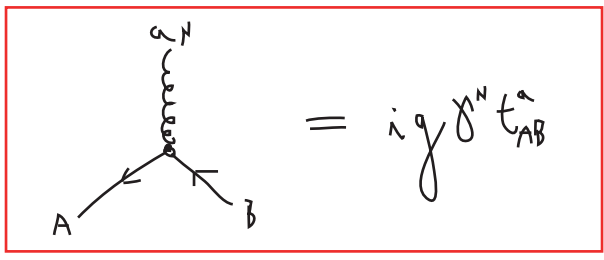
$\tilde{D}(k)_{\mu\nu}^{ab} = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} + \left(\xi - 1\right) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \delta_{ab} \iff \dots$

(eq. 151.2)

Notando que temos N²-1 propagadores idênticos.

A interação dos férmions vem de (assumindo que se transformem na rep. fundamental):

$$\bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi \Rightarrow \bar{\Psi}_A \gamma^{\mu} A_{\mu}^a t_{AB}^a \Psi_B$$



(eq. 152.1)

Temos ainda alguns termos provenientes de $-\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2$:

$$-\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 = -\frac{1}{4} (\partial_{\mu} A_{\nu}^a - \partial_{\nu} A_{\mu}^a + g f^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c) (\partial^{\mu} A^{\nu a} - \partial^{\nu} A^{\mu a} + g f^{abc} A^{\mu b} A^{\nu c}) =$$

termos com A^2 , já levados em conta no propagador

$$= -\frac{1}{4} \left[\dots + \underbrace{(\partial_{\mu} A_{\nu}^a) g f^{abc} A^{\mu b} A^{\nu c}}_{\mu \leftrightarrow \nu; b \rightarrow c; c \rightarrow b} - \underbrace{(\partial_{\nu} A_{\mu}^a) g f^{abc} A^{\mu b} A^{\nu c}}_{b \rightarrow \mu; c \rightarrow \nu} + \underbrace{g f^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c (\partial^{\mu} A^{\nu a})}_{\mu \leftrightarrow \nu; b \leftrightarrow c} + \dots \right]$$

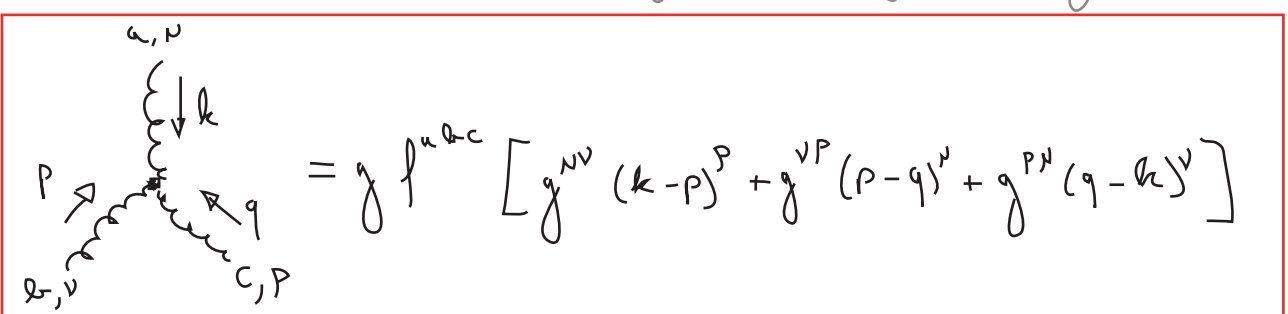
$$= -\frac{1}{4} \left[-4 g f^{abc} (\partial_{\nu} A_{\mu}^a) A^{\mu b} A^{\nu c} + g^2 f^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c f^{abc} A^{\mu b} A^{\nu c} \right]$$

$$\langle P_{\mu}^{\nu} q^{\rho} | (\partial_{\alpha} A_{\beta}^a) A^{\mu b} A^{\nu c} | k_{\alpha}^{\nu} \rangle \Rightarrow (ig) f^{abc} (-i k_{\alpha}) \gamma_{\beta}^{\nu} \delta_{\alpha a} g^{\nu \beta} \delta_{\mu b} g^{\rho \alpha} \delta_{c' c} =$$

$$= g f^{abc} k^{\rho} g^{\nu \mu}$$

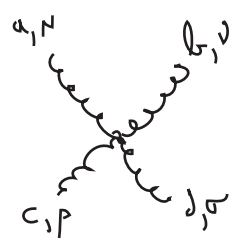
$$\langle P_{\mu}^{\nu} q^{\rho} | (\partial_{\alpha} A_{\beta}^a) A^{\mu b} A^{\nu c} | k_{\alpha}^{\nu} \rangle \Rightarrow (ig) f^{abc} (-i k_{\alpha}) \gamma_{\beta}^{\nu} \delta_{\alpha a} g^{\rho \beta} \delta_{\mu c} g^{\nu \alpha} \delta_{b' b} =$$

$$= g f^{acb} k^{\rho} g^{\rho \mu} = -g f^{abc} k^{\rho} g^{\rho \mu}$$



(eq. 152.2)

Seguindo a mesma lógica, obtemos o acoplamento quártico (são 4! contrações, mas somente 6 delas são diferentes e se repetem 4 vezes, o que some com o fator 1/4 da Lagrangeana):



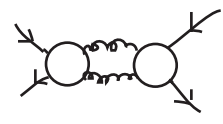
$$= -ig^2 \left[f^{ube} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \right]$$

(eq. 153.1)

Ghosts e Unitariedade

(Peskin 16.1 e 16.3; Ryder 7.7)

Já vimos que precisamos introduzir os FP Ghosts para resolver um problema introduzido pela invariância de Gauge da Teoria, mas eles têm uma outra função, que ficará clara se calcularmos o seguinte diagrama:

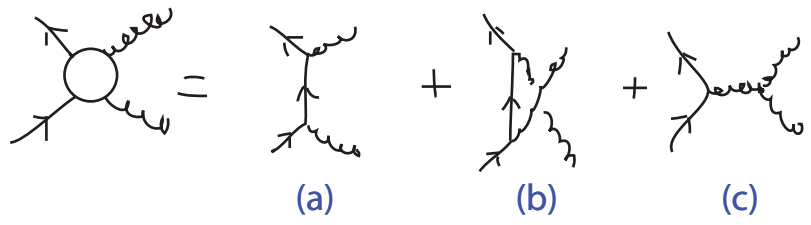


O teorema óptico nos diz que:

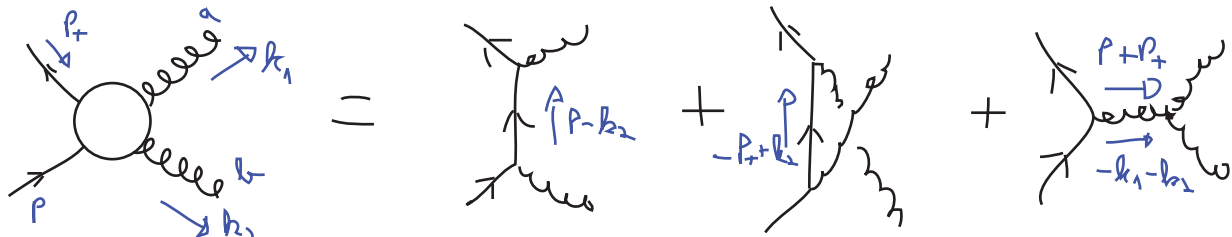
$$2 \text{Im} \left[\text{Diagram} \right] = \int d\pi \left| \text{Diagram} \right|^2$$

↳ integrais no espaço de fase dos dois bósons de Gauge

que, em LO, recebe as seguintes contribuições:



Portanto é interessante estudar os três diagramas que contribuem para esta amplitude.



Os diagramas (a) e (b) somados nos dão:

$$i \underbrace{M_{gh}^{\mu\nu}} \epsilon_\mu^*(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) = (ig)^2 \bar{v}(P_+) \left\{ \gamma^\mu t^a \frac{i}{\not{P} - \not{k}_2 - m} \gamma^\nu t^a + \dots \right\}$$

$$+ \gamma^\nu t^a \left\{ \frac{i}{k_2 - \cancel{P_+} - m} \gamma^\mu t^a \right\} u(P) \epsilon_\mu^*(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2)$$

Podemos nos perguntar se estes bosons de Gauge, que nesta amplitude são partículas externas, satisfazem identidades de Ward assim como faziam os fotons:

$$k_{1\mu} \left(\text{diagrama} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad k_{2\nu} \left(\text{diagrama} \right) = 0$$

subtraí zero
 $(P-m)u(P)=0$

$$i M_{\mu\nu}^{\mu\nu} \epsilon_\mu^*(k_1) k_{2\nu} = (ig)^2 \bar{v}(P_+) \left\{ -\gamma^\nu t^a \frac{i}{-P+k_2+m} (k_2 - (P-m)) t^a + \right. \\ \left. + (k_2 - P - m) t^a \frac{i}{k_2 - \cancel{P_+} - m} \gamma^\nu t^a \right\} u(P) \epsilon_\nu^*(k_1)$$

$\bar{v}(P_+) (-P_+ - m) = 0$

$$i M_{\mu\nu}^{\mu\nu} \epsilon_\mu^*(k_1) k_{2\nu} = (ig)^2 \bar{v}(P_+) \left\{ -i \gamma^\nu t^a t^b + i t^b \gamma^\nu t^a \right\} u(P) \epsilon_\nu^*(k_1)$$

$-i \gamma^\nu [t^a, t^b] = -i \gamma^\nu (i f^{abc} t^c) \neq 0$

O que seria zero no caso abeliano, mas não o é para o caso não abeliano.

$$i M_{\mu\nu}^{\mu\nu} \epsilon_\mu^*(k_1) k_{2\nu} = -g^2 \bar{v}(P_+) \gamma^\nu u(P) \epsilon_\nu^*(k_1) f^{abc} t^c$$

(a)+(b)
(eq. 154.1)

Isto representa um problema, pois nos diz que a probabilidade de produzir bósons de gauge com polarizações longitudinais é diferente de zero (uma das coisas que a identidade de Ward fazia era impedir isso) e argumentos simples de relatividade nos mostram que bosons vetoriais sem massa só tem duas polarizações físicas (as transversais). Vejamos a contribuição do diagrama (c)

$$i M_c^{\mu\nu} \epsilon_\mu^*(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) = ig \bar{v}(P_+) \gamma_\rho t^c u(P) \left(-\frac{i}{k_3^2} \right) \epsilon_\mu^*(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) \times$$

$k_3 = -k_1 - k_2$

$$\times g f^{abc} \left[g^{\mu\nu} (k_2 - k_1)^\rho + g^{\rho\nu} (k_3 - k_1)^\mu + g^{\rho\mu} (k_1 - k_3)^\nu \right]$$

$$i M_c^{\mu\nu} \epsilon_\mu^*(k_1) k_{2\nu} = ig \bar{v}(P_+) \gamma_\rho t^c u(P) \left(-\frac{i}{k_3^2} \right) \epsilon_\mu^*(k_1)$$

$$\times g f^{abc} \left[k_2^\mu (k_2 - k_1)^\rho + k_3^\rho (k_3 - k_1)^\mu + g^{\rho\mu} (k_1 - k_3) \cdot k_2 \right]$$

$k_3 = -k_1 - k_2$