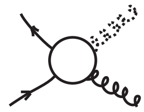
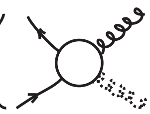
$$+ \gamma^\nu t^b \frac{i}{\not k_2 - \not p_+ - m} \gamma^\mu t^a \Big\} u(p)\, \epsilon^*_\mu(k_1)\epsilon^*_\nu(k_2)$$

Podemos nos perguntar se estes bosons de Gauge, que nesta amplitude são partículas externas, satisfazem identidades de Ward assim como faziam os fotons:

$k_1^\mu \Big($  $\Big) = 0$ ou $k_2^\mu \Big($  $\Big) = 0$

subtraí zero $(\not p - m)u(p) = 0$

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{a,b}\,\epsilon^*_\mu(k_1)\, k_{2\nu} = (ig)^2\, \bar v(p_+)\Big\{ -\gamma^\mu t^a \frac{i}{-\not p + \not k_2 + m}\big(\not k_2 - (\not p - m)\big) t^b +$$

$$+ \underbrace{(\not k_2 - \not p_+ - m)}_{\bar v(p_+)(-\not p_+ - m) = 0} t^b \frac{-i}{\not k_2 - \not p_+ - m} \gamma^\mu t^a \Big\} u(p)\, \epsilon^*_\mu(k_1)$$

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{a,b}\,\epsilon^*_\mu(k_1)\, k_{2\nu} = (ig)^2\, \bar v(p_+)\Big\{ \underbrace{-i\gamma^\mu t^a t^b + i t^b \gamma^\mu t^a}_{-i\gamma^\mu[t^a, t^b] = -i\gamma^\mu(i f^{abc} t^c) \neq 0} \Big\} u(p)\, \epsilon^*_\mu(k_1)$$

O que seria zero no caso abeliano, mas não o é para o caso não abeliano.

$$\boxed{i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{a,b}\,\epsilon^*_\mu(k_1)\, k_{2\nu} = -g^2\, \bar v(p_+)\gamma^\mu u(p)\, \epsilon^*_\mu(k_1)\, f^{abc} t^c} \quad (a)+(b)$$

(eq. 154.1)

Isto representa um problema, pois nos diz que a probabilidade de produzir bósons de gauge com polarizações longitudinais é diferente de zero (uma das coisas que a identidade de Ward fazia era impedir isso) e argumentos simples de relatividade nos mostram que bosons vetoriais sem massa só tem duas polarizações físicas (as transversais). Vejamos a contribuição do diagrama (c)

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{c}\,\epsilon^*_\mu(k_1)\epsilon^*_\nu(k_2) = ig\,\bar v(p_+)\gamma_\rho t^c u(p)\left(-\frac{i}{k_3^2}\right)\epsilon^*_\mu(k_1)\epsilon^*_\nu(k_2)\,\times$$

$k_3 = -k_1 - k_2$

$$\times\, g f^{abc}\left[g^{\mu\nu}(k_2 - k_1)^\rho + g^{\nu\rho}(k_3 - k_1)^\mu + g^{\rho\mu}(k_1 - k_3)^\nu\right]$$

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{c}\,\epsilon^*_\mu(k_1)\, k_{2\nu} = ig\,\bar v(p_+)\gamma_\rho t^c u(p)\left(-\frac{i}{k_3^2}\right)\epsilon^*_\mu(k_1)$$

$k_2 = -k_1 - k_3$

$$\times\, g f^{abc}\left[k_2^\mu(k_2 - k_1)^\rho + k_2^\rho(k_3 - k_1)^\mu + g^{\rho\mu}(k_1 - k_3)\cdot k_2\right]$$

$$[\ ] = \Big[\underbrace{(-k_1-k_3)^\mu(-k_1-k_3-k_1)^\rho}_{\substack{+k_1^\mu(\cancel{k_1}+\cancel{k_3}+k_1)^\rho \\ +k_3^\mu(\cancel{k_1}+\cancel{k_3}+\cancel{k_1})^\rho}} + \underbrace{(-k_1-k_3)^\rho(k_3+k_1+k_3)^\mu}_{\substack{-k_1^\mu(\cancel{k_1}+\cancel{k_3})^\rho \\ -k_3^\mu(\cancel{k_1}+\cancel{k_3})^\rho \\ -k_3^\mu(\cancel{k_1}+k_3)^\rho}} + g^{\rho\mu}\underbrace{(k_1-k_3)\cdot(-k_1-k_3)}_{-k_1^2-\cancel{k_1 k_3}+\cancel{k_1 k_3}+k_3^2} \Big] =$$

$$\boxed{i M_c^{\mu\nu}\epsilon^*_\mu(k_1)k_{2\nu} = i g^2\bar v(p_+)\gamma_\rho t^c u(p)\left(-\frac{i}{k_3^2}\right)\epsilon^*_\mu(k_1) f^{abc}\left[k_1^\mu k_1^\rho - k_3^\mu k_3^\rho - g^{\rho\mu}(k_1^2-k_3^2)\right]}$$

(eq. 155.1)

Se dermos uma "acoxambrada" assumindo que o bóson com momento k_1 tem polarização transversa:

$$(1)\quad k_1^\mu\epsilon^*_\mu(k_1) = k_1^\mu\epsilon^{*T}_\mu(k_1) = 0$$ (o que não é justificavel por enquanto)

E usarmos:

$$\not p\, u(p) = m\, u(p)$$

$$\bar v(p_+)\not p_+ = -\bar v(p_+) m$$

$$(2)\quad k_1^2 = 0$$ (on-shell)

$$(3)\quad \bar v(p_+)\gamma_\rho k_3^\rho u(p) \underbrace{=}_{k_3 = p + p_+} \bar v(p_+)(\not p + \not p_+)u(p) = \bar v(p_+)(m-m)u(p) = 0$$ (eqs. de mov.)

Obtemos:

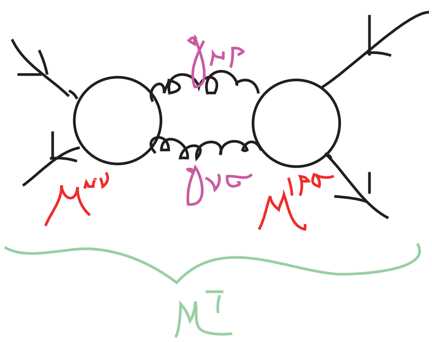
$$i M_c^{\mu\nu}\epsilon^{T*}_\mu(k_1)k_{2\nu} = \cancel{i} g^2\bar v(p_+)\gamma_\rho t^c u(p)\left(-\frac{\cancel{i}}{\cancel{k_3^2}}\right)\epsilon^{T*}_\mu(k_1) f^{abc}\Big[\underbrace{\cancel{k_1^\mu k_1^\rho}}_{(1)\to 0} - \underbrace{\cancel{k_3^\mu k_3^\rho}}_{(3)\to 0} \cancel{-} g^{\rho\mu}(\underbrace{\cancel{k_1^2}}_{(2)\to 0} \cancel{-} \cancel{k_3^2})\Big] =$$

$$\boxed{i M_c^{\mu\nu}\epsilon^{T*}_\mu(k_1)k_{2\nu} = g^2\bar v(p_+)\gamma_\rho t^c u(p)\epsilon^{*\rho}(k_1) f^{abc}}$$

(c)

(eq. 155.2)

Esta contribuição cancela a polarização não-física da equação 154.1, mas a suposição que fizemos acaba impondo aquilo que queremos mostrar (que a chance de produzir um bóson de gauge com polarizição não física é zero). De fato, se voltamos no diagrama, em que começamos:



vemos que presença de todas as polarizações nos diagramas "cortados" está ligada ao fato de podermos somar sobre todos os quatro graus de liberdade dos bosons de gauge virtuais. O que está faltando neste cenário? Como podemos ver que existem de fato só dois graus de liberdade físicos?

Usando regras de Cutkosky, podemos substituir os propagadores dos bósons de gauge por:

$$-\frac{i}{k^2+i\varepsilon} g^{\mu\nu} \longrightarrow -i g_{\mu\nu} (-2\pi i)\, \delta(k^2)$$

$$\sim \frac{1}{2} (i\mathcal{M}^{\mu\nu}) g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} (i\mathcal{M}'^{\rho\sigma})$$

Definindo:

$$k^\mu = (k^0, \vec{k}) \Longleftrightarrow k^2 = 0$$

$$\epsilon^{+\mu} = \left(\frac{k^0}{\sqrt{2}|k|}, \frac{\vec{k}}{\sqrt{2}|k|}\right) \quad \text{paralelo a } k^\mu$$

$$\epsilon^{-\mu} = \left(\frac{k^0}{\sqrt{2}|k|}, -\frac{\vec{k}}{\sqrt{2}|k|}\right) \quad \text{paralelo a } (k^0, -\vec{k})$$

Geram o mesmo espaço que $\epsilon^{\parallel}_\mu = (0, \frac{\vec{k}}{k})$, $\epsilon^t_\mu = (1,0,0,0)$

e junto com as duas polarizações transversas formam uma base para qualquer polarização $\epsilon^T_1, \epsilon^T_2$

$$\epsilon^T_i \cdot \epsilon^{*T}_j = -\delta_{ij} \qquad \epsilon^+ \cdot \epsilon^T_i = \epsilon^- \cdot \epsilon^T_i = 0$$

$$(\epsilon^+)^2 = (\epsilon^-)^2 = 0 \qquad \epsilon^+ \cdot \epsilon^- = 1$$

$$g_{\mu\nu} = \epsilon^-_\mu \epsilon^{+*}_\nu + \epsilon^+_\mu \epsilon^{-*}_\nu - \sum_i^2 \epsilon^T_{i\mu} \epsilon^{T*}_{i\nu}$$

$$\mathcal{M}^T = \frac{1}{2} (i\mathcal{M}^{\mu\nu}) \left(\epsilon^{-*}_\mu \epsilon^+_\rho + \epsilon^{+*}_\mu \epsilon^-_\rho - \sum_i^2 \epsilon^{T*}_{i\mu} \epsilon^T_{i\rho}\right) \times$$

$$\times \left(\epsilon^{-*}_\nu \epsilon^+_\sigma + \epsilon^{+*}_\nu \epsilon^-_\sigma - \sum_i^2 \epsilon^{T*}_{i\nu} \epsilon^T_{i\sigma}\right) (i\mathcal{M}'^{\rho\sigma})$$

O que mostramos na 155.2 (somada com a 154.1 é que)

$$i\left(\mathcal{M}^{\mu\nu}_{a,b} + \mathcal{M}^{\mu\nu}_c\right) \epsilon^{T*}_\mu(k_1) \underbrace{k_{2\nu}}_{= k_2^2\, \epsilon^{+*}_\nu(k_2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad i\mathcal{M}^{\mu\nu} \epsilon^{T*}_\mu(k_1) \epsilon^{+*}_\nu(k_2) = 0$$

O mesmo vale para:

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu} \epsilon^{T*}_\mu(k_1) \epsilon^{-*}_\nu(k_2) = i\mathcal{M}'^{\mu\nu} \epsilon^{T*}_\mu(k_1) \epsilon^{\pm *}_\nu(k_2) = 0$$

Portanto todos os termos que misturam ϵ_i^T com $\epsilon^{\pm}$ são nulos.

Os termos envolvendo só polarizações transversas não nos interessam no momento, eles são a contribuição física que não nos causa espanto, são os termos abaixo que nos causam problemas:

$$\mathcal{M}^T = \frac{1}{2}\left(i\mathcal{M}^{\mu\nu}\right)\left(\epsilon_\mu^{-*}\epsilon_\rho^{+} + \epsilon_\mu^{+*}\epsilon_\rho^{-}\right)\left(\epsilon_\nu^{-*}\epsilon_\sigma^{+} + \epsilon_\nu^{+*}\epsilon_\sigma^{-}\right)\left(i\mathcal{M}^{\prime\rho\sigma}\right) =$$

$$\mathcal{M}^{\mu\nu}\epsilon_\mu^{-*}\epsilon_\nu^{-*} = \mathcal{M}^{\mu\nu}\epsilon_\mu^{+*}\epsilon_\nu^{+*} = 0$$ (cheque se quiser, mas é só algebra)

$$= \frac{1}{2}\, i\mathcal{M}^{\mu\nu}\left(\epsilon_\mu^{-*}\epsilon_\rho^{+}\,\epsilon_\nu^{+*}\epsilon_\sigma^{-} + \epsilon_\mu^{+*}\epsilon_\rho^{-}\,\epsilon_\nu^{-*}\epsilon_\sigma^{+}\right) i\mathcal{M}^{\prime\rho\sigma} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(i\mathcal{M}^{\mu\nu}\epsilon_\mu^{-*}\epsilon_\nu^{+*}\right)\left(i\mathcal{M}^{\prime\rho\sigma}\epsilon_\rho^{+}\epsilon_\sigma^{-}\right) + \frac{1}{2}\left(i\mathcal{M}^{\mu\nu}\epsilon_\mu^{+*}\epsilon_\nu^{-*}\right)\left(i\mathcal{M}^{\prime\rho\sigma}\epsilon_\rho^{-}\epsilon_\sigma^{+}\right)$$

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}\epsilon_\mu^{-*}(k_1)\underbrace{\epsilon_\nu^{+*}(k_2)}_{\frac{k_{2\nu}}{\sqrt{2}|k_2|}} = i\left(\mathcal{M}^{\mu\nu}_{a,b} + \mathcal{M}^{\mu\nu}_{c}\right)\epsilon_\mu^{-*}(k_1)\frac{k_{2\nu}}{\sqrt{2}|k_2|} =$$

$$= \overbrace{-g^2\bar{v}(p_+)\gamma^\mu u(p)\epsilon_\mu^{-*}(k_1) f^{abc} t^c}^{\text{(eq 154.1)}}\frac{1}{\sqrt{2}|k_2|} +$$

$$\overbrace{+ g^2\bar{v}(p_+)\gamma_\rho t^c u(p)\left(\frac{1}{k_3^2}\right)\epsilon_\mu^{-*}(k_1) f^{abc}\left[k_1^\mu k_1^\rho - \underbrace{k_3^\mu k_3^\rho}_{0} - g^{\rho\mu}\left(k_1^2 - \underbrace{k_3^2}_{0}\right)\right]}^{\text{(eq 155.1)}}\frac{1}{\sqrt{2}|k_2|} =$$

pag 155

estes termos sobrevivem agora

este termo cancela com a linha de cima

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}\epsilon_\mu^{-*}(k_1)\epsilon_\nu^{+*}(k_2) = g^2\bar{v}(p_+)\gamma_\rho t^c u(p)\left(\frac{1}{k_3^2}\right)\epsilon_\mu^{-*}(k_1) \quad k_1^\mu k_1^\rho\frac{1}{\sqrt{2}|k_2|}$$

$$k_1^\mu = \epsilon^{\mu+*}(k_1)\sqrt{2}|k_1|$$

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}\epsilon_\mu^{-*}(k_1)\epsilon_\nu^{+*}(k_2) = g^2\bar{v}(p_+)\gamma_\rho t^c u(p)\left(\frac{1}{k_3^2}\right) f^{abc}\, k_1^\rho\,\frac{|k_1|}{|k_2|}$$

A conta para $i\mathcal{M}^{\rho\sigma}\,\epsilon^{+}_{\rho}(k_1)\,\epsilon^{-}_{\sigma}(k_2)$ é analoga, e os termos que trocamos + por - equivalem a uma troca de k_1 por k_2, obtemos então:

$$\mathcal{M}^{T}=\frac{1}{2}\left(g^2\bar{v}(P_+)\gamma_\rho t^c u(P)\left(\frac{1}{k_3^2}\right)f^{abc}\,k_1^\rho\,\frac{\cancel{|k_1|}}{\cancel{|k_2|}}\right)\left(g^2\bar{u}(P')\gamma_\nu t^d v(P'_+)\left(\frac{1}{k_3^2}\right)f^{abc}(-k_2^\nu)\,\frac{\cancel{|k_2|}}{\cancel{|k_1|}}\right)+\underline{(k_1\leftrightarrow k_2)}$$

De fato: $\bar{v}(P_+)\gamma_\nu k_3^\nu u(P)=0$ (pg 155)

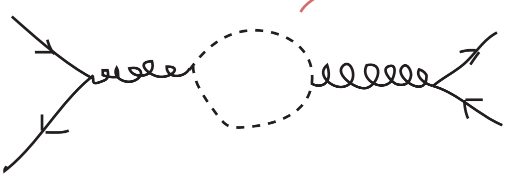
logo: $\bar{v}(P_+)\gamma_\nu(k_1+k_2)^\nu u(P)=0 \Rightarrow \bar{v}(P_+)\not{k}_1 u(P)=-\bar{v}(P_+)\not{k}_2 u(P)$

este termo é igual ao primeiro ($k_3^2=(k_1+k_2)^2$)

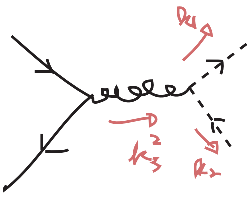
$$\boxed{\mathcal{M}^{T}=\left(g^2\bar{v}(P_+)\gamma_\rho t^c u(P)\left(\frac{1}{k_3^2}\right)f^{abc}\,k_1^\rho\right)\left(g^2\bar{u}(P')\gamma_\nu t^d v(P'_+)\left(\frac{1}{k_3^2}\right)f^{abc}(-k_2^\nu)\right)} \quad \text{(eq. 158.1)}$$

Esta expressão mede a contribuição dos estados com a polarização não física para o espalhamento eletron-pósitron. O ponto chave que queremos notar é que este espalhamento também recebe a seguinte contribuição:

→ FP GHOST

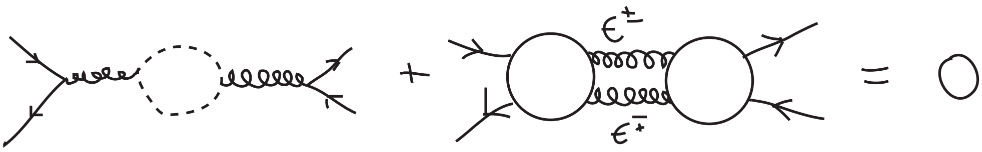


Que também pode ser calculado usando o teorema óptico:



$$\Rightarrow\; i\mathcal{M}_{GH}=i\,g\,\bar{v}(P_+)\gamma^\mu t^c u(P)\,\frac{-i\,g_{\mu\nu}}{k_3^2}\,g\,f^{abc}\,k_1^\nu$$

que é igual ao primeiro fator de 158.1. De fato o segundo fator vai ser obtido pelo diagrama com os Ghosts no estado inicial e os férmions no final. No entanto quando combinamos as duas partes é preciso incluir um fator -1, porque os Ghosts tem estatísica de Fermi. Isto significa que o loop de Ghosts cancela exatamente a contribuição das polarizações não físicas do Bóson de Gauge:



Este exemplo nos indica que os Ghosts agem como graus de liberdade "negativos" e sua única função é cancelar as polarizações não físicas dos bósons de Gauge.

Este cancelamento nos loops deve estar ligado ao mesmo tipo de cancelamento nas pernas externas, fazendo com que não seja possível observar nem Ghosts nem bósons de gauge com a polarização indesejada. Isto não fica claro no que fizemos acima, de fato nem fica claro que o cancelamento acontece em qualquer diagrama. Para melhorar isto precismos explorar uma simetria menos óbvia da Lagrangena:

A simetria BRST

(Weinberg 15.7, Ashok Das [Finite Temperature Field Theory] 4.2, Peskin 16.4, Ryder 7.5)

Após a fixação de Gauge ficamos com a seguinte Lagrangena efetiva (eq. 150.1):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F^{a}_{\mu\nu}\right)^2 - \frac{1}{2\xi}\left(\partial^{\mu}A^{a}_{\mu}\right)^2 + \bar{\psi}\left(i\not{D} - m\right)\psi + \bar{c}_a\left(-\partial^{\mu}D^{ac}_{\mu}\right)c_c$$

Lembrando que:

$$Z[\text{FONTES}] = \int D\bar{\psi}\, D\psi\, DA\, D\bar{c}\, Dc\; e^{i\int d^4x\left(\mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{FONTES}}\right)}$$

Note que podemos escrever o termo advindo de $-\frac{1}{2\xi}\left(\partial^{\mu}A^{a}_{\mu}\right)^2$ na forma:

$$e^{i\int d^4x\left[-\frac{1}{2\xi}\left(\partial^{\mu}A^{a}_{\mu}\right)^2\right]} = \int DB\; e^{i\int d^4x\left[\frac{\xi}{2}\left(B^{a}\right)^2 + B^{a}\left(\partial_{\mu}A^{a\mu}\right)\right]}$$

O campo $B^a(x)$, assim introduzido, não tem termo cinético e portanto não tem dinâmica alguma e é chamado de campo auxiliar. Podemos fazer a integral funcional neste campo e desaparecer com ele da teoria. De fato:

$$\int DB\; e^{i\int d^4x\left[\frac{\xi}{2}\left(B^{a}\right)^2 + B^{a}\left(\partial_{\mu}A^{a\mu}\right) - \frac{1}{2\xi}\left(\partial^{\mu}A^{a}_{\mu}\right)^2 + \frac{1}{2\xi}\left(\partial^{\mu}A^{a}_{\mu}\right)^2\right]} =$$

$$\left(\xi B^{a} + \partial^{\mu}A^{a}_{\mu}\right)\left(\xi B^{a} + \partial^{\nu}A^{a}_{\nu}\right) = \xi^2\left(B^{a}\right)^2 + 2\xi\left(\partial^{\mu}A^{a}_{\mu}\right)B^{a} + \left(\partial^{\mu}A^{a}_{\mu}\right)^2$$

$$= e^{i\int d^4x\left[-\frac{1}{2\xi}\left(\partial^{\mu}A^{a}_{\mu}\right)^2\right]}\underbrace{\int DB\; e^{i\int d^4x\,\frac{1}{2\xi}\left[\xi B^{a} + \partial^{\mu}A^{a}_{\mu}\right]^2}}_{B'^{a} = \xi B^{a} + \partial^{\mu}A^{a}_{\mu} \qquad DB' = \xi DB} =$$

$$= e^{i\int d^4x\left[-\frac{1}{2\xi}\left(\partial^{\mu}A^{a}_{\mu}\right)^2\right]}\underbrace{\int \xi DB\, e^{i\int d^4x\,\frac{1}{2\xi}\left[B^{a}\right]^2}}$$

que é só um número que pode ser abosrvido na normalização de Z

Obtemos enfim:

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F^{a}_{\mu\nu}\right)^2 + \frac{\xi}{2}\left(B^{a}\right)^2 + B^{a}\left(\partial_{\mu}A^{a\mu}\right) + \bar{\psi}\left(i\not{D} - m\right)\psi + \bar{c}_a\left(-\partial^{\mu}D^{ac}_{\mu}\right)c_c}$$

(eq. 159.1)

Consideremos uma transformação infinitesimal que age sobre todos os campos da seguinte forma:

$$\boxed{\begin{aligned} &(a)\ \delta A_\mu^a = \epsilon D_\mu^{ac} c^c && (d)\ \delta \bar{c}^a = \epsilon B^a \\ &(b)\ \delta \psi = i g \epsilon c^a t^a \psi && (e)\ \delta B = 0 \\ &(c)\ \delta c^a = -\frac{1}{2} g \epsilon f^{abc} c^b c^c \end{aligned}}$$

número de Grassmann

(eq. 160.1)

Transformação BRST (Becchi, Rouet, Stora, Tyutin)

Onde ε, o parâmetro infinitesimal da transformação, é um número de Grassmann. As transformações de A e ψ, não passam de transformações de Gauge com parâmetro:

$$\alpha^a(x) = \underbrace{g\epsilon c^a(x)}$$

este produto de dois Grassmann é um c-number

$$\begin{cases} A_\mu^a \to A_\mu^a + \frac{1}{g}\left(\delta^{ac}\partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^b\right) g \overbrace{\epsilon c^c(x)}^{\alpha^c(x)} \\ \psi \to \left(1 + i g \epsilon c^a(x) t^a\right)\psi \end{cases}$$

Note, no entanto, que a Lagrangeana 159.1 não é invariante de Gauge (uma vez que temos um termo de fixação de Gauge). Outra observação importante é que a transformação dos campos físicos é proporcional ao Ghost c^a (e não o anti-ghost), mas que o parâmetro infinitesimal da BRST é ε, e portanto estas transformações são globais (ε não é função de x). Temos total liberdade para definir como os outros campos se transformam (e, do ponto de vista do formalismo de integral de trajetória, o campo do Ghost e do anti-ghost são completamente independentes) e o objetivo das definições 160.1 (c), (d) e (e) ficará claro em seguida.

Vejamos o que acontece com a Lagrangeana 159.1:

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}^a\right)^2 \\ &\bar{\psi}\left(i\not{D} - m\right)\psi \end{aligned}\right\}$$ trivialmente invariantes, já que se trata de uma transformação de Gauge para estes

$$\delta\left[\frac{\xi}{2}\left(B^a\right)^2\right] = 0$$ (B não se transforma)

$$\delta\left[\bar{c}_a\left(-\partial^\mu D_\mu^{ac}\right)c_c\right] = ? \Rightarrow D_\mu^{ac} c^c \to \left[\delta^{ac}\partial_\mu + g f^{abc}\left(A_\mu^b + \delta A_\mu^b\right)\right]\left[c^c + \delta c^c\right]$$

$$\delta\left[D_\mu^{ac}c^c\right]=\left[\delta^{ac}\partial_\mu+g f^{abc}A_\mu^b\right]\delta c^c+g f^{abc}\,\delta A_\mu^b\,c^c=$$

$$=\left[\delta^{ac}\partial_\mu+g f^{abc}A_\mu^b\right]\left(-\frac{1}{2}g\epsilon f^{cde}c^d c^e\right)+g f^{abc}\epsilon\left(D_\mu^{bd}c^d\right)c^c=$$

$$=-\frac{1}{2}g\epsilon f^{ade}\partial_\mu(c^d c^e)-\frac{1}{2}g^2\epsilon f^{abc}f^{cde}A_\mu^b c^d c^e+$$

$$+g f^{abc}\epsilon\,\delta^{bd}(\partial_\mu c^d)c^c+g f^{abc}\epsilon\, g f^{bed}A_\mu^e c^d c^c=$$

$b\to d$, $c\to e$

$$\underbrace{f^{ade}(\partial_\mu c^d)c^e}_{d\leftrightarrow e}+f^{ade}c^d(\partial_\mu c^e)=f^{ade}\partial_\mu(c^d c^e)$$

$$f^{aed}(\partial_\mu c^e)c^d=(-f^{ade})\left(-c^d(\partial_\mu c^e)\right)=$$

(−)

$$f^{ade}(\partial_\mu c^d)c^e=\frac{1}{2}f^{ade}\partial_\mu(c^d c^e)$$

o primeiro e o terceiro termos (proporcionais a $\frac{1}{2}g$) se cancelam

$$=-\frac{1}{2}g^2\epsilon f^{abc}f^{cde}A_\mu^b c^d c^e+g^2\epsilon\, f^{abc}f^{bed}A_\mu^e c^d c^c=$$

$e\to b,\ b\to c,\ c\to d,\ d\to e$

$$f^{acd}f^{cbe}A_\mu^b c^e c^d=-\frac{1}{2}f^{adc}f^{cbe}A_\mu^b c^e c^d-\frac{1}{2}f^{adc}f^{cbe}A_\mu^b c^e c^d=$$

(−) (−)

$e\leftrightarrow d$

$$=-\frac{1}{2}f^{aec}f^{cbd}A_\mu^b c^d c^e-\frac{1}{2}f^{adc}f^{ceb}A_\mu^b c^d c^e$$

cíclico em “bde”

$$=-\frac{1}{2}g^2\epsilon\underbrace{\left[f^{abc}f^{cde}+f^{aec}f^{cbd}+f^{adc}f^{ceb}\right]}_{0}A_\mu^b c^d c^e=0$$

identidade de Jacobi

$$\delta\left[\bar{c}_a\left(-\partial^\mu D_\mu^{ac}\right)c_c\right]=-\delta\bar{c}_a\,\partial^\mu\left(D_\mu^{ac}c_c\right)-\bar{c}_a\partial_\mu\,\cancel{\delta\left[D_\mu^{ac}c^c\right]}\to 0=-\epsilon B^a\partial^\mu\left(D_\mu^{ac}c_c\right)$$

Finalmente:

$$\delta\left[B^a(\partial_\mu A^a_\mu)\right] = B^a \partial_\mu\left(\delta A^a_\mu\right) = \epsilon B^a \partial_\mu\left(D^{ac}_\mu c^c\right)$$

De forma que:

$$\delta\left[\bar{c}_a(-\partial^\mu D^{ac}_\mu) c_c\right] + \delta\left[B^a(\partial_\mu A^a_\mu)\right] = 0$$

Vemos que a Lagrangeana, após a fixação de Gauge (e para qualquer fixação ξ), é invariante por transformação BRST (global). Além disso temos mais duas simetrias globais sobre as quais a Lagrangeana é invariante:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \delta A^a_\mu = \bar{\epsilon} D^{ac}_\mu \bar{c}^c & \delta B^a = -\bar{\epsilon} f^{abc} B^b \bar{c}^c \\ \delta c^a = \bar{\epsilon}\left(-B^a - g f^{abc} c^b \bar{c}^c\right) & \delta\psi = i g \bar{\epsilon} \bar{c}^a t^a \psi \\ \delta \bar{c}^a = -\frac{\bar{\epsilon}}{2} f^{abc} \bar{c}^b \bar{c}^c & \end{array}}$$

(eq. 162.1)

Transformação anti-BRST

e também:

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta c^a = \underbrace{\theta}_{\text{c-number}} c^a \\ \delta \bar{c}^a = -\theta \bar{c}^a \end{array}}$$

(eq. 162.2)

(leva a conservação do número de Ghosts)

(essa transformação é uma transformação de escala, ao invés de uma fase, por conta do tipo de hermicidade exigida para os campos de Ghost)

Definamos $s\phi$ como a transformação BRST infinitesimal do campo ϕ, eg:

$$\delta\phi \equiv \epsilon\, s\phi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s A^a_\mu = D^{ac}_\mu c^c \\ s\psi = i g c^a t^a \psi \end{cases}$$

Esta transformação está ligada ao gerador Q das transformações BRST:

$$|\,\rangle \to |\,\rangle' = e^{i\epsilon Q}|\,\rangle \approx |\,\rangle + i\epsilon Q|\,\rangle \qquad \delta|\,\rangle = i\epsilon Q|\,\rangle$$

$$\mathcal{O}_\pm \to \mathcal{O}'_\pm = e^{i\epsilon Q}\mathcal{O}_\pm e^{-i\epsilon Q} \sim (1 + i\epsilon Q)\mathcal{O}_\pm(1 - i\epsilon Q) =$$

$$= 1 + i\epsilon Q\mathcal{O}_\pm - i\underbrace{\mathcal{O}_\pm\epsilon}_{\pm\epsilon\mathcal{O}_\pm} Q + \ldots = \mathcal{O} + \underbrace{i\epsilon\left[Q, \mathcal{O}_\pm\right]_\mp}_{\delta\mathcal{O}}$$

$+ \to$ # campos fermiônicos par ou zero

$- \to$ # campos fermiônicos ímpar