

Rigorosamente falando, as identidades de Slavnov-Taylor são relações do tipo:

$$\frac{Z_4}{Z_1} = \frac{Z_1}{Z_3} \quad \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_1}{Z_3}$$

onde os Z's vão aparecer quando fizemos a renormalização da teoria. Veremos que estas relações são necessárias para garantir a renormalizabilidade da teoria (da mesma forma que precisávamos de $Z_2 = Z_1$ na QED, o que é garantido pelas identidades de W-T, veja página 52). A equação 169.3 nos permite provar as relações de Slavnov-Taylor a todas as ordens em teoria de perturbação, e por isso contém todo o conteúdo físico das identidades S-T.

Correções radiativas em teorias não-Abelianas

(Peskin 16.5, Ryder 9.8)

Consideremos agora as correções a um loop para teorias não abelianas. Assim como na QED, esperamos que a simetria de Gauge coloque restrições importantes para que tipo de correção pode aparecer e, conseqüentemente, limite o número de divergências. Começemos com as correções ao propagador do próprio bóson de Gauge

Auto-energia do bóson de Gauge

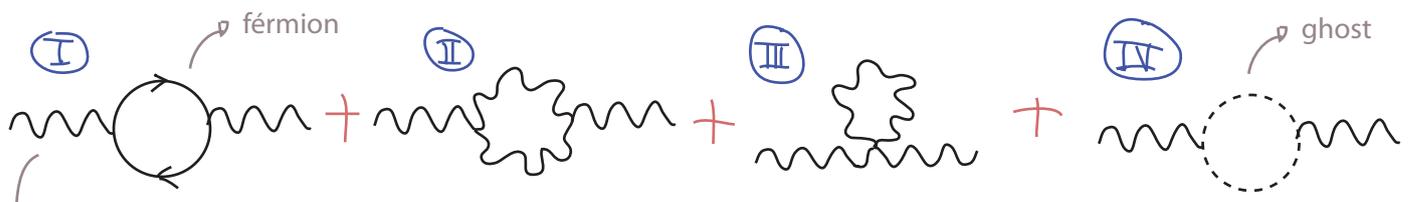
Na QED tínhamos:

$$i^N \left(\text{diagrama de auto-energia} \right) = 0 \iff \text{diagrama de auto-energia} = \sim (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2)$$

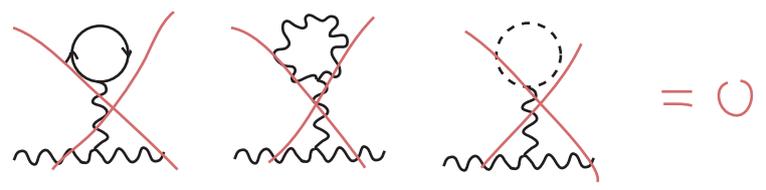
a única divergência possível era logarítmica (veja pg 70)

Esta relação continua valendo, portanto a correção deve ter a mesma forma. No entanto vamos calculá-la explicitamente para ver como isto acontece no caso não-Abeliano.

Até ordem g^2 , os diagramas que precisamos calcular são:



uma vez que os tadpoles são zero: (proporcionais ao vev de j_{μ} , ver pg 69)



O loop fermiônico (I) é muito parecido com o caso abeliano (pgs 52-60) com a diferença de que agora temos um gerador t^a em cada vértice (regra de Feynman 152.1, e como é um loop, tomamos o traço):

$$\text{Diagrama} = \text{Tr}[t^a t^b] i (q^\mu g^{\mu\nu} - q^\nu q^\mu) \frac{-g^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(m^2 - x(1-x)q^2)^{2 - \frac{d}{2}}}$$

(compare com 60.1 e 60.2)

(eq. 171.1)

$\delta^{ab} C(\alpha)$
 $SU(N)$
 fundamental: $C(N) = \frac{1}{2}$
 adjunta: $C(G) = N$

$$\left(\Gamma(2 - \frac{d}{2}) \sim \frac{2}{\epsilon} + \dots \right) \times \left(\frac{1}{\Delta^{2 - \frac{d}{2}}} \sim \frac{1 - \frac{1}{2} \epsilon \ln(\Delta) + \dots}{\Delta^2} \right) \times \left(\frac{1}{(4\pi)^2} \sim \frac{1}{4\pi^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right)$$

parte divergente vem daqui

$$\text{Diagrama} \sim \delta^{ab} C(\alpha) i (q^\mu g^{\mu\nu} - q^\nu q^\mu) \frac{-g^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \Gamma(2 - \frac{d}{2})$$

Note que temos um diagrama deste tipo para cada férmion na teoria que interaja com o campo de gauge. Assumindo que temos n_f férmions, todos se transformando na mesma representação a contribuição total para a parte divergente será:

$$\sum_{n_f} (\text{Diagrama}) = i (q^\mu g^{\mu\nu} - q^\nu q^\mu) \delta^{ab} \left[\frac{-g^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} n_f C(\alpha) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) + \dots \right]$$

(eq. 171.2)

Ok! O bóson não ganha massa daqui. A divergência é Log.

Usando 151.2 e 152.2 (faremos esta conta no Gauge de Feynman-'t Hooft, $\xi = 1$), calculamos o diagrama (II):

$$\text{Diagrama} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{-i}{p^2} \frac{-i}{(p+q)^2} g^2 p^{acd} p^{bcd} N^{\mu\nu}$$

\rightarrow simetria

$= C_2(G) \delta^{ab}$

$SU(N)$
 $C_2(G) = C(G) = N$

Onde:

$$N^{\mu\nu} = \left[g^{\mu\nu} (q-p)^\sigma + g^{\mu\sigma} (p - (-q-p))^\nu + g^{\sigma\nu} (-q-p-q)^\mu \right] g_{\sigma\sigma'} g_{\mu\mu'} \times \left[g^{\nu\mu'} (-q+p)^{\sigma'} + g^{\mu\sigma'} (-p - (q+p))^\nu + g^{\sigma\nu'} (q+p - (-q))^\mu \right]$$

Usando o procedimento usual:

$$\frac{1}{p^2} \frac{1}{(p+q)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{(Q^2 - \Delta)^2} \quad \begin{aligned} \ell &= p + xq \\ \Delta &= -x(1-x)q^2 \end{aligned}$$

Álgebra: $p = \ell - xq$; $\int d^d \ell \ell_\mu = 0$; $\ell^\mu \ell^\nu = g^{\mu\nu} \frac{\ell^2}{d}$

$$N^{\mu\nu} = \underbrace{-g^{\mu\nu} \ell^2}_{\text{blue}} \underbrace{6 \left(1 - \frac{1}{d}\right)}_{\text{green}} - \underbrace{g^{\mu\nu} q^2 \left[(2-x)^2 + (1+x)^2 \right]}_{\text{green}} + \underbrace{q^\mu q^\nu \left[(2-d)(1-2x)^2 + 2(1+x)(2-x) \right]}_{\text{red}}$$

Passando então para o espaço euclidiano e fazendo as integrais em $\int d^d \ell_E$:

$$\text{Diagram} = \frac{i g^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \left\{ \underbrace{\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2 \left[\frac{3}{2}(d-1)x(1-x) \right]}_{\text{blue}} + \underbrace{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2 \left[\frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{1}{2}(1+x)^2 \right]}_{\text{green}} - \underbrace{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) q^\mu q^\nu \left[(1-\frac{d}{2})(1-2x)^2 + (1+x)(2-x) \right]}_{\text{red}} \right\}$$

(eq. 172.1)

O diagrama (III) é obtido usando a regra 153.1:

$$\begin{aligned} & \text{Diagram} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{-i g_{\rho\alpha}}{p^2} \delta^{cd} (-i g^{\alpha\beta}) \times \\ & \times \left[\underbrace{f^{abc} f^{cde}}_{\text{green}} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + \underbrace{f^{ace} f^{bde}}_{\text{green}} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + \underbrace{f^{abc} f^{dce}}_{\text{green}} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \right] \\ & \underbrace{(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})}_{\text{green}} f_{\rho\alpha} + \underbrace{(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})}_{\text{green}} f_{\rho\alpha} = 2 (g^{\mu\nu} d - g^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

$$\text{Diagram} = -g^2 C_2(G) \delta^{ab} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2} g^{\mu\nu} (d-1)$$

(eq. 172.2)

Para facilitar a soma dos diagramas (II) e (III), vamos complicar a expressão 172.2:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama} &= -g^2 C_2(G) \delta^{ab} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} g^{\mu\nu} (d-1) \frac{(q+p)^2}{(q+p)^2} = \\
 &= -g^2 C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{g^{\mu\nu} (d-1)}{(\ell^2 - \Delta)^2} [\ell^2 + (1-x)^2 q^2] =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{i g^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \left\{ -\Gamma(1-d/2) g^{\mu\nu} q^2 \left[\frac{1}{2} d(d-1)x(1-x) \right] - \Gamma(2-d/2) g^{\mu\nu} q^2 \left[(d-1)(1-x)^2 \right] \right\}$$

(eq. 173.1)

Somando 173.1 e 172.1 temos (considerando os coeficientes dos termos em azul):

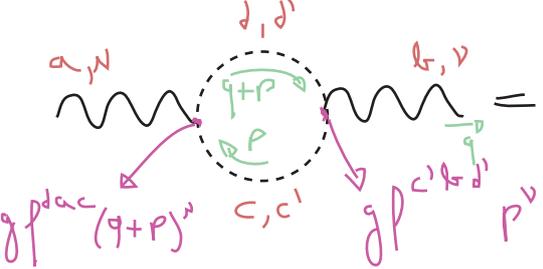
(eqs. 173.2)

$$\Gamma(1-d/2) g^{\mu\nu} q^2 \Rightarrow -\left[\frac{1}{2} d(d-1)x(1-x) \right] + \left[\frac{3}{2} (d-1)x(1-x) \right] = \frac{1}{2} (3-d)(d-1)x(1-x)$$

$$\Gamma(2-d/2) g^{\mu\nu} q^2 \Rightarrow -\left[(d-1)(1-x)^2 \right] + \left[\frac{1}{2} (2-x)^2 + \frac{1}{2} (1+x)^2 \right]$$

$$\Gamma(2-d/2) q^\mu q^\nu \Rightarrow -\left[(1-d/2)(1-2x)^2 + (1+x)(2-x) \right]$$

O que precisamos é que o coeficiente de (b) e (c) sejam iguais (com sinal oposto), e que (a) desapareça. Mais uma vez o diagrama do Ghost é essencial, calculemos (IV) (usando 149.2 e 149.3):



$$= (-1) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2} \frac{i}{(p+q)^2} g^2 f^{dac} f^{cbd'} \delta^{cc'} \delta^{dd'} (q+p)^\mu p^\nu$$

(eq. 173.3)

$$= \frac{i g^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \left\{ -\Gamma(1-d/2) g^{\mu\nu} q^2 \left[\frac{1}{2} x(1-x) \right] + \Gamma(2-d/2) q^\mu q^\nu \left[x(1-x) \right] \right\}$$

Vejamos primeiramente como isto muda o termo 173.2(a):

$$\boxed{\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2}^{(a)} \Rightarrow \frac{1}{2} \underbrace{(3-d)(d-1)}_{4d-3-d^2} \kappa(1-\kappa) - \frac{1}{2} \kappa(1-\kappa) = \kappa(1-\kappa) \frac{1}{2} \left[4d - 4 - d^2 \right] =$$

$$= \kappa(\kappa-1) \left(1-\frac{d}{2}\right) (2-d)$$

O efeito deste $\left(1-\frac{d}{2}\right)$ é eliminar o polo em $d=2$. Lembre-se (pgs. 79-80) que a função $\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)$ tem polos em $d=2$ e $d=4$, o que equivale a uma divergência quadrática. No entanto:

$$\left(1-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)$$

E a função $\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)$ só tem polo em $d=4$ (o que equivale a uma divergência logarítmica, que é o que queremos). Assim, podemos trocar 173.2(a) por adicionar uma contribuição igual a:

$$\kappa(\kappa-1)(2-d)$$

Ao termo 173.2 (b):

$$\boxed{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2}^{(b)} \Rightarrow -(d-1)(1-\kappa)^2 + \frac{1}{2}(2-\kappa)^2 + \frac{1}{2}(1+\kappa)^2 + \kappa(\kappa-1)(2-d)$$

Se tudo der certo isto deve ser o termo 173.2 (c) com sinal oposto, vejamos como ficou o termo (c) com a contribuição do Ghost:

$$\boxed{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) q^\mu q^\nu}^{(c)} \Rightarrow -\left[\left(1-\frac{d}{2}\right)(1-2\kappa)^2 + (1+\kappa)(2-\kappa) \right] + \left[\kappa(1-\kappa) \right] =$$

$$= -\left(1-\frac{d}{2}\right)(1-2\kappa)^2 - \underbrace{(1+\kappa)(2-\kappa) + \kappa(1-\kappa)}_{-2 + \kappa - 2\kappa + \kappa^2 + \kappa - \kappa^2} = -\left(1-\frac{d}{2}\right)(1-2\kappa)^2 - 2$$

Para colocar (b) nesta forma note que estes termos se encontram dentro da integral:

$$\int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} f(x) \quad \text{onde: } \Delta = -\kappa(1-\kappa)q^2$$

$$\Delta(x) = \Delta(1-\kappa) \Rightarrow \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} f(x) \stackrel{\kappa \rightarrow 1-\kappa}{=} -\int_1^0 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} f(1-\kappa) = \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} f(1-\kappa)$$

Então podemos fazer esta troca em qualquer um dos termos somados. Em particular:

$$x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x \rightarrow \frac{x}{2} + \frac{1-x}{2} = \frac{1}{2}$$

Voltando ao (b):

$$-(d-1)(1-x)^2 + \frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{1}{2}(1+x)^2 + x(x-1)(2-d) =$$

$$= x^2 \left[-(d-2) - (d-1) + 1 \right] + x \left[2(d-1) + (d-2) - 1 \right] - (d-1) + \frac{5}{2} =$$

$$-2d+4 = 4\left(1-\frac{d}{2}\right) \quad 2d-2+d-2-1 = 2d-7+(d-1)$$

$$= 4x^2\left(1-\frac{d}{2}\right) - 4x\left(1-\frac{d}{2}\right) + x(d-1) - (d-1) + \frac{5}{2} =$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}$$

$$= 4x^2\left(1-\frac{d}{2}\right) - 4x\left(1-\frac{d}{2}\right) + \frac{d}{2} - \frac{1}{2} - d + 1 + \frac{5}{2} =$$

$$-\frac{d}{2} + \frac{6}{2} = \left(1-\frac{d}{2}\right) + 2$$

$$= \left(1-\frac{d}{2}\right)(2x-1)^2 + 2$$

que é exatamente o termo (c) com sinal trocado.

Logo a soma dos diagramas (II), (III) e (IV) nos dá:

$$\frac{i g^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \left[\left(1-\frac{d}{2}\right)(2x-1)^2 + 2 \right]$$

(eq. 175.1)

Que tem a forma necessária para não dar massa ao bóson de Gauge e está livre de divergências quadráticas, como esperávamos. A parte divergente da soma destes diagramas é dada por:

$$\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \sim \frac{1}{(4\pi)^2} \quad \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \sim 1$$

$$\rightarrow \frac{i g^2}{(4\pi)^2} C_2(G) \delta^{ab} (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx \left[\left(1-\frac{d}{2}\right)(2x-1)^2 + 2 \right] =$$

$$= \frac{i g^2}{(4\pi)^2} C_2(G) \delta^{ab} (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \left[-\frac{1}{3} + 2 \right] =$$

$$= i (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \delta^{ab} \left[-\frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(-\frac{5}{3} \right) C_2(G) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \right] \quad (\text{eq. 176.1})$$

Parte dependente de Gauge 4

Lembrando que este resultado foi obtido no gauge Feynman-'t Hooft ($\xi = 1$). Se tivéssemos feito o mesmo em um gauge geral, muito pouco mudaria. Basta fazer a troca:

$$-\frac{5}{3} \rightarrow -\left(\frac{13}{6} - \frac{\xi}{2}\right)$$

em 176.1 para obter o resultado geral:

$$\text{Diagrama 1} + \text{Diagrama 2} + \text{Diagrama 3} = i (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \delta^{ab} \left[-\frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(-\frac{13}{6} + \frac{\xi}{2} \right) C_2(G) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \right] + \dots$$

(eq. 176.2)

Função β

Uma vez que façamos a renormalização da teoria de gauge não-abeliano teremos que introduzir os seguintes contratermos:

$$\text{Diagrama 4} = -i (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \delta^{ab} \delta_3 \quad (\xi = 0)$$

$$\text{Diagrama 5} = i \delta_2$$

$$\text{Diagrama 6} = i g t^a \gamma^\mu \delta_1$$

(obteremos a relação entre γ_3 e δ_3 , que é a mesma para qualquer escolha de ξ , com $\xi = 0$ a conta é mais fácil)

Consideremos o propagador do bóson de Gauge (estamos seguindo o mesmo raciocínio da pag 109):

$$\Gamma^{(L)}(p) = \text{Diagrama 7} + (\text{LEAD LOOP}) + \text{Diagrama 8} + \dots$$

$$\tilde{D}(k)_{\mu\nu}^{ab} \left[-i (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \delta^{cd} \right] \delta_3 \tilde{D}(k)_{\mu\nu}^{cd}$$

$$\tilde{D}(k)_{\mu\nu}^{ab} \left[i (g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) \delta^{cd} A L_N \left(\frac{\Delta^2}{-k^2} \right) + \dots \right] \tilde{D}(k)_{\mu\nu}^{cd}$$

(151.2)

Soma das eqs. 176.2 e 171.2 trocando: $\Gamma(2 - \frac{d}{2}) \rightarrow L_N \left(\frac{\Delta^2}{-k^2} \right)$

A equação de Callan-Symanzik para a função de dois pontos é:

$$\left[M \frac{d}{dM} G^{(2)} + \beta(g) \frac{d}{dg} G^{(2)} + 2\gamma(g) G^{(2)} \right] = 0$$

Toda dependência de $G^{(2)}$ em M estará embutida em δ_3 . Notemos que:

$$\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} (k^\mu g^{\alpha\beta} - k^\alpha k^\beta) = \frac{k_\nu}{k^2} (k^\mu k^\beta - k^\mu k^\beta) = 0 = (k^\mu g^{\alpha\beta} - k^\alpha k^\beta) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

Então:

$$\begin{aligned} \tilde{D}(k)_{\mu\nu}^{ac} (k^\mu g^{\alpha\beta} - k^\alpha k^\beta) \delta^{cd} \tilde{D}(k)_{\alpha\beta}^{de} &= \delta^{\alpha\beta} \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} \right) (k^\mu g^{\alpha\beta} - k^\alpha k^\beta) \left(-i \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2} \right) = \\ &= -\frac{\delta^{\alpha\beta}}{k^4} (k^\mu g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \end{aligned}$$

Portanto: $\frac{dG^{(2)}}{dM} = \left[\frac{i}{k^4} (k^\mu g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \delta^{\alpha\beta} \right] \frac{d}{dM} \delta_3$

Comparemos as ordens em g dos dois outros termos:

$$A = \mathcal{O}(g^2) \Rightarrow \underbrace{\beta(g)}_{\mathcal{O}(g^n)} \underbrace{\frac{d}{dg} G^{(2)}}_{\mathcal{O}(g)} + 2 \underbrace{\gamma(g)}_{\mathcal{O}(g^n)} \underbrace{G^{(2)}}_{\mathcal{O}(1)}$$

$n \geq 1$

Podemos, em primeira ordem, ignorar a função β e obter a γ :

$$2\gamma_3(g) G^{(2)} = -M \frac{d}{dM} G^{(2)}$$

$$G^{(2)} = -\frac{i}{k^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \delta_{ab} \frac{-i}{k^2} \delta \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \delta^{ab} \rightarrow 0$$

(151.2) $\delta = 0$

$$2\gamma_3(g) \left\{ + \frac{i}{k^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \delta_{ab} \right\} = + M \left[\frac{i}{k^4} (k^\mu g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \delta^{\alpha\beta} \right] \frac{d}{dM} \delta_3$$

$$\gamma_3(g) = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta_3$$

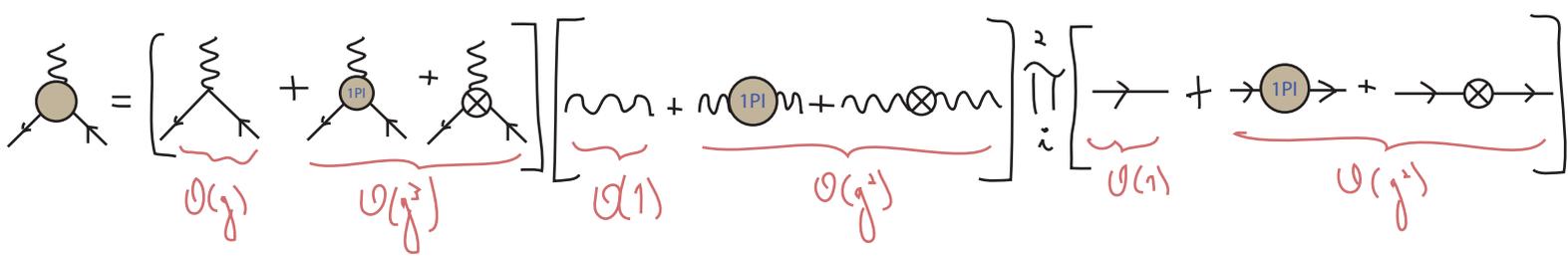
(eq. 177.1)

Que é exatamente o mesmo que obtivemos para um escalar na página 109. O mesmo raciocínio nos daria, para o férmion:

$$\gamma_2(g) = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta_2$$

(eq. 177.2)

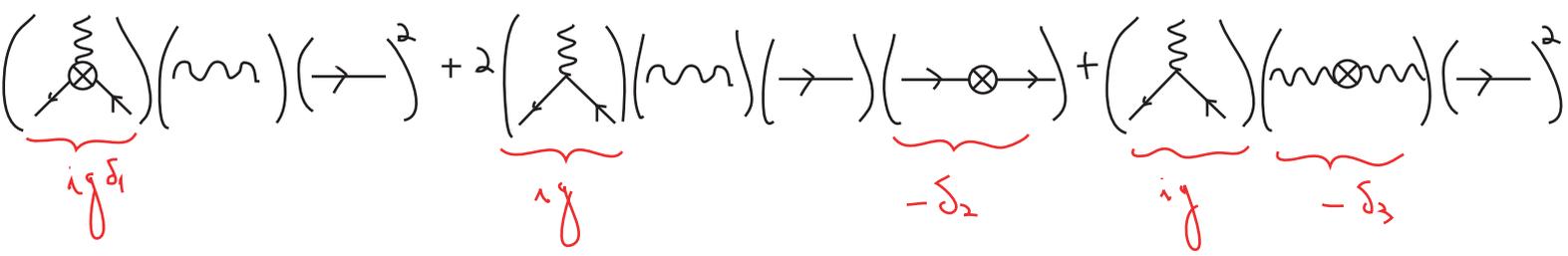
A função de Green de três pontos nos fornece o contratermo δ_1 e a função beta:



A lógica é analoga àquela da pag 110. A equação de Callan-Symanzik é:

$$\left[M \frac{d}{dM} + \beta(g) \frac{d}{dg} + 2\delta_2(g) + \delta_3(g) \right] G^{(3)} = 0$$

As contrinuições para $\frac{dG^{(3)}}{dM}$ vêm dos contratermos e começam em ordem g^3 :



$$M \frac{d}{dM} G^{(3)} = (\text{tree with loop}) M \frac{d}{dM} (i g \delta_1 - i 2 g \delta_2 - i g \delta_3)$$

$$\frac{dG^{(3)}}{dg} \underset{\text{L.O.}}{=} i (\text{tree with loop}) \quad G^{(3)} \underset{\text{L.O.}}{=} i g (\text{tree with loop})$$

$$(\text{tree with loop}) \left[M \frac{d}{dM} (i g \delta_1 - i 2 g \delta_2 - i g \delta_3) + \beta(g) + i g M \frac{d}{dM} \delta_2 + i g \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta_3 \right] = 0$$

$$\beta(g) = g M \frac{d}{dM} \left(-\delta_1 + 2\delta_2 + \delta_3 - \delta_2 - \frac{1}{2}\delta_3 \right)$$

$$\beta(g) = g M \frac{d}{dM} \left[-\delta_1 + \delta_2 + \frac{1}{2}\delta_3 \right]$$

(eq. 178.1)

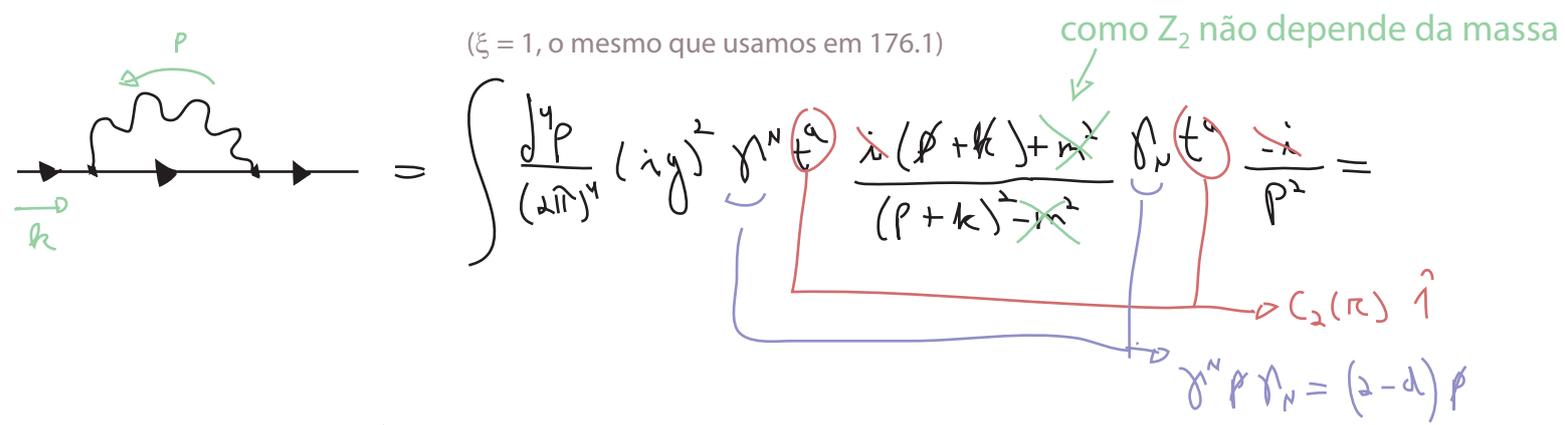
Agora só resta determinar os contratermos, δ_3 tem que cancelar a parte divergente das equações 171.2 e 176.2, portanto deve ser:

$$\delta_3 = \left(\frac{-g^2}{(4\pi)^2} \right) \left[\frac{4}{3} \eta_F C(\pi) + \left(-\frac{5}{3} \right) C_2(G) \right] \frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} =$$

$S(U(N)) \rightarrow C_2(G) = C(G) = N$ $\ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)$

$$\delta_3 = \frac{g^2}{4\pi^2} \left[\frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} \eta_F C(\pi) \right] \frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} \quad (\text{eq. 179.1})$$

Para obter δ_2 temos que calcular o diagrama:

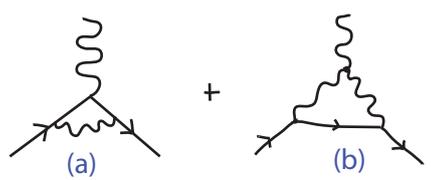


$$= -g^2 C_2(\pi) (2-d) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(p+k)}{(p+k)^2 p^2} = g^2 C_2(\pi) (d-2) \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(1-x)k}{(l^2 - \Delta)^2} =$$

$$= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(\pi) k \int_0^1 dx (1-x) (d-2) \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Delta^{2-d/2}} = \frac{ig^2}{(4\pi)^2} k C_2(\pi) \Gamma(2-d/2) + \dots \quad (\text{eq. 179.2})$$

parte divergente

Resta apenas calcular δ_1 , que vem das correções ao vértice, que a 1-loop são:



$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} g^3 t^b t^a t^b \frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}') \gamma^\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\nu}{(p+k')^2 (p+k)^2 p^2}$$

$$t^b t^a t^b = \underbrace{t^b t^b t^a}_{C_2(\mathfrak{r})} + t^b \underbrace{[t^a, t^b]}_{i f^{abc} t^c} = C_2(\mathfrak{r}) t^a + i f^{abc} t^b t^c =$$

$$\frac{1}{2} \left[f^{abc} t^b t^c + f^{abc} t^c t^b \right] =$$

$$= \frac{1}{2} f^{abc} [t^b, t^c] = \frac{1}{2} f^{abc} i f^{bcd} t^d$$

$$= C_2(\mathfrak{r}) t^a - \frac{1}{2} \underbrace{f^{abc} f^{bcd}}_{C_2(\mathfrak{g}) \delta^{ad}} t^d = \left[C_2(\mathfrak{r}) - \frac{1}{2} C_2(\mathfrak{g}) \right] t^a$$

Podemos obter a divergência deste diagrama de forma simples, tomando o limite p grande (nos casos anteriores haviam potenciais divergências quadráticas que se cancelaram, por isso foi tomado um cuidado maior).

$$\sim g^3 \left[C_2(\mathfrak{r}) - \frac{1}{2} C_2(\mathfrak{g}) \right] t^a \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu \not{p} \gamma^\mu \not{p} \gamma_\nu}{(p^2)^3} =$$

$$= \frac{i g^3}{(4\pi)^2} \left[C_2(\mathfrak{r}) - \frac{1}{2} C_2(\mathfrak{g}) \right] t^a \gamma^\mu \left[\Gamma(2 - \frac{d}{2}) + \dots \right]$$

(eq. 180.1)

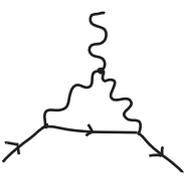
Usando a mesma lógica para o diagrama (b), temos:

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (i g \not{\partial}_\nu t^b) \frac{1 \not{p}}{p^2} (i g \not{\partial}_\rho t^c) \frac{-i}{(q-p)^2} \frac{-i}{(k-p)^2}$$

$$\cdot g f^{abc} \left[g^{\mu\nu} (q+k-p)^\rho + g^{\nu\rho} (-q-k+p)^\mu + g^{\rho\mu} (k-p-q)^\nu \right]$$

$$f^{abc} t^b t^c = \frac{1}{2} f^{abc} i f^{bcd} t^d = \frac{i}{2} C_2(\mathfrak{g}) t^a$$

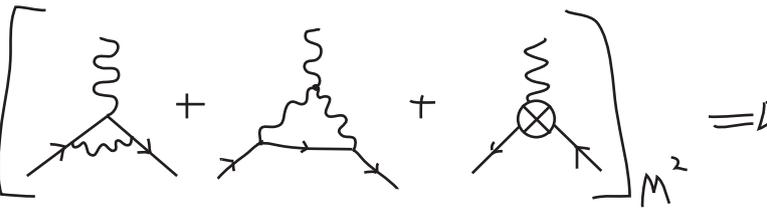
↳ conforme vimos acima



$$p \gg \hbar, k, l \quad \frac{g^3}{2} C_2(G) t^a \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_\nu \not{p} \gamma_\rho \frac{g^{\mu\nu} p^\rho - 2g^{\rho\nu} p^\mu + g^{\rho\mu} p^\nu}{(p^2)^3} \sim$$

$$\sim \frac{i g^3}{(4\pi)^2} \frac{3}{2} C_2(G) t^a \gamma^N \left(\Gamma(2 - \frac{d}{2}) + \dots \right)$$

(eq. 181.1)



$$\left[\text{triangle gluon} + \text{triangle fermion} + \text{ghost loop} \right]_{M^2} = D$$

$$D = \frac{-g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2 - \frac{d}{2}}} \left[C_2(R) + C_2(G) \right]$$

(eq. 181.2)

Finalmente, usando 178.1, 179.1 e 179.3:

(eq. 179.3)

$$\beta(g) = g^M \frac{d}{dM} \left[-\delta_1 + \delta_2 + \frac{1}{2} \delta_3 \right] = -2g \left[\frac{g^2}{(4\pi)^2} (C_2(R) + C_2(G)) - \frac{g^2}{(4\pi)^2} C_2(R) + \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(R) \right) \right] =$$

$M \frac{d}{dM} \frac{1}{(M^2)^{2 - \frac{d}{2}}} = (d-1) M^{d-4}$
 $M^{d-4} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \sim -\frac{2}{(d-1)} + \dots$

(eq. 179.1)

$$= -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left[+2 C_2(R) + 2 C_2(G) - 2 C_2(R) + \frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(R) \right] =$$

$$= -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left[\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(R) \right]$$

Que é negativo para $n_f \cdot C(R) < \frac{11}{4} C_2(G)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SU}(N): C_2(G) = N \\ \text{Férmions na fundamental: } C(N) = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow n_f < \frac{11}{2} N$$

$$\text{QCD: } \begin{cases} N=3 \\ n_f=6 < \frac{33}{2} \end{cases}$$

Teorias que satisfizerem esta condição terão constantes de acoplamento que vão a zero (asintoticamente) para energias altas, é isto que chamamos de **Liberdade Assintótica** e isto de fato ocorre na QCD).