

Correções Radiativas

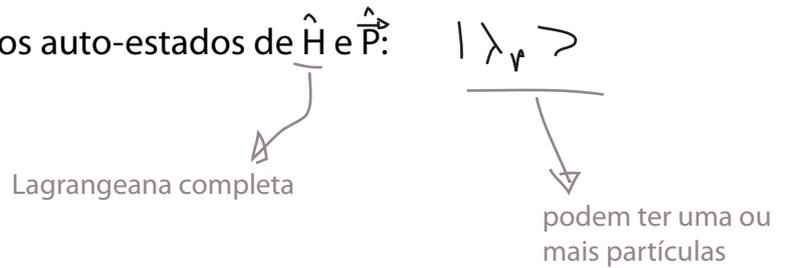
(Peskin 7.1, S. Weinberg QTF - Vol1 - 10.7)

Vamos agora olhar mais profundamente o que acontece com as funções de Green da teoria quando "ligamos" a interação. Começemos com o seguinte objeto:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle$$

estado fundamental (vácuo) da teoria interagente

Como interpretamos este objeto? Tomemos auto-estados de \hat{H} e $\hat{\vec{P}}$:



Notem que estamos assumindo que \hat{H} e $\hat{\vec{P}}$ comutam. Isto só é verdade porque se tratam de estados livres (a interação corrige o propagador por meio de loops) ou estados representando um conjunto de partículas (ligadas ou não) que tratamos como um único corpo (a energia de ligação já está incluída na massa do estado composto, que por sua vez é livre). Não estamos falando agora de espalhamentos.

Definamos: $|\lambda_0\rangle \rightarrow \hat{\vec{P}} |\lambda_0\rangle = 0$

λ carrega todos os outros números quânticos dos possíveis estados
 estado de momento zero

$\hat{H} |\lambda_0\rangle = E_0(\lambda) |\lambda_0\rangle$

$$|\lambda_0\rangle \xrightarrow{\text{Boost } \vec{P}} |\lambda_p\rangle$$

A invariância de Lorentz de \hat{H} me diz que $|\lambda_p\rangle$ também é auto-estado de \hat{H}

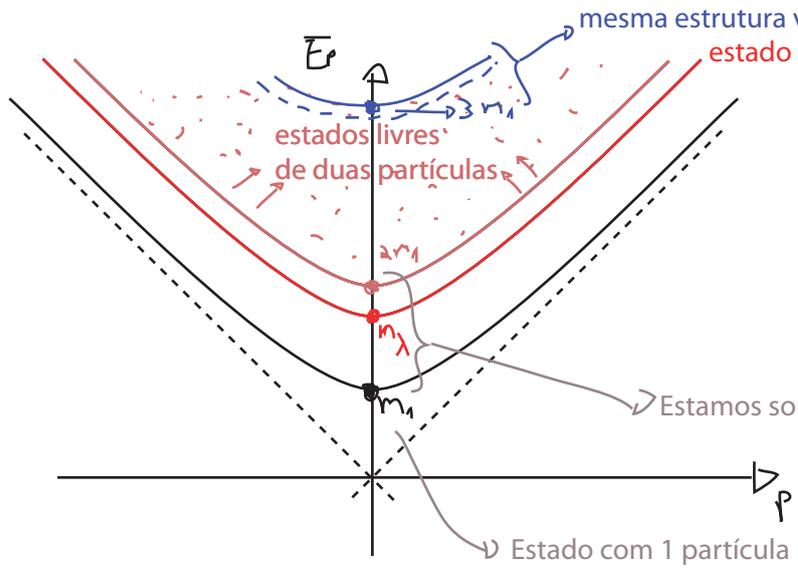
$$\hat{H} |\lambda_p\rangle = E_p(\lambda) |\lambda_p\rangle$$

$$E_p(\lambda) \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_\lambda^2}$$

Estou definindo como "massa", a energia do estado em seu referencial de repouso (o que faz todo sentido para estados de 1 partícula ou mesmo estados ligados)

Qualquer autovalor de H pode ser escrito como um boost de um outro autovalor com momento zero.

Autovalores de $\hat{P}^\mu = (\hat{H}, \hat{\vec{P}})$:



$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} |\lambda_p\rangle\langle\lambda_p|$$

Estamos somando sobre estes pontos e integrando sobre as curvas

$$x^0 > y^0$$

$$\langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle = \langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle}_{0} \langle\Omega|\phi(y)|\Omega\rangle + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \langle\Omega|\phi(x)|\lambda_p\rangle \langle\lambda_p|\phi(y)|\Omega\rangle$$

$$\langle\Omega|\phi(x)|\lambda_p\rangle = \langle\Omega| e^{i\hat{P}x} \underbrace{\phi(0)}_{\text{translação}} e^{-i\hat{P}x} |\lambda_p\rangle = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_p\rangle e^{-i p x}$$

$p^0 = E_p$

$$= \langle\Omega|U^{-1}U\phi(0)U^{-1}U|\lambda_p\rangle e^{-i p x} = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle e^{-i p x}$$

boost de \vec{p} para 0
 $U|\lambda_p\rangle = |\lambda_0\rangle$

$$U\phi(0)U^{-1} = \phi(0) \quad \langle\Omega|U^{-1} = \langle\Omega|$$

↳ para campos de spin maior teríamos que ter mais cuidado aqui (vai para a lista)

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-iE_p(x-y_0)} =$$

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-iE_p(x-y_0)}}{2E_p(\lambda)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)}$$

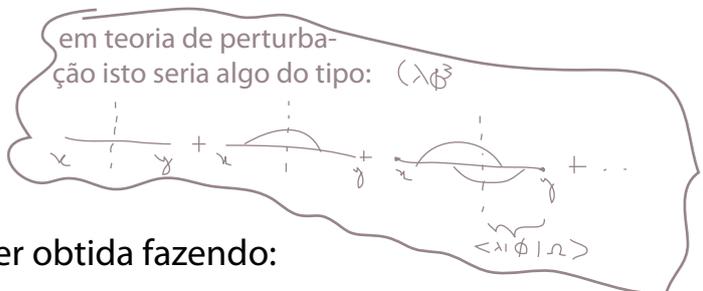
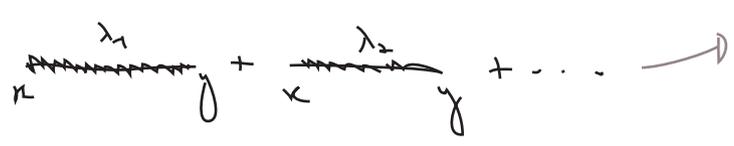
$$D_F(k, m) = \frac{i}{p^2 - m^2}$$

$$= \sum_{\lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2$$

Poderíamos fazer o mesmo para o caso $y_0 > x_0$ e obter:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 D_F(x-y, m_{\lambda}^2)$$

Note que obtemos o propagador de Feynman com a massa substituída por m_{λ} . Para cada estado λ contribuindo para a função de 2 pontos temos também um "peso" dado pela amplitude de criação daquele estado a partir do vácuo.



Uma forma útil de escrever esta soma pode ser obtida fazendo:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 D_F(x-y, M^2) =$$

$$\rho(M^2) = \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2$$

Densidade espectral

$$= \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x-y, M^2)$$

(representação espectral de Källén-Lehmann)

É importante notar que, para um estado intermediário de uma partícula:

$$\kappa \xrightarrow{\phi} \eta$$

teremos $m_\lambda = m$, onde m é o autovalor de energia (para a Hamiltoniana interagente) no referencial de repouso da partícula. Esse estado contribui com uma função $\delta(M^2 - m^2)$ para a densidade espectral

$$\rho(M^2) = 2\pi \delta(M^2 - m^2) \cdot \underbrace{Z}_{|\langle \Omega | \phi(0) | 1_0 \rangle|^2} + \underbrace{\sigma(M^2)}_{\text{contribuições de estados de 2 ou mais partículas.}}$$

↑ estado de 1 partícula com momento zero

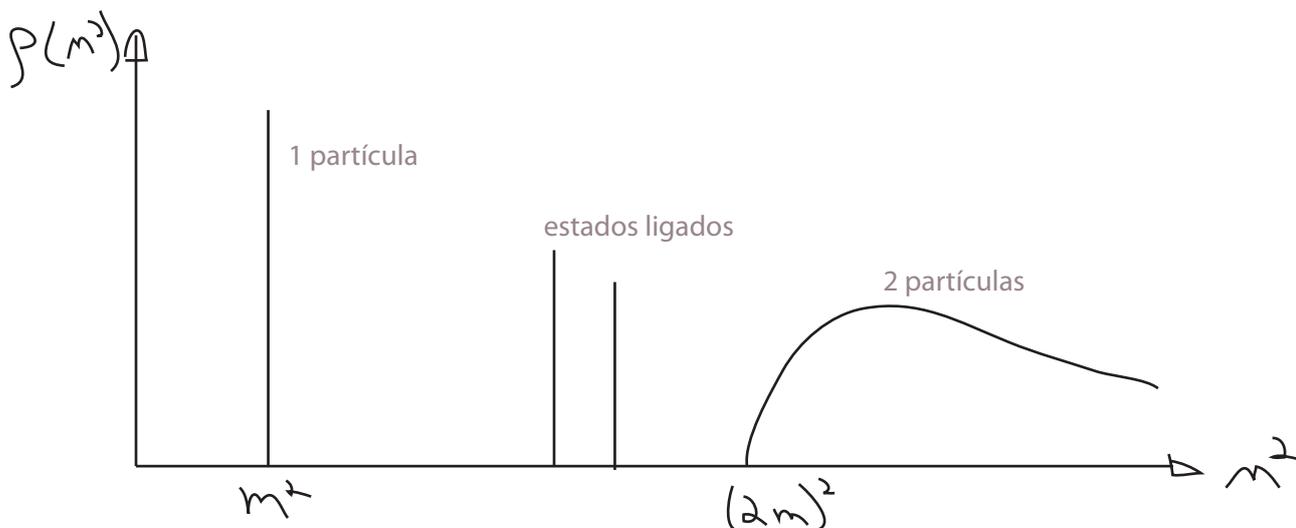
$Z \rightarrow$ Field Strength Renormalization

Esta massa "m" é a massa observável da partícula interagente e vai, em geral, diferir daquela que aparece na lagrangeana, que chamaremos de m_0

$m \rightarrow$ Massa física

$m_0 \rightarrow$ Massa nua (bare mass)

Em relação às contribuições de mais partículas, $\sigma(M^2)$, temos essencialmente duas possibilidades: a partir da energia em que podemos produzir duas ou mais partículas reais "livres" temos um espectro contínuo da massa m_λ . Mas abaixo desta energia podemos, dependendo da interação específica, ter estados ligados de duas ou mais partículas. Neste caso teremos polos adicionais em massas entre m e $2m$. Isto nos leva a uma forma tipicamente do tipo:

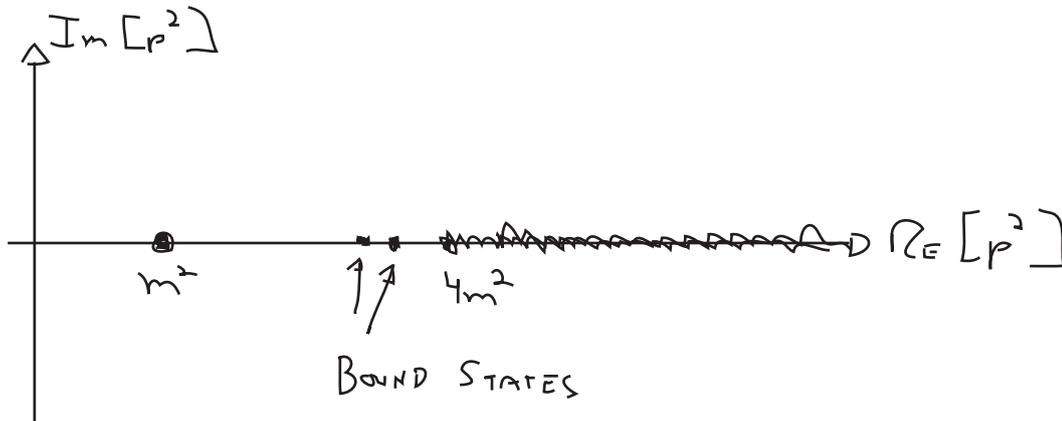


Passando para o espaço dos momentos:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | \Omega \rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

$$= \frac{i Z}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + (\text{BOUND STATES}) + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dM^2 \sigma(M^2)}{2\pi} \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

Que tem a seguinte estrutura analítica no plano complexo:



Comparemos este resultado com o caso de um campo livre:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | 0 \rangle = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

Os dois são semelhantes e fica claro que temos que levar Z para 1 quando "desligamos" a interação. De fato, é possível mostrar que (veja Weinberg, 10.7):

$$\int_0^{\infty} \rho(M^2) dM^2 = 1$$

&

$$1 = Z + \int_0^{\infty} \sigma(M^2) dM^2$$

O que também nos garante que a contribuição de estados de muitas partículas desaparece na teoria livre.

PS: no caso de espinores de Dirac, o mesmo raciocínio nos levaria a:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle = \frac{i Z_2 \sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots = \frac{i Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

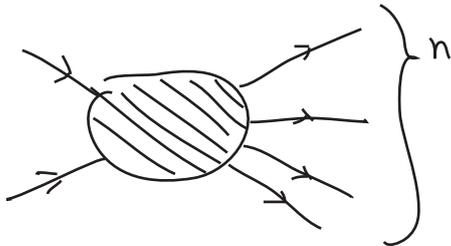
$$\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2} u^s(p)$$

PS2: obter de fato a forma da densidade espectral é uma tarefa árdua por se tratar de um cálculo não-perturbativo. Um método envolve a utilização de relações de dispersão. Quem estiver interessado pode ler: Weinberg, sec 10.8 ou Peskin, sec 18.4

A matriz S e a fórmula de redução LSZ (Lehmann, Symanzik, Zimmerman)

(Peskin 7.2, Ryder 6.8 e 7.3)

Vamos ver o que acontece quando generalizamos estas idéias para correlatores maiores



$$\Rightarrow \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

Vamos escolher um dos pontos acima (que chamaremos de x) e fazer a transformada de Fourier nele:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\int d^4x = \underbrace{\int_{T_+}^{\infty} dx^0}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{T_-}^{T_+} dx^0}_{\text{II}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{T_-} dx^0}_{\text{III}}$$

$$T_+ > \forall z_i^0 > T_-$$

Na região I o tempo x^0 é maior que os outros, portanto:

$$\int_{T_+}^{\infty} d^4x \int d^3k e^{iP^0 x^0} e^{-i\vec{P} \cdot \vec{x}} \langle \Omega | \phi(x) T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

$$\sum_{\lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{k}}(\lambda)} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\vec{k}} \rangle \langle \lambda_{\vec{k}} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\langle \Omega | \phi(x) | \lambda_k \rangle = \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle e^{-i k x} \quad \left. \begin{array}{l} \text{v. p. } \neq \gamma \\ k^0 = E_k(\lambda) \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{\lambda} \int_{T_+}^{\infty} d^4 x_0 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \underbrace{\int d^3 x e^{+i \vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x}}}_{(2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{p})} \frac{1}{2E_k(\lambda)} e^{i p^0 x_0} e^{-i E_k x_0} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \times \langle \lambda_k | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

$$= \sum_{\lambda} \int_{T_+}^{\infty} d^4 x_0 \frac{1}{2E_p(\lambda)} e^{-i(E_p - p^0)x_0 - \epsilon x_0} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \times \langle \lambda_p | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

← Para garantir convergência

$$= \sum_{\lambda} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \frac{i e^{-i(E_p - p^0)T_+ - \epsilon T_+}}{[p^0 - E_p(\lambda) + i\epsilon]} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_p | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

→ será suprimido no que segue, já que próximo ao polo é igual a 1

Esta é uma função de p_0 com singularidades em todos os pontos $E_p(\lambda)$. Se estas singularidades são polos isolados ou cortes vai depender da teoria específica. Vamos nos interessar com o que ocorre próximo ao polo, que equivale a uma partícula de massa (física) m .

$$p^2 - m^2 = p_0^2 - |\vec{p}|^2 - m^2 = p_0^2 - \underbrace{(|\vec{p}|^2 + m^2)}_{E_p^2} = (p_0 + E_p)(p_0 - E_p)$$

$$\lim_{p_0 \rightarrow +E_p} p^2 - m^2 = 2E_p(p_0 - E_p)$$

$$\int d^4 x e^{i p x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}}_{p_0 \rightarrow E_p} \sqrt{Z} \langle \vec{p} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

estado de 1 partícula com momento \vec{p}

← $\langle \Omega | \phi_0 | \Omega \rangle$ → estado de 1 partícula com momento zero

este símbolo quer dizer "tem polos iguais a" (estamos desprezando os termos finitos)

Se fizermos o mesmo para a região III, veremos que

$$\int d^4x e^{iP \cdot x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{P_0 \rightarrow -E_P}_{\sim} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \Omega | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | -\vec{P} \rangle$$

A região II não possui polos em $P_0 \rightarrow E_P$ ou $P_0 \rightarrow -E_P$ se tentássemos o mesmo procedimento chegaríamos a algo na forma:

$$\int d^3k \frac{i}{E_0 - E_{k+p} + E_k}$$

Gostaríamos de continuar fazendo isso para todos os outros campos dentro do produto temporalmente ordenado, mas temos que ter cuidado com o isolamento das partículas externas. A forma de fazer isso é voltar na página 6 e, ao invés da transformada de Fourier, usamos um pacote de onda estreito:

$$\int d^4x e^{iP^0 x_0} e^{-i\vec{P} \cdot \vec{x}} \longrightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^4x e^{iP^0 x_0} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \psi(\vec{k})$$

$\psi(\vec{k})$: distribuição estreita centrada em \vec{p} (voltamos a transformada de Fourier se fizemos esta distribuição virar uma delta de Dirac)

Esta pequena indeterminação no momento da partícula associada faz com que ela fique com a posição contida em uma região do tamanho deste pacote. Retraçando todo o raciocínio acima teremos agora:

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi(\vec{k}) \frac{1}{2E_k(\lambda)} \frac{i}{p^0 - E_k(\lambda) + i\epsilon} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_k | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{\sim}_{P^0 \rightarrow E_P} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i \psi(\vec{k})}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \vec{k} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\tilde{p} = (P_0, \vec{k})$$

Na prática agora o polo "anda" conforme variamos \vec{k} , ou seja, o polo de uma partícula virou um pequeno corte cujo comprimento é a largura de $\psi(\vec{k})$. A volta ao caso anterior é bem definida conforme estreitamos $\psi(\vec{k})$ até que vire uma delta e o corte volta a ser um polo.

Se fizermos o mesmo para todos os pontos na função de $n+2$ pontos da página 6, obteremos:

$$\int \prod_{i=1}^{n+2} \left(\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} d^4 x_i e^{i \tilde{P}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

De novo temos três regiões:



Se tomarmos os tempos que dividem as regiões suficientemente grandes (para o passado ou futuro) podemos assumir que nestas regiões já não há mais sobreposição alguma dos pacotes e dividir cada uma das integrais anteriores em três regiões, assim como fizemos antes. Mais uma vez, não precisamos nos preocupar com a região II, pois as integrais nessa região resultam em funções analíticas. Pensemos nas regiões I e III, e no caso em que só "empacotamos" dois campos:

$$x_1^0, x_2^0 \in I$$

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \int \prod_{i=1,2} \left(\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} d^4 x_i e^{i \tilde{P}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right)$$

$$\times \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_k \rangle \langle \lambda_k | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

É aqui os pacotes de onda se tornam importantes. Como este estado tem que ser aniquilado por campos que sofrem a restrição de só serem diferentes de zero em locais isolados do espaço ele tem que ser composto de duas excitações distintas e isoladas espacialmente. Neste caso podemos fazer a aproximação:

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_k \rangle \langle \lambda_k | \Omega \rangle =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_1}} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_2}} \langle \Omega | \phi(x_1) | \lambda_{k_1} \rangle \langle \Omega | \phi(x_2) | \lambda_{k_2} \rangle \langle \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} | \Omega \rangle$$

Agora podemos separar a contribuição dos "polos" de uma partícula (que na verdade agora são pequenos cortes):

$$\int \prod_{i=1}^2 \left(\frac{\int d^3k_i}{(2\pi)^3} \int d^4x_i e^{i\tilde{p}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle \sim$$

$$\underbrace{\int \prod_{i=1}^2 \left(\frac{\int d^3k_i}{(2\pi)^3} \varphi_i(\vec{k}_i) \frac{i\sqrt{z^1}}{\tilde{p}_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right)}_{\substack{P_1^0 \rightarrow E_{k_1} \\ P_2^0 \rightarrow E_{k_2}}} \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

Para voltarmos em estados assintóticos de momento bem definido, basta tomar o limite em que os pacotes viram funções delta. A expressão acima se torna:

$$\prod_{i=1}^2 \left(\frac{\delta^3(\vec{k}_i)}{(2\pi)^3} \right) \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

Finalmente, podemos fazer o mesmo para as funções que restam (colocando-as na região III - passado) e vemos que o termo mais singular de:

$$\int \prod_{i=1}^{n+2} \left(\frac{\int d^3k_i}{(2\pi)^3} \int d^4x_i e^{i\tilde{p}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

$$\sim \prod_{i=1}^{n+2} \left(\frac{\delta^3(\vec{k}_i)}{(2\pi)^3} \right) \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | (-\vec{p}_3) (-\vec{p}_4) \dots \rangle_{IN}$$

contém em si elementos de matriz de S

Resumindo

$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$
 ↓ pacotes de onda

$\prod (\text{propagadores completos}) \langle S \rangle$
 ↑ volta ao pacote estreito

$\int \prod \frac{\int d^3k_i}{(2\pi)^3} \varphi_i(\vec{k}_i) \langle \phi_1 \dots \phi_{n+2} \rangle$
→ polos termo mais singular
 $\int \prod \int d^3k_i \frac{\varphi_i(\vec{k}_i) \sqrt{z^1}}{p_i^2 - \vec{k}_i^2 - m^2} \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | \vec{k}_3 \dots \rangle$

* se pudermos inverter a ordem das duas operações indicadas, fica bem fácil obter os elementos da matriz S. Na prática esquecemos todo o caminho que envolve os pacotes e calculamos o correlator da teoria interagente no espaço dos momentos:

$$\prod_{i=1}^n \int d^4x_i e^{i p_i x_i} \prod_{j=1}^m \int d^4y_j e^{-i k_j y_j} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(y_1) \dots \phi(y_m) \} | \Omega \rangle$$

$$\underset{\substack{p_i^0 \rightarrow E_{p_i} \\ q_j^0 \rightarrow E_{q_j}}}{\sim} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{Z}^i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\prod_{j=1}^m \frac{\sqrt{Z}^j}{q_j^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | S | \vec{q}_1 \dots \vec{q}_m \rangle$$

(eq. 11.1)

ai basta olhar a função resultante na região em que todas as partículas externas estão "on-shell", perto de seus polos. O coeficiente do produto de todos os polos é o elemento de matriz S.

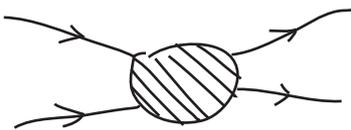
ps: no caso de partículas com spin, teremos fatores tais como $u^s(p)$ acompanhando os propagadores, neste caso temos também que separar estes fatores da matriz S, multiplicando por polarizações que projetem nos estados de spin finais e iniciais de espalhamento que queremos calcular

ps2: também temos que lidar com o fator \sqrt{Z} , podemos identificar quanto ele vale na função de dois pontos de cada partícula e "separá-lo" junto com os propagadores para obter a matriz S

Importante: note que o fator Z e a massa física apareceram neste desenvolvimento geral, mesmo sem termos identificado qualquer divergência nas correções radiativas. Suponha que estivessemos trabalhando em poucas dimensões e as integrais de loop convergissem. Teríamos que introduzir Z e uma massa m diferente daquela na lagrangeana (m_0)?

De fato, a possibilidade de fazer esta inversão foi provada por Lehmann, Symanzik, and Zimmermann e a equação 11.1 acima é conhecida como **Fórmula de Redução de LSZ**

Vamos tentar expressar esta fórmula por meio de diagramas de Feynman. Consideremos um caso simples:



Consideramos apenas os diagramas conectados, já que os desconectados não possuem a multiplicação de 4 polos que procuramos.

lembre-se, por exemplo, da teoria $\lambda\phi^4$ -

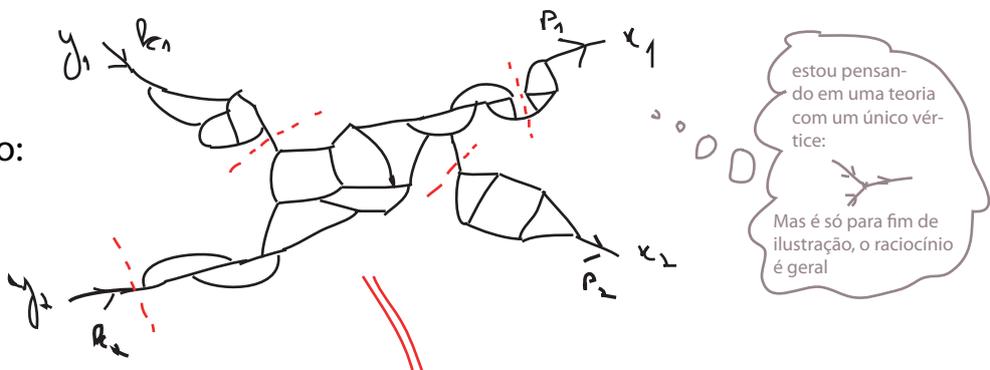
$$\text{X} = \Delta_F(x_1-z) \Delta_F(x_2-z) \Delta_F(x_3-z) \Delta_F(x_4-z)$$

$$\text{---} + \text{---} \sim \Delta_F \Delta_F$$

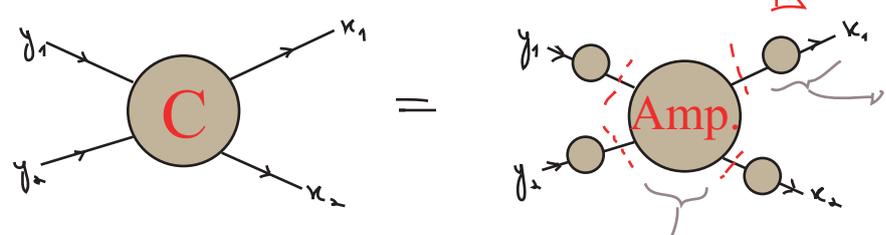
A função de quatro pontos no espaço dos momentos é:

$$\left(\prod_1^2 \int d^4 k_i e^{i P_i x_i} \right) \left(\prod_1^2 \int d^4 y_i e^{-i k_i y_i} \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle$$

Isso pode ser bem complicado:



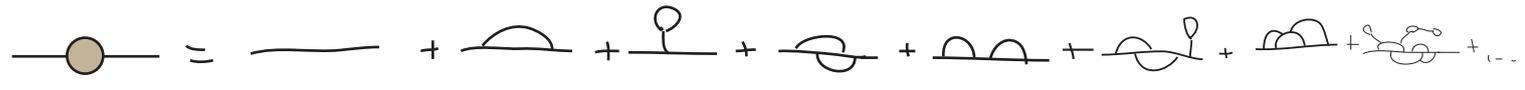
Mas podemos agrupar as correções da seguinte forma



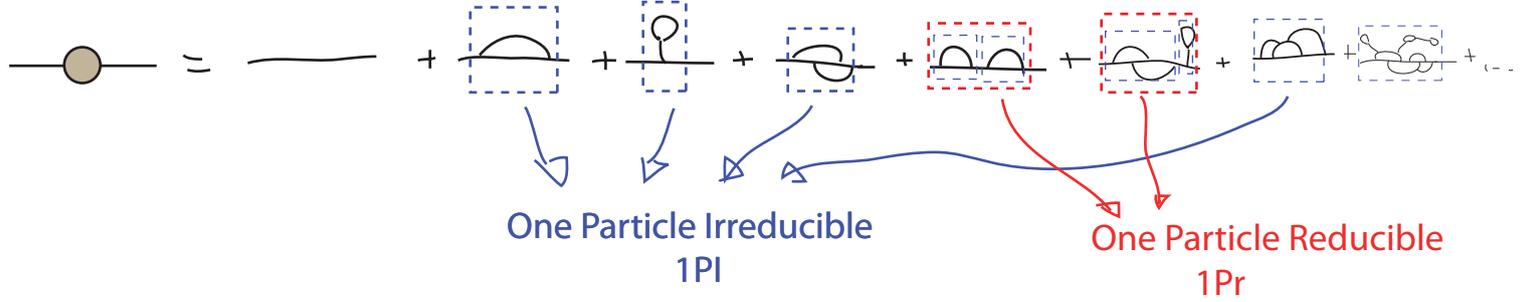
com isso agrupamos todas correções que só modificam o propagador nestas "pernas" - os **Propagadores Vestidos ou Completos**

Resta a parte que modifica o vértice da interação que chamamos de diagrama **Amputado**

Pensemos primeiro na estrutura dos propagadores:



Podemos dividir as correções em dois grupos:



Se definirmos um objeto que coleciona todas as correções 1PI:

$$-i M^2(p^2) = \rightarrow \text{1PI} \rightarrow$$

fica claro que as correções 1Pr serão dadas por: $\text{1PI} + \text{1PI} \text{1PI} + \text{1PI} \text{1PI} \text{1PI} + \dots$

De forma que a função de dois pontos completa pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \text{Diagrama} = \\
 & = \text{Diagrama} + \text{Diagrama com 1PI} + \text{Diagrama com 2PI} + \text{Diagrama com 3PI} + \dots = \\
 & = \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots = \\
 & = \frac{i}{p^2 - m_0^2} \left(1 + (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots \right) = \\
 & = \frac{i}{p^2 - m_0^2} \left(1 - \frac{M^2}{p^2 - m_0^2} \right)^{-1} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M(p^2)^2}
 \end{aligned}$$

O propagador completo é dado por uma função complicada, que envolve a **auto energia M**. Conforme a discussão das pags 4-5, sabemos que perto de $p^0 = E_p$ o único polo presente é o da massa física:

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2 - M(p^2)^2} \underset{p^0 \rightarrow E_p}{\sim} \frac{i z}{p^2 - m^2} + (\text{função sem polos})$$

Isso quer dizer que se formos para a região: $\left. \begin{array}{l} p_1^0 \rightarrow E_{p_1} \\ p_2^0 \rightarrow E_{p_2} \\ k_1^0 \rightarrow E_{k_1} \\ k_2^0 \rightarrow E_{k_2} \end{array} \right\}$

A função de quatro pontos terá o seu termo mais singular na forma:

$$\text{Diagrama de 4 pontos} = \frac{i z}{p_1^2 - m^2} \frac{i z}{p_2^2 - m^2} \frac{i z}{k_1^2 - m^2} \frac{i z}{k_2^2 - m^2} \text{Diagrama Amp.} + \dots$$

+ ... termos regulares

onde, do lado direito, resta apenas o vértice e suas correções (diagramas Amputados)

Comparando isto com o lado direito da fórmula de LSZ (eq. 11.1), reconhecemos os produtos dos polos e vemos que a matriz S deve ser:

$$\langle P_1 P_2 | S | k_1 k_2 \rangle = Z^2 \text{ Amp.}$$

Para fins de ilustração, no caso $\lambda\phi^4$, (em teoria de perturbação) tínhamos:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle = \\ = -3 \left[\text{diagrama desconectado} \right] - \frac{i\lambda}{4!} \left[72 \left(\text{diagrama } \Delta_F \Delta_F \right) + 27 \left(\text{diagrama } \Delta_F \Delta_F \Delta_F \Delta_F \right) \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned}$$

desconectados $(\Delta_F \Delta_F)$ $\Delta_F \Delta_F \Delta_F \Delta_F$

$$\begin{aligned} -i\lambda \int \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(z-x_4) dz \\ = -i\lambda \int dz \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4}{(2\pi)^{16}} \frac{i e^{-ik_1(z-x_1)}}{k_1^2 - m_0^2} \dots \frac{i e^{-ik_4(z-x_4)}}{k_4^2 - m_0^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int dz e^{-iz(\dots)} \rightarrow (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ = -i\lambda \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4}{(2\pi)^{16}} \frac{i}{k_1^2 - m_0^2} \dots \frac{i}{k_4^2 - m_0^2} \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) e^{ik_1 x_1} \dots e^{ik_4 y_4} \end{aligned}$$

que é a função no espaço das posições. Passando para o espaço dos momentos:

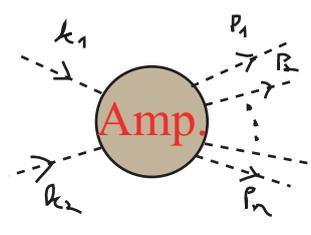
$$\begin{aligned} \int d^4k_1 e^{iP_1 x_1} \int d^4k_2 e^{iP_2 x_2} \int d^4k_3 e^{-ik_3 y_3} \int d^4k_4 e^{-ik_4 y_4} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle = \\ = -i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(-P_1 - P_2 + k_1 + k_2) \left[\frac{i}{P_1^2 - m_0^2} \frac{i}{P_2^2 - m_0^2} \frac{i}{k_1^2 - m_0^2} \frac{i}{k_2^2 - m_0^2} \right] \end{aligned}$$

amputação

notem que nessa caso não temos o Z (pois estamos em Leading Order)

Uma análise equivalente para funções de mais pontos nos leva a:

$$\langle p_1 \dots p_n | S | k_1, k_2 \rangle = (\sqrt{Z})^{n+2}$$



Note que para campos com spin teríamos fatores de polarização no lado direito, tal como $u_s(k)$ ou $\epsilon_\mu(k)$

Funções de Vértice

(Ryder 7.3)

Da mesma forma que fizemos para o propagador, podemos também definir uma soma para todas as correções do vértice (por exemplo em $\lambda\phi^4$):

$$\begin{aligned}
 -i\lambda\Gamma &= \text{[tree]} + \text{[loop]} + \text{[loop]} + \text{[loop]} + \dots \\
 -i\lambda\Gamma(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -i\lambda + \dots \\
 \Gamma(p_1, p_2, p_3, p_4) &= 1 + \dots
 \end{aligned}$$

} $\Gamma^{(4)}$

No caso da QED: $-ie\Gamma^\mu(p', p) = -ie\gamma^\mu + \dots$

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu + \dots$$

} $\Gamma^{(3)}$

Note que no caso da teoria $\lambda\phi^4$ temos um vértice com 4 pernas externas e na QED com três. Podemos também (em ambas as teorias) definir uma função de vértice para duas pernas externas.

$$\begin{aligned}
 \Pi^{(2)}(p) &= \text{[tree]} + \text{[loop]} + \dots \\
 \Pi^{(2)}(p) &= \text{[tree]} + \text{[loop]} + \text{[loop]} + \dots
 \end{aligned}$$

Mais para frente ficará claro porque eu chamei a função com duas pernas externas de $\Pi^{(2)}$ ao invés de $\Gamma^{(2)}$

Vamos ver como podemos definir estas funções para qualquer ordem o obter um funcional gerador para elas. Primeiro definimos:

$$\phi_{cl}[J]_{(x)} = \frac{\delta W}{\delta J(x)} = -i \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}$$

} $\frac{\delta Z[J]}{\delta J} = \langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0$

} $Z[J] = 1$

} para $J=0$

$W = -i \ln[Z[J]]$

mas estamos pensando em $J \neq 0$

$$\phi_{ce}(\mathcal{J}(x)) = -i \frac{\langle \Omega | \phi | \Omega \rangle_{\mathcal{J}}}{\langle \Omega | \Omega \rangle_{\mathcal{J}}}$$

Pensemos neste objeto em uma teoria escalar livre:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi \left(-\frac{1}{2} \phi (\square + m^2) \phi + \phi \mathcal{J} \right) \rightarrow \mathcal{Z}_0[\mathcal{J}] = e^{-\frac{i}{2} \int \mathcal{D}^4x \mathcal{D}^4y \mathcal{J}(x) \Delta_F(x-y) \mathcal{J}(y)}$$

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{p^2 - m^2}$$

$$\mathcal{W}_0 = -i \ln \mathcal{Z}_0 = -\frac{1}{2} \int \mathcal{D}^4x \mathcal{D}^4y \mathcal{J}(x) \Delta_F(x-y) \mathcal{J}(y)$$

$$\phi_{ce}(\mathcal{J}(x)) = - \int \mathcal{D}^4y \Delta_F(x-y) \mathcal{J}(y) \quad \xrightarrow{\text{DIAGRAMA}} \quad \begin{array}{c} \text{---} \text{X} \\ \color{red}{\kappa} \qquad \color{red}{\gamma} \end{array}$$

↳ que é a solução clássica do sistema

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \phi \mathcal{J}$$

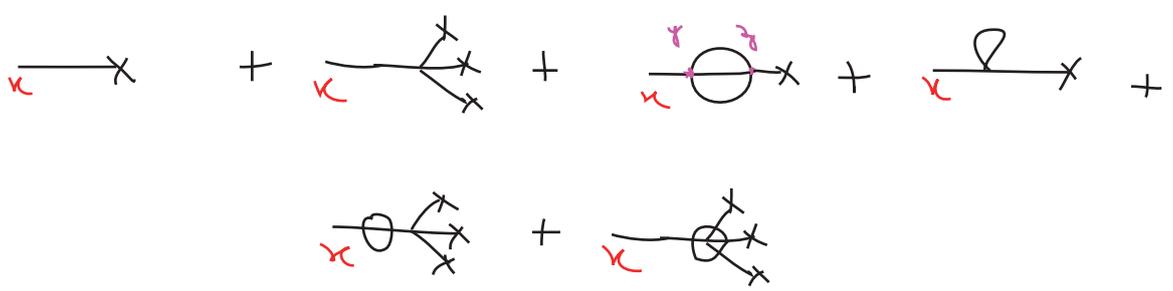
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi + \mathcal{J}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$$

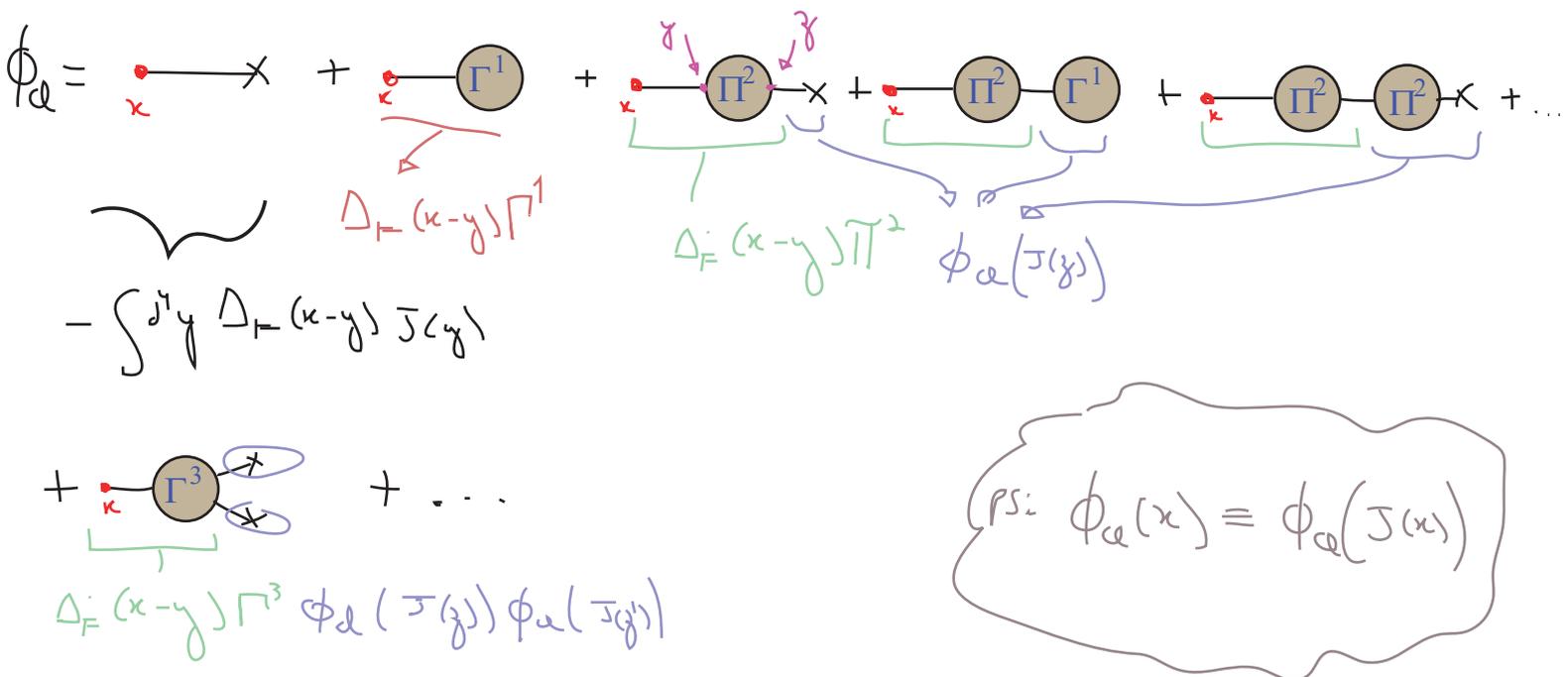
$$\square \phi - m^2 \phi + \mathcal{J} = 0 \Rightarrow (\square - m^2) \phi = -\mathcal{J}$$

$$\phi_{ce} = -(\square - m^2)^{-1} \mathcal{J}$$

Supondo agora que eu "ligasse" a interação, as contribuições para esta função de um ponto seriam (pensando em $\lambda \phi^4$):



Pensando em termos de diagramas 1PI (e em uma teoria mais geral):



$$\phi_\alpha(x) = - \int d^4y \Delta_F(x-y) \left\{ J(y) + \left(\Gamma^{(1)}(y) + \int d^4z \Pi^{(2)}(y,z) \phi_\alpha(z) + \frac{1}{2} \int d^4z d^4z' \Pi^{(3)}(y,z,z') \phi_\alpha(z) \phi_\alpha(z') + \dots \right) \right\}$$

(eq. 17.1)

Vamos definir o funcional gerador para estas funções de vértice:

$$\hat{\Gamma}[\phi_\alpha] \equiv \int d^4x \Gamma^{(1)}(x) \phi_\alpha(x) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Pi^{(2)}(x,y) \phi_\alpha(x) \phi_\alpha(y) + \dots$$

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta \phi_\alpha(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_\alpha(x_n)} \hat{\Gamma}[\phi_\alpha] \Big|_{\phi_\alpha=0} \quad (n \neq 2)$$

Comparando isto com 17.1, temos (toda a parte entre parênteses é basicamente isto com uma potência do campo clássico a menos):

$$\frac{\delta W}{\delta J(x)} = \phi_\alpha(J(x)) = - \int d^4y \Delta_F(x-y) \left(J(y) + \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_\alpha]}{\delta \phi_\alpha(y)} \right)$$

$$(\square_x + m^2) \phi_a(\mathcal{J}(x)) = - \int d^4y \underbrace{(\square_x + m^2) \Delta_F(x-y)}_{-\delta(x-y)} \left(\mathcal{J}(y) + \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_a]}{\delta \phi_a(y)} \right)$$

$$(\square_x + m^2) \phi_a(\mathcal{J}(x)) - \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_a]}{\delta \phi_a(x)} = \mathcal{J}(x)$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \left[\int d^4y \phi_a(y) (\square_y + m^2) \phi_a(y) \right] = \int d^4y \delta(x-y) (\square_y + m^2) \phi_a(y) = (\square_x + m^2) \phi_a(x)$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \left(\underbrace{\hat{\Gamma}[\phi_a] - \frac{1}{2} \int d^4y \phi_a(\mathcal{J}(y)) (\square_y + m^2) \phi_a(\mathcal{J}(y))}_{\Gamma[\phi_a]} \right) = -\mathcal{J}(x) \quad (\text{eq. 18.1})$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_a(x)} = -\mathcal{J}(x)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_a(y)} \Big|_{\phi_a=0} = \underbrace{\Pi^{(2)}(x,y)}_{\Gamma^{(2)}(x,y)} - (\square_x + m^2) \delta(x-y)$$

$$n \geq 2 \Rightarrow \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta \phi_a(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_a(x_n)} \Gamma[\phi_a] \Big|_{\phi_a=0}$$

Suponha que definamos $\Gamma[\phi_a]$ com a expressão:

$$W[\mathcal{J}] = \Gamma[\phi_a] + \int d^4x \mathcal{J}(x) \phi_a(x) \quad (\text{eq. 18.2})$$

$$\Rightarrow \frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x)} = \phi_a(x) \quad (\text{eq. 18.3})$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(y)} \left(\Gamma[\phi_a] = W[\mathcal{J}] - \int d^4x \mathcal{J}(x) \phi_a(x) \right)$$

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_a]}{\delta \phi_a(y)} = \underbrace{\frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \phi_a(y)}}_{\frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(y)} \frac{\delta \mathcal{J}(y)}{\delta \phi_a(y)}} - \frac{\delta \mathcal{J}(y)}{\delta \phi_a(y)} \phi_a(y) - \mathcal{J}(y)$$



$$\frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(y)} \frac{\delta \mathcal{J}(y)}{\delta \phi_a(y)} \Big|_{\phi_a = \phi_a(y)}$$

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_a]}{\delta \phi_a(y)} = -J(y)$$

que é justamente como o definimos antes (eq. 18.1) - usaremos esta nova definição porque é mais fácil generalizá-la quando tivermos mais campos.

Note que a função 1PI de dois pontos é $\Pi^{(2)}(x,y)$ e não $\Gamma^{(2)}(x,y)$

Temos uma interpretação para $\Gamma^{(2)}$?

TEORIA LIVRE
 $\Delta_F^C(x-y) = i \Delta_F(x-y) = \frac{-i}{p^2 - m^2}$

$$\phi_a(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} \quad \Delta_F^C(x-y) \text{ Propagador completo}$$

$$\frac{\delta \phi_a(x)}{\delta J(y)} = \frac{\delta^2 W}{\delta J(y) \delta J(x)} = i \langle n | T \{ \phi_a(x) \phi(y) \} | n \rangle$$

EQ 17.1

$$-\Delta_F(x-y) \left(1 + \int d^4z \Pi^{(2)}(y,z) \frac{\delta \phi_a(z)}{\delta J(y)} + \dots \right) = i \Delta_F^C(x-y)$$

$i \Delta_F^C(z-y) \rightarrow 0 \text{ / } J = \phi_a = 0$

Quando faço $J=0 \rightarrow \phi_a = 0$ (eq 16)

$$-\Delta_F(x-y) - i \Delta_F(x-y) \int d^4z \Pi^{(2)}(y,z) \Delta_F^C(z-y) = i \Delta_F^C(x-y)$$

$$-(\square + m^2)_x \left(\int d^4z \left(\delta^4(z-x) + \Delta_F(x-y) \Pi^{(2)}(y,z) \right) \Delta_F^C(z-y) = i \Delta_F(x-y) \right)$$

$$\int d^4z \left(\underbrace{-(\square + m^2)_x \delta^4(z-x) + \delta(x,y) \Pi^{(2)}(y,z)}_{\Gamma^{(2)}(x,z) \text{ (eq 18)}} \right) \Delta_F^C(z-y) = i \Delta_F(x-y)$$

$$\int d^4y \Gamma^{(2)}(x,y) \Delta_F^C(y-y) = i \delta(x-y)$$

(eq. 20.1)

$\Gamma^{(2)}(x,y)$ é a inversa do propagador completo! No espaço dos momentos:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^{(2)}(x,y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} \Gamma^{(2)}(p) \\ \Delta_F^C(y,y) &= \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{-i p'(y-y)} \Delta_F^C(p') \end{aligned} \right\} \begin{cases} \int d^4y \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} \Gamma^{(2)}(p) \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{-i p'(y-y)} \Delta_F^C(p') = i \delta(x-y) \\ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \delta^4(p-p') \Gamma^{(2)}(p) \Delta_F^C(p') e^{-i p x} e^{i p' y} = i \delta(x-y) \\ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Gamma^{(2)}(p) \Delta_F^C(p) e^{-i p(x-y)} = i \delta(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} i e^{-i p(x-y)} \end{cases}$$

$$\Gamma^{(2)}(p) \Delta_F^C(p) = i$$

(eq. 20.2)

$$\Delta_F^C(p) = \frac{i}{p^2 - \underbrace{m^2}_{m^2 = m_0^2 + M^2(p^2)}}$$

↖ massa física
↖ correções 1PI ao propagador (pg 13)
↘ massa livre

↙ função de Green de 2-pontos completa

$$\Gamma^{(2)}(p) = -i (p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)) = i (M^2(p^2) - (p^2 - m_0^2))$$

$$\Gamma^{(2)}(x,y) = \Gamma^{(2)}(x,y) - (0 + m^2) \delta(x-y)$$

Queremos achar relações análogas a 20.1 e 20.2 para vértices de mais pontos. Notando que:

$$\Delta_F^C(y-y) = \left(-i \frac{\delta^2 W}{\delta J(y) \delta J(y)} \right) \stackrel{18.3}{=} -i \frac{\delta \phi_a(y)}{\delta J(y)}$$

Podemos escrever a seguinte derivada

$$\frac{\delta}{\delta J(x'')} = \int d^4z'' \frac{\delta \phi_a(z'')}{\delta J(x'')} \frac{\delta}{\delta \phi_a(z'')} = i \int d^4z'' \Delta_F^C(z'', x'') \frac{\delta}{\delta \phi_a(z'')}$$

(eq. 20.3)

$$\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x'')} \int d^3z \Delta_F^c(x, z) \Gamma^{(4)}(z, y) = 0$$

$$\int d^3z \left(\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x'')} \Delta_F^c(x, z) \right) \Gamma^{(4)}(z, y) + \int d^3z \Delta_F^c(x, z) \left(\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x'')} \Gamma^{(4)}(z, y) \right) = 0$$

20.3

$$\int d^3z \left(-i \frac{\delta^3 W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x'') \delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(y)} \right) \Gamma^{(4)}(z, y) + i \int d^3z d^3z'' \Delta_F^c(x, z) \times \Delta_F^c(z'', x'') \left(\frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_\alpha(z'') \delta \phi_\alpha(z) \delta \phi_\alpha(y)} \right) = 0$$

$\times i \Delta_F^c(x', y)$
 $\int dy$

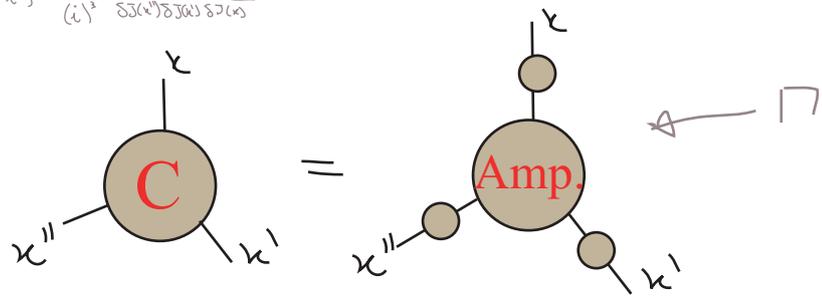
$$\int d^3z \frac{\delta^3 W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x'') \delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(y)} \int dy \underbrace{(\Delta_F^c(x', y) \Gamma^{(4)}(z, y))}_{i \delta(x' - y)} +$$

$$- \int d^3z d^3z'' dy \Delta_F^c(x, z) \Delta_F^c(z'', x'') \Delta_F^c(x', y) \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_\alpha(z'') \delta \phi_\alpha(z) \delta \phi_\alpha(y)} = 0$$

$y \rightarrow z'$

$$i \frac{\delta^3 W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x'') \delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(z')} = \int d^3z d^3z'' d^3z' \Delta_F^c(x, z) \Delta_F^c(z'', x'') \Delta_F^c(x', z') \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_\alpha(z'') \delta \phi_\alpha(z) \delta \phi_\alpha(z')}$$

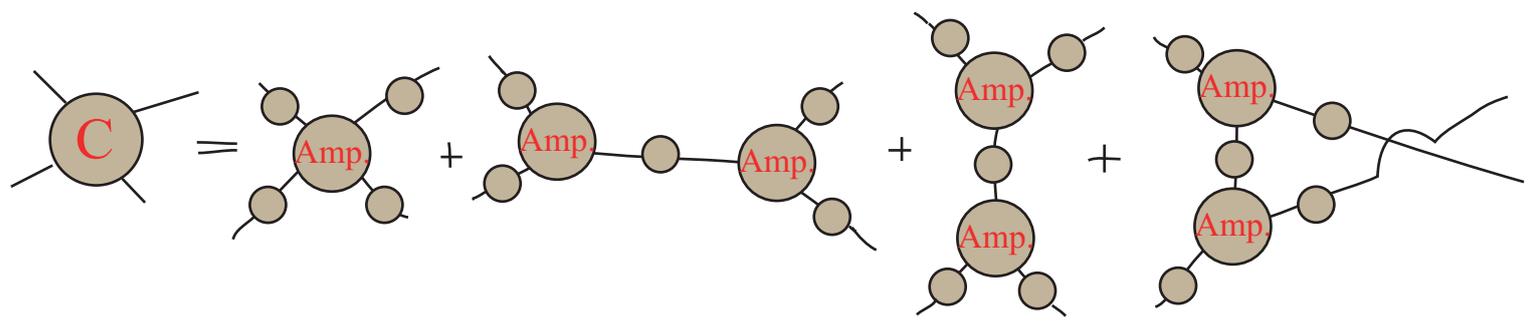
$$\phi(x, x', x'') = \frac{1}{(i)^3} \frac{\delta^3 W}{\delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(x') \delta \mathcal{J}(x')}$$



O que nos mostra que a função de vértice de fato contém os diagramas amputados que queríamos. Outra forma de ver isso é invertendo a expressão acima:

$$\frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta\phi(z'') \delta\phi(z) \delta\phi(z')} = - \int dx dx' dx'' \underbrace{\Gamma^{(A)}(x, z) \Gamma^{(A)}(x', z') \Gamma^{(A)}(x'', z'')}_{\text{como estes são os inversos dos propagadores completos, o efeito deles sobre o correlator será o de "amputar" os propagadores.}} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x'') \delta J(x) \delta J(x')} \quad (\text{eq. 22.1})$$

Podemos continuar derivando para obter expressões para as funções de ordem superior. Em termos de diagramas, a expressão para a função de 4 pontos seria:



Obs: note que na pg 18, trocamos a definição de $\Gamma[\phi_c]$ dada por 18.1 por:

$$W[J] = \Gamma[\phi_c] + \int dx J(x) \phi_c(x)$$

com $\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \phi_c(x)$ $\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_c(x)} = -J(x)$

$$f(x) \rightarrow g(\mu) \quad \mu = \frac{df}{dx}$$

$$g(\mu) = f(x) - \mu x$$

o que é uma generalização da transformada de Legendre

Identidades de Ward-Takahashi na QED

(Ryder 7.4, Peskin 7.4)

Com as definições feitas nas últimas páginas podemos agora provar uma generalização das identidades de Ward para os propagadores e vértices completos, as identidades de Ward-Takahashi. Começemos notando que quando quantizamos o campo eletromagnético fomos obrigado a fixar o gauge, pensando na Lagrangeana da QED:

$$\mathcal{L}_{\text{EFF}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \bar{\psi} \not{\partial} \psi + i e \bar{\psi} \not{A} \psi - m \bar{\psi} \psi - \underbrace{\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2}_{\mathcal{L}_{\text{GF}}} \quad (\text{eq. 22.2})$$

A Lagrangeana fixada, no entanto, não é invariante de gauge - mas precisamos que os observáveis da teoria - que vêm das funções de Green - o sejam. Portanto o funcional gerador deve ser invariante. Assim, dada uma transformação de gauge infinitesimal:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha \quad \alpha = \alpha(x)$$

$$\psi \rightarrow \psi - i e \alpha \psi$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} + i e \alpha \bar{\psi}$$

vamos ver o que acontece com Z. Lembrando que no funcional gerador aparece:

$$S = \int d^4x \left(\mathcal{L}_{\text{EFF}} + \bar{J}^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\Psi} \eta \right)$$

Quase toda a lagrangeana efetiva é invariante de gauge, com exceção do termo de gauge-fixing:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 &\rightarrow -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu + \square \alpha) (\partial^\nu A_\nu + \square \alpha) = \\ &= -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{\xi} \underbrace{(\partial^\mu A_\mu)(\square \alpha)}_{\text{integração por partes:}} + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &\quad \int d^4x (\partial^\mu A_\mu)(\square \alpha) = \int d^4x (\square \partial^\mu A_\mu) \alpha(x) \end{aligned}$$

As fontes também contribuem para a variação:

$$\begin{aligned} \underbrace{\bar{J}^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\Psi} \eta}_{\mathcal{L}_F} &\rightarrow \mathcal{L}_F + \underbrace{\bar{J}^\mu \partial_\mu \alpha}_{\text{integração por partes:}} - i e \alpha \bar{\eta} \psi + i e \alpha \bar{\Psi} \eta \\ &\quad \int d^4x \bar{J}^\mu \partial_\mu \alpha = - \int d^4x (\partial_\mu \bar{J}^\mu) \alpha(x) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iS} &\rightarrow N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{\xi} (\square \partial^\mu A_\mu) - \partial_\mu \bar{J}^\mu + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i e \bar{\eta} \psi + i e \bar{\Psi} \eta \right] \alpha(x) \right\} e^{iS} \end{aligned}$$

Considerando que $\alpha(x)$ é pequeno, podemos expandir a exponencial e obter:

$$Z \rightarrow Z + N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \left\{ \int d^4x \underbrace{\left[-\frac{1}{\xi} (\square \partial^\nu A_\nu) - \partial_\mu \bar{J}^\mu - i e (\bar{\eta} \Psi - \bar{\Psi} \eta) \right]}_{\mathcal{O}[A_\mu, \bar{\Psi}, \Psi]} \alpha(x) \right\} e^{iS}$$

Uma forma simples de tratar \mathcal{O} é usar o mesmo método que usamos para tratar interações anteriormente - transformamos ele em um operador diferencial agindo na exponencial da ação, fazendo as substituições:

* parece errado no Ryder

$$\Psi \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \quad \bar{\Psi} \rightarrow -\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta} \quad A_\mu \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\mu}$$

$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{iS_{\text{eff}} + i \int d^4x (J^\mu A_\mu + \bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta)}$

Então:

$$\hat{\mathcal{O}}[A_\mu, \bar{\Psi}, \Psi] = \left[+\frac{i}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta}{\delta J^\nu} - \partial^\mu \bar{J}_\mu - e \left(\bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right]$$

$$Z \rightarrow \left(1 + \int d^4x \alpha(x) \hat{\mathcal{O}} \right) Z$$

Para garantir a invariância de Z , qualquer que seja α , precisamos que: $\hat{\mathcal{O}} Z = 0$ zero!

$$\left[+\frac{i}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta}{\delta J^\nu} - \partial^\mu \bar{J}_\mu - e \left(\bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right] Z = 0$$

$$Z = e^{iW}$$

$$\left[-\frac{1}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta W}{\delta J^\nu} - \partial^\mu \bar{J}_\mu - i e \left(\bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta W}{\delta \eta} \right) \right] e^{iW} = 0$$

$$-\frac{1}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta W}{\delta J^\nu} - \partial^\mu \bar{J}_\mu - i e \left(\bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} + \frac{\delta W}{\delta \eta} \eta \right) = 0$$

Fazemos então uma generalização da definição para as funções de vértice, usando a transformação de Legendre mas três variáveis:

$$\Gamma[\Psi_\mu, \bar{\Psi}_\mu, A_\mu^0] = W[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] - \int d^4x (\bar{\eta} \Psi_\mu + \bar{\Psi}_\mu \eta + J^\mu A_\mu^0)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} = -J^\mu \quad \frac{\delta W}{\delta \bar{J}_\mu} = A_\mu^a$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a} = +\bar{\eta}_a \quad \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}_a} = \psi_a$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a} = -\eta_a \quad \frac{\delta W}{\delta \eta_a} = -\bar{\psi}_a$$

* parece errado no Ryder

* tem um i na derivada em A e um sinal errado entre os fermiônicos

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu^a} \left(-\frac{1}{\xi} \square \partial^\nu A_\nu^a + \partial^\nu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\nu^a} - i e \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a} \psi_a + \bar{\psi}_a \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a} \right) \right) = 0$$

alguns autores se referem a esta equação como Ward Takahashi ou W-T Generalizada

(eq. 25.1)

Esta relação entre os geradores das funções de vértice garante a invariância de gauge de Z em todas as ordens de perturbação. A partir dela podemos obter algumas relações mais conhecidas:

(I) aplicando as derivadas abaixo de ambos os lados de 25.1

$$\frac{\delta}{\delta \psi_a(y)} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a(x)} \psi_a(x) \right) = \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \left[\delta(x-y) \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a(x)} + \dots \right] = -\delta(x-y) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_a(x) \delta \bar{\psi}_a(x)} + \dots$$

$$\frac{\delta}{\delta \psi_a(y)} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \left(\bar{\psi}_a(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \right) = \frac{\delta}{\delta \psi_a(y)} \left[\delta(x-x_1) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a(x)} + \dots \right] = \delta(x-x_1) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_a(y) \delta \bar{\psi}_a(x)}$$

e então fazemos: $\psi_a = \bar{\psi}_a = A_\mu^a = 0$

$$\frac{\delta^3 \Gamma[0]}{\delta \psi_a(y) \delta \bar{\psi}_a(x_1) \delta A_\mu^a(x)} = +i e \left(-\delta(x-y) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \psi_a(x) \delta \bar{\psi}_a(x_1)} + \delta(x-x_1) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \psi_a(y) \delta \bar{\psi}_a(x)} \right)$$

$$\Gamma_{ijN}^{(3)}(y_1, x_1, x) = i e \delta(x-x_1) [S_F^c(y_1-x)]^{-1} - i e \delta(x-y_1) [S_F^c(x-x_1)]^{-1}$$

$$\Gamma_{ijN}^{(3)}(y_1, x_1, x) = i e \delta(x-x_1) [S_F^c(y_1-x)]^{-1} - i e \delta(x-y_1) [S_F^c(x-x_1)]^{-1}$$

(eq. 25.2)

Passando para o espaço dos momentos temos:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-x_1) \left[\Sigma_F^<(y_1-x) \right]^{-1} = \\ & = \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-x_1) \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(y_1-x)} \left[\Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = \\ & = \int d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx_1} \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(y_1-x_1)} \left[\Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = \\ & = (2\pi)^4 \int d^4P_1' \, \delta(P_1 - P_1') \, \delta(P_2 + k + P_1') \left[\Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = (2\pi)^4 \delta(k + P_1 - P_2) \left[\Sigma_F^<(P_1) \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-y_1) \left[\Sigma_F^<(x-x_1) \right]^{-1} = \\ & = \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-y_1) \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(x-x_1)} \left[\Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = \\ & = \int d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{iky_1} \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(y_1-x_1)} \left[\Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = \\ & = (2\pi)^4 \int d^4P_1' \, \delta(P_1 + k - P_1') \, \delta(-P_2 + P_1') \left[\Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = (2\pi)^4 \delta(P_1 + k - P_2) \left[\Sigma_F^<(P_2) \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, d_x^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(y_1, x_1, x) = -k^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(P_1, -P_2, k) \\ & -k^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(P_1, -P_2, k) = i e (2\pi)^4 \delta(k + P_1 - P_2) \left\{ \left[\Sigma_F^<(P_1) \right]^{-1} - \left[\Sigma_F^<(P_2) \right]^{-1} \right\} \\ & -i k^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(P_1, -P_2, k) = e (2\pi)^4 \delta(k + P_1 - P_2) \left\{ \left[\Sigma_F^<(P_1 + k) \right]^{-1} - \left[\Sigma_F^<(P_1) \right]^{-1} \right\} \end{aligned}$$

Da forma como está definida, $\Gamma_{ijN}^{(3)}$ contém a carga e conservação de momento, para separar estes de forma explícita:

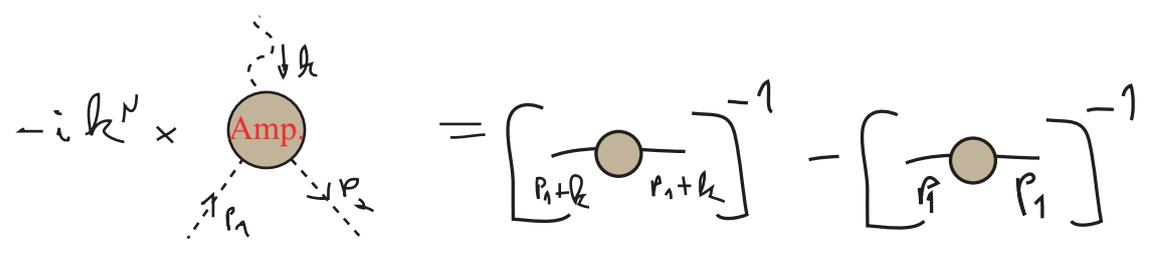
$$\Gamma_{ij;N}^{(3)}(p_1, p_2; k) \equiv e (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k - p_2) \Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; k)$$

$$-i k^N \Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; k) = \left[\Sigma_F^<(p_1+k) \right]^{-1} - \left[\Sigma_F^<(p_1) \right]^{-1}$$

(eq. 27.1)

Identidade de Ward-Takahashi

Que, em diagramas, fica:

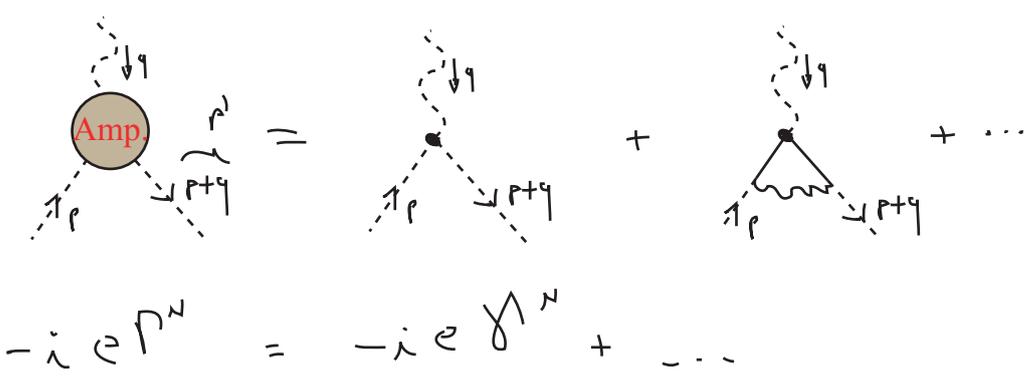


A partir da equação 25.1 podemos fazer outras combinações de derivações funcionais para obter relações entre diagramas com mais pontos ou diferentes campos.

Correções Radiativas na QED

Função de Vértice

(Peskin secs 6.2 e 6.3)



Considerando simplesmente a estrutura de Lorentz e a restrição oriunda da indentidade de Ward, podemos escrever uma forma geral para a função de vértice (veja Peskin, pg 186)

$$\Gamma^N = \gamma^N F_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

L.O. \rightarrow

$$F_1^{LO}(q^2) = 1$$

$$F_2^{LO}(q^2) = 0$$

(eq. 27.2)

Fatores de Forma

L.O. - leading order (primeira contrib. não nula em teoria de perturbação)

Tanto F_1 quanto F_2 têm interpretação física. O espalhamento em um potencial eletrostático é dado por:

$$A_{\mu}^{EXT}(x) = (\phi(\vec{x}), 0, 0, 0) \quad A_{\mu}^{EXT}(q) = (2\pi \delta(q^0) \tilde{\phi}(\vec{q}), 0, 0, 0)$$

estático e varia muito pouco no espaço

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}(p') \Gamma^0 u(p) \tilde{\phi}(\vec{q})$$

(para lembrar como tratamos um potencial externo clássico, ver problema 4.4 do Peskin)

$\hookrightarrow \sim S(q)$

$q \rightarrow 0 \Rightarrow \Gamma^0 = \gamma^0 F_1(0)$

$$i\mathcal{M} = -ie F_1(0) \bar{u}(p') \gamma^0 u(p)$$

De onde vemos que $F_1(0)$ é a carga do elétron, em unidades de e . $\Rightarrow \boxed{F_1(0) = 1}$

(eq. 28.2)

$$\left(\begin{aligned} F_1(q) &= F_1^{LO}(q^2) + F_1^{>LO}(q^2) \\ F_1(0) &= 1 + F_1^{>LO}(0) \end{aligned} \right)$$

Como ele já é 1 em primeira ordem pert., vemos que as correções a este fator devem ser 0 para $q^2 = 0$

O mesmo pode ser feito para F_2 em um campo vetorial constante:

$$A_{\mu}^{EXT}(x) = (0, \vec{A}(\vec{x}))$$

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}(p') \Gamma^i u(p) A^i(\vec{q})$$

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}(p') \Gamma^i u(p) A^i(\vec{q})$$

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix}$$

$q \rightarrow 0$
 \sim RELATIVIST.

$$i\mathcal{M} = -ie (2m) \cdot e \xi'^T \left(-\frac{1}{2m} \sigma^k [F_1(0) + F_2(0)] \right) \xi \underbrace{(-ie \epsilon^{ijk} q^i A^j(\vec{q}))}_{B^k(\vec{q})}$$

comparando com a aprox. de Born

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-p') i\mathcal{M} = \langle p' | iT | p \rangle = -ie \tilde{V}(q) 2\pi \delta(E_{p'} - E_p)$$

\hookrightarrow A MENOS DE UM FATOR $(2m) \delta^{(3)}(p-p')$

$$V(\vec{x}) = - \underbrace{\langle \vec{\mu} \rangle}_{\text{Momento magnético do elétron}} \cdot \vec{B}^p(x)$$

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{e}{m} [1 + F_2(0)] \left\{ \vec{L} + \frac{\sigma^0}{2} \right\}$$

Spin do e⁻

Se escrevermos o momento magnético da forma usual: $\vec{\mu} = g \left(\frac{e}{2m} \right) \vec{S}$

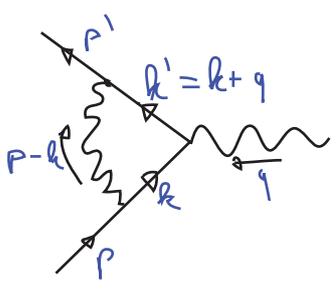
$$g = 2 + 2 F_2(0)$$

Vimos (eq 27.2) que F2 = 0 em primeira ordem pert. portanto g = 2 nesta ordem. Mas ele será corrigido em ordens superiores:

$$g = 2 + \underbrace{O(\alpha)}_{\text{Momento magnético anômalo do elétron}} + \dots$$

Vamos calcular as correções de primeira ordem ao vértice: $\Gamma^N = \gamma^N + \delta \Gamma^N$

Lembrando sempre que isto aparece em:



$$\bar{u}(p') (-ie \delta \Gamma^N) u(p) \frac{(-i) \not{q}}{q^2} \dots$$

$$\delta \Gamma^N = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ie \not{\epsilon}_\nu \gamma^N}{(k-p)^2 + i\epsilon} (-ie \not{\epsilon}^\nu) i \frac{(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^N i \frac{(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie \not{\epsilon}^\rho) =$$

$$\not{\epsilon}_\rho \gamma^\mu \gamma^\rho = -2 \gamma^\mu$$

$$\gamma^\mu \not{k} = \gamma^\mu \gamma^\nu k_\nu = [2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu] k_\nu = 2k^\mu - \not{k} \gamma^\mu$$

$$-m (\gamma^\mu \not{k} + \not{k} \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k}' + \not{k}' \gamma^\mu) = -m (2k^\mu + 2k'^\mu) = -2m (k + k')^\mu$$

$$= 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[\not{k} \gamma^\mu \not{k}' + m^2 \not{0} - 2m(\not{k} + \not{k}')^\mu]}{[(k-p)^2 + i\epsilon][k^2 - m^2 + i\epsilon][k'^2 - m^2 + i\epsilon]} \quad (\text{eq. 30.1})$$

Para fazer esta integral usaremos o método conhecido como **parametrização de Feynman**. A idéia é transformar o denominador acima em um único polinômio de grau 2 em k (que por sua vez estará elevado a 3). Fica fácil ver com fazemos isso no caso da integral simples:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[xA + yB]^2}$$

Que poderia ser usada para integrar:

parâmetros de Feynman

$$\int d^4k \frac{1}{(k-p)^2 (k^2 - m^2)} = \int d^4k \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[x(k-p)^2 + y(k^2 - m^2)]^2} =$$

$$= \int d^4k \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[(x+y)k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - m^2 y]^2}$$

$$l \equiv k - xp \Rightarrow [l^2 - m^2 y]$$

$$d^4k = d^4l$$

ficaria bem fácil fazer a integral em L , uma vez que é esfericamente simétrica

Temos uma identidade mais geral para o caso de vários fatores no denominador:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n]^n} \quad (\text{eq. 30.2})$$

Aplicando isso ao denominador de 30.1 temos:

$$\frac{1}{[(k-p)^2 + i\epsilon][\underbrace{k^2 - m^2 + i\epsilon}_{(k+q)^2}][k^2 - m^2 + i\epsilon]} = \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3}$$

$$\begin{aligned} D &= x[k^2 - m^2 + i\epsilon] + y[\underbrace{k^2 - m^2 + i\epsilon}_{(k+q)^2}] + z[(k-p)^2 + i\epsilon] = \\ &= x(k^2 - m^2) + y(k^2 + 2k \cdot q + q^2 - m^2) + z(k-p)^2 + \underbrace{(x+y+z)}_1 i\epsilon = \\ &= xk^2 - xm^2 + yk^2 + 2yk \cdot q + yq^2 - ym^2 + zk^2 - 2zk \cdot p + zp^2 + i\epsilon = \\ &= \underbrace{k^2 + 2yk \cdot q - 2zk \cdot p + zp^2}_{\ell^2} + yq^2 - xm^2 - ym^2 + i\epsilon = \\ &\quad \downarrow \ell = k + yq - zp \\ &= \underbrace{\ell^2 + 2yq \cdot p - y^2 p^2 - y^2 q^2 + zp^2 + yq^2 - xm^2 - ym^2}_{\ell^2 + i\epsilon - \Delta} = \\ &= \ell^2 + i\epsilon - \Delta \end{aligned}$$

"a bit of algebra"

$$\begin{aligned} -\Delta &= 2yq \cdot p - \underbrace{y^2 p^2}_{m^2} - \underbrace{y^2 q^2}_{m^2} + zp^2 + yq^2 - xm^2 - ym^2 = \\ &= p \cdot q = p \cdot (p' - p) = p \cdot p' - p^2 = p \cdot p' - m^2 \\ &= 2yq \cdot p \cdot p' - 2yq \cdot m^2 - \underbrace{y^2 m^2}_{m^2} - y^2 q^2 + zm^2 + yq^2 - xm^2 - ym^2 = \\ &= m^2(-2yq + z - x - y - y^2) + \underbrace{2yq \cdot p \cdot p'}_{\substack{\uparrow \\ \text{Lo } 2p \cdot p' = 2m^2 - q^2}} - y^2 q^2 + yq^2 = \\ &= q^2 = (p' - p)^2 = \underbrace{p'^2 + p^2}_{2m^2} - 2p \cdot p' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= m^2 \left(\underbrace{-2xy + z}_{-(1-z)^2} \underbrace{-x-y-z}_{z-1} - \cancel{z^2 + 2yz} \right) + \underbrace{(-xy - y^2 + y)}_{xy} q^2 = \\
 &= -(1-z)^2 m^2 + xy q^2
 \end{aligned}$$

$q^2 < 0$

$$\Delta = -xy q^2 + (1-z)^2 m^2 > 0$$

$$D = \not{\partial}^2 + i\not{\epsilon} - \Delta = \not{\partial}^2 + i\not{\epsilon} + xy q^2 - (1-z)^2 m^2$$

$$\int \pi^N = 2i e^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} [\not{m}]$$

Falta fazer a mudança de variáveis no numerador

$$[\not{m}] = [\not{\epsilon} \not{\gamma}^N \not{\epsilon}' + m^2 \not{\sigma}^N - 2m(\not{k} + \not{k}')^N]$$

Isso envolve um bocado de álgebra, é necessário lembrar que:

$$\text{(I)} \quad D = D(\ell^2) \Rightarrow \begin{cases} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^N}{D^3} = 0 \\ \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^N \ell^\nu}{D^3} = \frac{1}{4} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{g^{\nu N} \ell^2}{D^3} \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad [\not{m}] \text{ está entre espinores: } \bar{u}(p') [\not{m}] u(p)$$

portanto podemos trocar $\not{p} u(p) = m u(p)$

De resto é só usar relações de comutação e as relações entre os momentos para chegar em:

$$[\not{m}] = \left[\not{\gamma}^N \left(-\frac{1}{2} \ell^2 + (1-x)(1-y) q^2 + (1-2z-z^2) m^2 \right) + (\not{p}' + \not{p}) \cdot m z(z-1) - \right.$$

$$+ \gamma^\mu \cdot m(z-2)(x-y)]$$

pois é ímpar sobre a troca $x \leftrightarrow y$ (todo o resto da integral é par)

Usando a identidade de Gordon:

$$\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p)$$

podemos fazer: $p'^\mu + p^\mu \rightarrow 2m \delta^\mu - i \sigma^{\mu\nu} q_\nu$

obtendo:

$$\Gamma^\mu = 2i e^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} x$$

$$x \left[\gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} \ell^2 + (1-x)(1-y) q^2 + (1-y) z + z^2 \right) m^2 + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} (2m^2 z(1-z)) \right]$$

(eq. 33.1)

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2)$$

Fica bem mais fácil fazer a integral em 4D caso possamos passar para coordenadas esféricas em 4D, podemos fazer isso se passarmos para o espaço Euclidiano por meio de uma **rotação de Wick**

$$Q^0 = i Q_E^0$$

$$d^4 \ell = i d^4 \ell_E \quad d^3 \vec{\ell}_E = i d^3 \vec{\ell}$$

$$\vec{\ell} = \vec{\ell}_E$$

$$\ell^2 = - (Q_E^0)^2 - (\vec{\ell}_E)^2 = - \ell_E^2$$

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^n} = i \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[-\ell_E^2 - \Delta]^n} = \frac{i}{(-1)^n} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 \ell_E \frac{1}{[\ell_E^2 + \Delta]^n}$$

$$= \frac{\lambda(-1)^m}{(2\pi)^4} \int_{2\pi^2} d\mathcal{L}_4 \int_0^\infty d\mathcal{L}_E \frac{\mathcal{L}_E^3}{[\mathcal{L}_E^2 + \Delta]^m} =$$

$$\underbrace{\int_0^\infty d\mathcal{L}_E \frac{\mathcal{L}_E^3}{[\mathcal{L}_E^2 + \Delta]^m}}_{\substack{\mu = \mathcal{L}_E^2 + \Delta \\ d\mu = 2\mathcal{L}_E d\mathcal{L}_E}} \Rightarrow \int_\Delta^\infty \frac{d\mu}{2} \frac{\mu - \Delta}{\mu^m} = \frac{1}{2} \frac{\Delta^{2-m}}{(m-1)(m-2)}$$

$$m \geq 3$$

$$= \frac{\lambda(-1)^m}{(2\pi)^4} \cdot 2\pi^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\Delta^{2-m}}{(m-1)(m-2)} = \frac{\lambda(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-1)(m-2)} \frac{1}{\Delta^{m-2}}$$

(eq. 34.1)

$$m \geq 3$$

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta]^m} = i \int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4} \frac{-\ell_E^2}{[-\ell_E^2 - \Delta]^m} = \frac{\lambda(-1)^{m+1}}{2^3 \pi^2} \int_0^\infty d\mathcal{L}_E \frac{\mathcal{L}_E^5}{[\mathcal{L}_E^2 + \Delta]^m} =$$

$$\int_\Delta^\infty \frac{d\mu}{2} \frac{(\mu - \Delta)^2}{\mu^m} = \frac{\Delta^{3-m}}{(m-3)(m-2)(m-1)}$$

$$m \geq 4$$

$$= \frac{\lambda(-1)^{m+1}}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-3)(m-2)(m-1)} \frac{1}{\Delta^{m-3}}$$

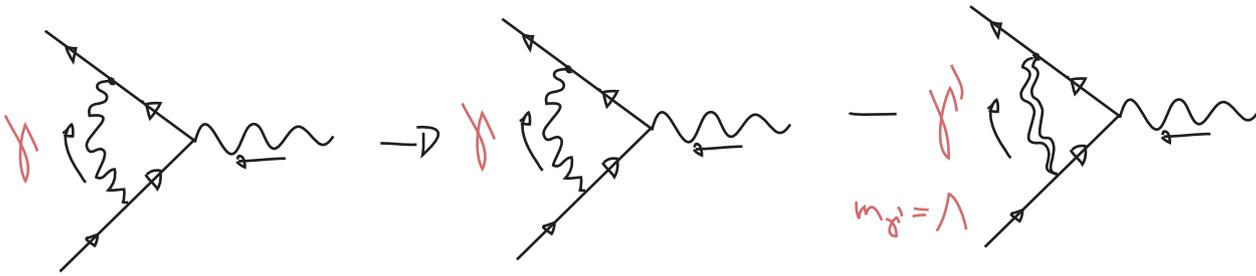
(eq. 34.2)

Aqui temos um problema, já que estamos justamente interessados em integrar termos com D^3 no denominador e a integral é divergente neste caso

$$\int_\Delta^\infty \frac{d\mu}{2} \frac{\mu^2 - 2\mu\Delta + \Delta^2}{\mu^3} = \lim_{K \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{K}{\Delta} \right]$$

Estudaremos o significado desta divergência em breve. Por enquanto vamos dar um jeito de isolar esta divergência na integral, este procedimento é chamado de **regularização** e existem muitas técnicas diferentes para executá-la. O importante é não confundir este procedimento com a renormalização, tudo que a regularização faz é colocar a resposta numa forma em que a divergência fique mais fácil de analisar, separada de uma parte finita (o que ajuda muito na hora de renormalizar). O método que usaremos é conhecido como **regularização de Pauli-Villars** e consiste em introduzir uma nova partícula fictícia de massa Λ . Nosso objetivo é fazer a seguinte modificação no propagador do fóton que está no loop:

$$\frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(k-p)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}$$



Note que recuperamos o propagador usual fazendo $\Lambda^2 \rightarrow \infty$

mas para $k^2 \gg \Lambda^2$ podemos desprezar Λ^2 e os dois propagadores se cancelam.

Se voltarmos na pg 31 vemos que ganhamos uma nova contribuição em que a única mudança introduzida é (nada muda nos numeradores):

$$\Delta_\lambda = -xyq^2 + (1-z)^2 m^2 + z\Lambda^2$$

De forma que agora temos:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left(\frac{l^2}{[l^2 - \Delta]^3} - \frac{l^2}{[l^2 - \Delta_\lambda]^3} \right) = \frac{2i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty dl_E \left(\frac{l_E^5}{[l_E^2 + \Delta]^3} - \frac{l_E^5}{[l_E^2 + \Delta_\lambda]^3} \right) = \\ & = \frac{2i}{(4\pi)^2} \lim_{K \rightarrow \infty} \left[\int_\Delta^K \frac{d\mu}{2} \left(\frac{\mu^2 - 2\mu\Delta + \Delta^2}{\mu^3} \right) - \int_{\Delta_\lambda}^K \frac{d\mu}{2} \left(\frac{\mu^2 - 2\mu\Delta_\lambda + \Delta_\lambda^2}{\mu^3} \right) \right] = \\ & = \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{K \rightarrow \infty} \left[\ln \left[\frac{K}{\Delta} \right] + \frac{3}{2} - 2 \frac{\Delta}{K} + \frac{\Delta^2}{2K^2} - \left(\ln \left[\frac{K}{\Delta_\lambda} \right] + \frac{3}{2} - 2 \frac{\Delta_\lambda}{K} + \frac{\Delta_\lambda^2}{2K^2} \right) \right] = \\ & = \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \left[\frac{\Delta_\lambda}{\Delta} \right] \end{aligned}$$

As integrais finitas mudam da seguinte forma:

$$\int \frac{d^3 \ell}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^3} - \frac{1}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda]^3} \right) \stackrel{\text{eq 34.1 / } m=3}{=} -\frac{i}{2(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta_\Lambda} \right)$$

$\mathcal{O}(\Lambda^2)$ ←

podemos ignorar esta modificação se $\Lambda \gg 1 \Delta$

Voltando com os resultados das integrais na equação 33.1, temos:

$$\delta \Gamma^N = 2i e^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \gamma^\mu \left[\frac{1}{2} \ln \left[\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta} \right] + \frac{1}{2\Delta} \left((1-x)(1-y)q^2 + (1-yz + yz^2) m^2 \right) \right] + \frac{1}{2\Delta} \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu (2m^2 z(1-z))}{2m} \right\}$$

$$\left[\frac{1}{2\Delta} \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu (2m^2 z(1-z))}{2m} \right] \rightarrow F_2$$

$$\Delta_\Lambda \underset{\Lambda \gg 1}{\sim} \approx \Lambda^2$$

$$\frac{e^2}{4\pi} = \alpha$$

constante de estrutura fina

$$\delta \Gamma^N = \gamma^\mu \delta F_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta F_2(q^2)$$

(eq. 36.1)

$$\delta F_1(q^2) = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[\frac{\Lambda^2}{\Delta} \right] + \frac{1}{\Delta} \left[(1-x)(1-y)q^2 + (1-yz + yz^2) m^2 \right] \right\}$$

(eq. 36.2)

$$\delta F_2(q^2) = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{\Delta} 2m^2 z(1-z)$$

(eq. 36.3)

Recapitulando o método usado:

- (1) Usamos os **diagramas de Feynman** para escrever a amplitude
- (2) Combinamos os denominadores dos propagadores usando os **parâmetros de Feynman**
- (3) Completamos quadrados no denominador, mudando a variável de integração para ℓ (somando uma constante a k)
- (4) Passamos um **numerador para ℓ** e notamos que as integrais das potências ímpares são nulas. As potências pares são escritas em termos de ℓ^2, ℓ^4, \dots (o uso da equação de movimento ajuda muito a simplificação do numerador)
- (5) fazemos a **rotação de Wick** e integramos no espaço Euclideano. Caso as integrais sejam divergentes, usamos algum tipo de **regularização**.

Notamos que $\int \bar{F}_2$ não tem qualquer divergência, de fato podemos calculá-lo:

$$\begin{aligned} \int \bar{F}_2(0) &= \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2k^2 y(1-z)}{(1-y)^2 m^2} = \\ & \quad \swarrow x_0 = 1-y-z \\ & \quad 0 < x_0 < 1 \Rightarrow 0 < 1-y-z < 1 \Rightarrow 1-z > y > -z \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{2y}{1-y} = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0,0011617 \end{aligned}$$

O valor experimental atual é 0,00115965218073 (28) - tão preciso que é necessário considerar as correções $O(\alpha^4)$. Uma vez consideradas, estas correções concordam com este valor em $1/10^8$

$\int \bar{F}_1$, no entanto, contém divergências de dois tipos. A primeira, e mais óbvia, está ligada a grandes momentos no loop e é chamada de **divergência ultravioleta**. Na expressão que obtivemos ela aparece quando retiramos a partícula fictícia da teoria, fazendo:

$$\begin{aligned} \Lambda &\rightarrow \infty \\ \int \bar{F}_1 &\sim L_N \left[\frac{\Lambda}{\Delta} \right] \end{aligned}$$

A outra está associada a momentos muito pequenos do fóton no loop, e é chamada de **divergência no infravermelho**. Ela fica evidente se tomarmos, por exemplo, o seguinte termo de F_1 e fizermos $q = 0$

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{\Delta} \left[(1-y+z^2) m^2 \right] \quad \Delta = -2xy q^2 + (1-y)^2 m^2$$

$$q^2=0 \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{(1-y+z^2)}{(1-y)^2} =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{-2 + (1-z)(3-z)}{(1-y)^2} = \int_0^1 dz \frac{-2 + (1-z)(3-z)}{(1-z)}$$

→ problema em $z=1$

É relevante notar que esta divergência não existiria caso o fóton tivesse uma massa μ , já que nesse caso teríamos:

$$\Delta(q^2) = -xy q^2 + (1-y)m^2 + y\mu^2 \Rightarrow \Delta(q^2=0) = (1-y)m^2 + y\mu^2$$

De fato, divergências infravermelhas estão ligadas a partículas sem massa (e o quão fácil é produzi-las) e aparecerão em teorias que as contenham.

Divergência Infravermelha

Começaremos pela divergência de baixas energias. Para facilitar a discussão, vamos assumir que a divergência ultravioleta foi devidamente "resolvida", por enquanto isso significa forçar a condição da eq. 28.2:

$$F_1(0) = 1$$

$$\text{Como: } F_1(q^2) = \underbrace{F_1^e(q^2)}_1 + \underbrace{\delta F_1(q^2)}_{O(\epsilon^3)} + \dots$$

Precisamos que a correção se anule para $q^2=0$. O jeito mais rápido de conseguir isso é redefinindo a correção para subtrair o infinito:

$$\delta F_1'(q^2) = \delta F_1(q^2) - \delta F_1(0)$$

Com isso obtemos

$$\delta F_1'(q^2) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[\frac{z\Lambda^2}{\Delta} \right] + \frac{1}{\Delta} \left[(1-x)(1-y)q^2 + (1-y+z^2)m^2 \right] \right.$$

$$\left. - \ln \left[\frac{z\Lambda^2}{\Delta_0} \right] - \frac{1}{\Delta_0} \left[(1-y+z^2)m^2 \right] \right\} =$$

$$\Delta_0 = (1-y)^2 m^2$$

$$= \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[\frac{\Delta_0}{\Delta} \right] + \frac{(1-x)(1-y)q^2 + (1-yz+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 - xyq^2} + \right. \\ \left. - \frac{(1-yz+z^2)m^2}{m^2(1-z)^2} \right\}$$

É claro que a esta altura esta subtração "a força" é totalmente arbitrária e nos deixa com uma profunda sensação de injustiça, mas quando tratarmos da divergência ultravioleta veremos que ela é justificada. Portanto aguarde mais um pouco.

Voltando à divergência infravermelha, vimos que esta não existe no caso de um fóton com massa. Portanto, uma forma de "regularizar" esta divergência é dar uma pequena massa μ para o fóton depois ver o que acontece quando fazemos o limite $\mu \rightarrow 0$

Temos:

$$SF_1' = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[\frac{\Delta_0 + \mu^2 z}{\Delta + \mu^2 z} \right] + \frac{(1-x)(1-y)q^2 + (1-yz+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 - xyq^2 + \mu^2 z} + \right. \\ \left. - \frac{(1-yz+z^2)m^2}{m^2(1-z)^2 + \mu^2 z} \right\}$$

REGULAR
EM $\mu \rightarrow 0$

Como estamos apenas interessados no limite $\mu \rightarrow 0$ desprezaremos tudo que não diverge neste limite. A divergência vem dos termos $(1-z)^2$, portanto ela ocorre em um "canto" do espaço de parâmetros de Feynman:

$$\left. \begin{array}{l} z \sim 1 \\ x \sim 0 \\ y \sim 0 \end{array} \right\} \text{podemos fazer estas substituições no numerador e no } z \text{ que multiplica } \mu$$

$$SF_1' = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{(1-z)^2 m^2 - xyq^2 + \mu^2} - \frac{-2m^2}{m^2(1-z)^2 + \mu^2} \right\} = \\ = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{(1-z)^2 m^2 - (1-z-y)yq^2 + \mu^2} + \frac{2m^2}{m^2(1-z)^2 + \mu^2} \right\} =$$

$$y = (1-z)\xi = w\xi$$

$$w = (1-z)$$

$$z = 1-w$$

$$dz dy = -w dw d\xi$$

$$\begin{aligned} z=0 \rightarrow w=1 & \Rightarrow \int_0^1 dw \int_0^1 d\xi \Rightarrow y=w \rightarrow \xi=1 \\ z=1 \rightarrow w=0 & \Rightarrow y=0 \rightarrow \xi=0 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) \int_0^1 w dw \int_0^1 d\xi \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{w^2 m^2 - w(1-\xi)\xi q^2 + N^2} + \frac{2m^2}{m^2 w^2 + N^2} \right\} =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{4\pi} \right) \int_0^1 d\xi \int_0^1 dw^2 \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{w^2(m^2 - (1-\xi)\xi q^2) + N^2} + \frac{2m^2}{m^2 w^2 + N^2} \right\} =$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 d\xi \left[\frac{-2m^2 + q^2}{m^2 - q^2 \xi(1-\xi)} \text{Log} \left(\frac{m^2 - q^2 \xi(1-\xi) + N^2}{N^2} \right) + 2m^2 \frac{1}{m^2} \text{Log} \left(\frac{m^2 + N^2}{N^2} \right) \right] =$$

Para $N^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \text{LN} \left(\frac{m^2 - q^2 \xi(1-\xi)}{N^2} \right) \equiv \text{LN} \left(\frac{m^2 - q^2}{N^2} \right)$

$$= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 d\xi \left[\frac{-2m^2 + q^2}{m^2 - q^2 \xi(1-\xi)} + 2 \right] \text{LN} \left(\frac{m^2 - q^2}{N^2} \right) =$$

Os detalhes do numerador não interessam, indicaremos desta forma

$$\Delta F_1^1 = - \frac{\alpha}{2\pi} \underbrace{\int_0^1 d\xi \left[\frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2 \xi(1-\xi)} - 1 \right]}_{f_{\text{IR}}(q^2)} \text{LN} \left(\frac{m^2 - q^2}{N^2} \right)$$

Este fator de forma modifica a carga, então ele é transportado diretamente para a seção de choque:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{L.O.}} \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \text{LN} \left(\frac{m^2 - q^2}{N^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right]$$

↳ Resultado em "Leading Order" (primeira ordem na expansão pert.)

Como $\begin{cases} q^2 < 0 \\ 0 < \int (1-\xi) < \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow 1 < \frac{m^2 + 1q^{3/2}}{m^2 + 1q^{3/4}} < \frac{m^2 + 1q^{3/2}}{m^2 + 1q^2 \xi (1-\xi)} = \frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2 \xi (1-\xi)}$

$\therefore \rho_{\text{IR}}(q^2) > 0$

Portanto, não só temos uma seção de choque enorme, mas ainda por cima ela é negativa. Para entender melhor o que está acontecendo, vamos calcular f_{IR} no limite de alto q^2

$$\int_0^1 d\xi \left[\frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2 \xi (1-\xi)} - 1 \right] \xrightarrow{q^2 \rightarrow -\infty} \int_0^1 d\xi \left(\frac{-q^2/2}{m^2 - q^2 \xi (1-\xi)} - 1 \right) =$$

$$= \frac{2(-q^2)}{\sqrt{(-q^2)(-q^2+4m^2)}} \text{COTH}^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 + \frac{4m^2}{(-q^2)}}{1 - \frac{2m^2}{q^2}}} \right) - 1 =$$

$$= \text{LN} \left(\frac{1 - \frac{2m^2}{q^2} + 1}{1 - \frac{2m^2}{q^2} - 1} \right) - 1 = \text{LN} \left(-\frac{q^2}{m^2} \right) - 1$$

note que abandonamos a notação $\text{LN}(-q^2/m^2)$ porque no limite de grandes $-q^2$, só estamos interessados nos coeficientes de $\text{LN}(-\frac{q^2}{m^2}) \approx \text{LN}(-q^2)$

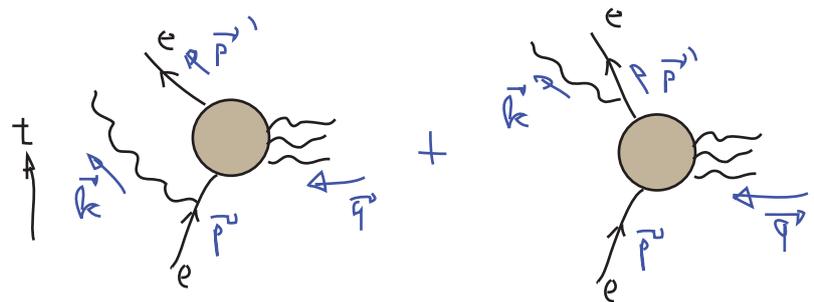
O $\text{LN}(m^2)$ é justamente o "1" que foi desprezado aqui

Temos enfim:

$$F_1(-q^2 \rightarrow \infty) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left(-\frac{q^2}{m^2} \right) \ln \left(-\frac{q^2}{\mu^2} \right) + O(\alpha^2)$$

(eq. 41.1)

Esta estrutura de dois logaritmos (chamada de "Sudakov double logarithm,") aparece em outro cálculo famoso de QED, o "soft bremsstrahlung", a radiação emitida em baixas frequências por um eletron acelerado. Do ponto de vista de diagramas de Feynman, estamos falando do seguinte processo:



Não calcularemos isto em detalhes (se estiver interessado, olhe a sec 6.1 do Peskin) - o importante é saber que, no limite em que os fotons emitidos tem pouco momento:

$$|k^0| \ll |p' - p| = |q^0|$$

$$\underbrace{i\mathcal{M}}_{\text{amplitude total}} = \underbrace{i\mathcal{M}_{\text{el}}}_{\text{amplitude do espalhamento elástico (sem emissão de fóton)}} \cdot \underbrace{f_r}_{\text{fator que dá conta da emissão de 1 fóton}}$$

na seção de choque ocorre algo semelhante

$$d\sigma(p \rightarrow p' + \gamma) = d\sigma(p \rightarrow p') \cdot \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} \sum_{\lambda=1,2} e^2 \left| \frac{p' \cdot \epsilon^{(\lambda)}}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon^{(\lambda)}}{p \cdot k} \right|^2$$

polarizações do fóton

densidade de probabilidade para emissão de um fóton com momento k

Esta probabilidade não pode ser integrada para qualquer k, precisamos respeitar a premissa de que k é pequeno colocando um limite superior na integral:

$$|\vec{k}| < |\vec{q}| = |\vec{p} - \vec{p}'|$$

Com um pouco de álgebra, conseguimos colocar a integral na forma:

$$P_{\text{prob}} \approx \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{|\vec{q}|} dk \frac{1}{k} \underbrace{I(\vec{v}, \vec{v}')}_{\text{função que não depende de k}}$$

velocidades associadas a \vec{p}, \vec{p}'

probabilidade total de emitir um fóton com $0 < |\vec{k}| < |\vec{q}|$

Esta probabilidade diverge! Temos uma **infinita probabilidade de emitir um fóton de baixo momento** ("soft photons"). Este fato é conhecido como divergência infravermelha da QED. A regularização possível é novamente introduzir uma pequena massa para o fóton, neste caso obtemos:

$$\int_0^{|\vec{q}|} d|\vec{k}| \frac{1}{|\vec{k}|} = \int_0^{|\vec{q}|} \frac{d|\vec{k}|^2}{2|\vec{k}|^2} = \int_{\mu^2}^{|\vec{q}|^2 + \mu^2} \frac{dE^2}{2E^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|\vec{q}|^2 + \mu^2}{\mu^2} \right)$$

No limite: $|\vec{q}|^2 \rightarrow \infty$ $\left\{ \begin{array}{l} |\vec{q}|^2 \approx -q^2 \end{array} \right.$ (Peskin pg 201)

queremos comparar com 41.1, onde também tomamos este limite. Isto significa olhar a região em que o elétron sofreu uma grande mudança de momento.

$$I(\vec{v}, \vec{v}') = 2 \ln \left(\frac{q^2}{m^2} \right) \approx 2 \ln \left(-\frac{q^2}{m^2} \right)$$

Assim, temos:

$$d\sigma(p \rightarrow p' + \gamma) \underset{-q^2 \rightarrow \infty}{\sim} d\sigma_0(p \rightarrow p') \cdot \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(-\frac{q^2}{\nu^2}\right) \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right)$$

(eq. 43.1)

que é a expressão que queremos, comparemos isto com o que obtivemos em 41.1

$$(41.1) \rightarrow F_1(-q^2 \rightarrow \infty) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) \ln\left(-\frac{q^2}{\nu^2}\right) + O(\alpha^2)$$

Que modifica a seção de choque de forma que:

$$d\sigma \underset{-q^2 \rightarrow \infty}{\sim} d\sigma_0(p \rightarrow p') \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(-\frac{q^2}{\nu^2}\right) \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) + O(\alpha^2) \right]$$

$d\sigma \sim e^2 \rightarrow d\sigma \sim e^2 F_1^2 \sim \left[1 + 2 \frac{\alpha}{\pi} \ln \ln + \alpha^2 \ln^2 \ln + \dots \right]$

Vemos que, pelo menos até ordem α , a soma destas duas seções de choque está livre de divergências já que as contribuições se cancelam. Mas o que uma tem a ver com a outra? O fato é que, do ponto de vista prático, não faz muito sentido diferenciar "medi um elétron" de "medi um elétron + um fóton quase sem energia", até porque fótons de energia infinitamente pequena são objetos estranhos (sem momento, nem energia e nem massa). Qualquer medida vai ter uma sensibilidade máxima a fótons "soft", que podemos expressar em termos de uma energia limite E_ℓ , abaixo da qual o fóton não é observado. Assim, a seção de choque total de espalhamento de elétrons é dada por:

$$\frac{d\sigma_{\text{Exp}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p') + \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p' + \gamma(\ell < E_\ell))$$

Se abandonamos o limite $-q^2 \rightarrow \infty$ obtemos:

A integral em k na página 42 é feita só até E_ℓ

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{Exp}}}{d\Omega} &= \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(-\frac{q^2/m^2}{\nu^2}\right) P_{\text{IR}}(q^2) + \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{E_\ell^2}{\nu^2}\right) P_{\text{IR}}(q^2) + \dots \right] \\ &= \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} P_{\text{IR}}(q^2) \ln\left(\frac{-q^2/m^2}{E_\ell^2}\right) + O(\alpha^2) \right] \end{aligned}$$

(eq. 43.2)

Onde já não temos mais μ , e podemos tomar o limite $\nu \rightarrow 0$ sem medo de divergências

É possível mostrar que este cancelamento ocorre para todas as ordens de perturbação (Peskin sec 6.5), neste caso a seção de choque medida é:

$$\frac{d\sigma_{\text{Exp}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \text{EXP} \left[-\frac{\alpha}{\pi} \ln(q^2) L_N \left(-\frac{q^2}{E_e^2} \right) \right]$$

Auto-energia do elétron

(Peskin 7.1)

Resta tratar a divergência ultravioleta do vértice elétron-elétron-fóton, veremos agora que ela está ligada às correções radiativas do propagador do elétron. Vamos a elas:

Primeiramente vale lembrar o resultado obtido na pag 5:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle = i \frac{Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

$$\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2} u^s(p)$$

↳ $m^2 = m_0^2 + \delta m^2$

↳ $1 + \delta Z_2$

Nosso objetivo é agora obter as contrições perturbativas para Z_2 e m

$$\langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | \Omega \rangle = \underbrace{\text{---}}_p + \underbrace{\text{---}}_k \text{---} + \dots$$

$$\frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left[-i \Sigma_2(p) \right] \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

basicamente é a contribuição de ordem e^2 para um objeto análogo ao que chamamos de M^2 na pág 13

$$-i \Sigma_2(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m_0)}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{-i}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

"massa" do fóton no fim faremos: $\mu^2 \rightarrow 0$

↳ ordem perturbativa

Temos, novamente, que usar o maquinário desenvolvido para o cálculo de loops. A parametrização de Feynman fornece (já integrando em y com o uso da delta):

$$\frac{1}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - 2xkp + x^2p^2 - x\mu^2 - (1-x)m_0^2 + i\epsilon]^2}$$

o termo linear em ℓ no numerador já foi cancelado

$$\ell = k - x p$$

$$-i \Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2x \not{p} + 4 m_0}{[\ell^2 - \Delta_\nu + i\epsilon]^2}$$

$$\Delta_\nu = -x(1-x)p^2 + x\nu^2 + (1-x)m_0^2$$

Podemos usar a regularização de Pauli-Villars:

$$\frac{1}{(p-k)^2 - \nu^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{(p-k)^2 - \nu^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(p-k)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}$$

$$-i \Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2x \not{p} + 4 m_0}{[\ell^2 - \Delta_\nu + i\epsilon]^2} - e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2x \not{p} + 4 m_0}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda + i\epsilon]^2}$$

E fazendo a rotação de Wick:

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{\ell^2 - \Delta_\nu} - \frac{1}{\ell^2 - \Delta_\Lambda} \right] = \frac{i}{(4\pi)^2} \text{Ln} \left(\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta_\nu} \right)$$

$$\Delta_\Lambda \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} x \Lambda^2$$

$$\Sigma_2(p) = \frac{x}{2\pi} \int_0^1 dx (2m_0 - x \not{p}) \text{Ln} \left(\frac{x \Lambda^2}{(1-x)m_0^2 + x\nu^2 - x(1-x)p^2} \right) \quad (\text{eq. 45.1})$$

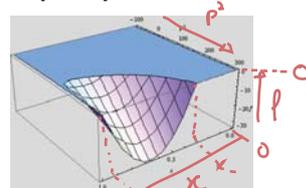
Podemos entender a estrutura analítica desta correção. A função Ln tem uma ramificação a partir do ponto em que seu argumento fica negativo, como o numerador é positivo a condição é:

$$f(x, p^2) = (1-x)m_0^2 + x\nu^2 - x(1-x)p^2 < 0$$

$0 < x < 1 \Rightarrow (> 0) \quad (> 0) \quad \hookrightarrow$ só será possível acima de algum valor mínimo de $p^2 > 0$

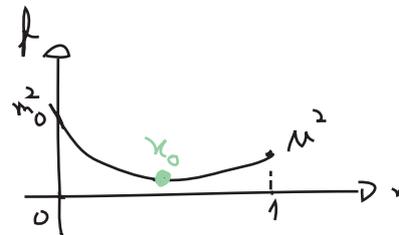
Em termos de x , a função f é uma parábola cujo mínimo é determinado por p^2

$$f(x, p^2) = p^2 x^2 + (\nu^2 - p^2 - m_0^2)x + m_0^2$$



$$\frac{d}{dx} f(x, p^2) = 2x p^2 + m_0^2 - p^2 - m_0^2 = 0 \quad \hookrightarrow x_0 = \frac{m_0^2 + p^2 - \mu^2}{2p^2}$$

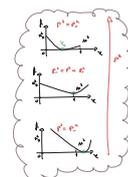
$$f(x_0, p^2) = -\frac{(m_0^2 - \mu^2)^2}{4p^2} + \frac{1}{2}(m_0^2 + \mu^2) - \frac{1}{4}p^2$$



O mínimo passa para baixo de zero em:

$$f(x_0, p^2) = 0 \quad \hookrightarrow p_{\pm}^2 = (m_0 \pm \mu)^2$$

$$f < 0 \iff \begin{cases} p^2 > p_+^2 \\ p^2 < p_-^2 \end{cases}$$



$$x_0(p_-^2) = \frac{m_0}{m_0 - \mu} \Rightarrow x = \frac{m_0}{m_0 - \mu} > 1$$

$$x_0(p_+^2) = \frac{m_0}{m_0 + \mu} \Rightarrow x = \frac{m_0}{m_0 + \mu} < 1$$

como $f(1, p^2) = \mu^2 > 0 \quad \forall p^2$ não há como uma região negativa passar de $x > 1$ para $x < 1$

Logo, para $0 < x < 1$ temos uma ramificação que em: $p^2 \geq (m_0 + \mu)^2$

o que está de acordo com o que vimos na pg 5 - temos uma ramificação a partir da energia em que podemos produzir duas partículas reais (nessa caso um elétron de massa m_0 e um fóton de massa μ)

Também é possível encontrar o polo, basta seguir o mesmo procedimento que usamos no caso do campo escalar para somar as contribuições 1PI (pg 13)

$$-i \Sigma(p) = -i \bar{\Sigma}(p) = \text{1PI} = \text{Diagram 1} + \underbrace{\text{Diagram 2} + \text{Diagram 3}}_{-i \Sigma_x} + \underbrace{\text{Diagram 4} + \text{Diagram 5}}_{-i \Sigma_y} + \dots = 0$$

$$\text{com } \langle \Omega | T \{ \bar{\psi}(x) \psi(x) \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T \{ j(x) \} | \Omega \rangle$$

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \text{Diagram 6} =$$

$$= \text{Diagram 7} + \text{1PI} + \text{1PI 1PI} + \text{1PI 1PI 1PI} + \dots =$$

$$= \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(p)} \rightarrow$$

A massa física é dada por:

$$\left[\not{p} - m_0 - \Sigma(p) \right]_{\not{p} = m} = 0 \quad (\text{eq. 46.1})$$

$$\delta m = m - m_0 = \sum (\not{p} = m)$$

Bem perto do polo vale:

$$\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p}) \approx (\not{p} - m) \cdot \left(1 - \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} \right) + \mathcal{O}((\not{p} - m)^2)$$

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \frac{i \left(1 - \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} \right)^{-1}}{\not{p} - m} = \frac{i (\not{p} + m) \left(1 - \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}} \right)^{-1}}{p^2 - m^2}$$

Comparando com o resultado obtido para o propagador completo (pg 5):

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \frac{i Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$$

$$Z_2^{-1} = 1 - \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} \quad (\text{eq. 47.1})$$

rigorosamente seria m , mas a diferença entre m e m_0 é proporcional a α , o que já é uma correção superior (uma vez que já temos α na frente de tudo)

Em ordem α , as correções são:

$$\delta m = \sum_2 (\not{p} = m_0) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (2m_0 - x m_0) L_N \left(\frac{x \Lambda^2}{(1-x)m_0^2 + x \Lambda^2 - x(1-x)m_0^2} \right) =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi} m_0 \int_0^1 dx (2-x) L_N \left(\frac{x \Lambda^2}{(1-x)^2 m_0^2 + x \Lambda^2} \right)$$

I_Λ

mathematica

Integrate[(Alpha)/2/Pi*m0*(2-x)*Log[x*(CapitalLambda)^2/(1-x)^2*m0^2+x*(Mu)^2],{x,0,1},Assumptions->{CapitalLambda>0, m0>0, Mu>0}]

$$I_\Lambda = \frac{1}{8 m_0^3 \pi \sqrt{4 m_0^2 - \mu^2}}$$

$$\alpha \left(2 \mu (-8 m_0^4 - 2 m_0^2 \mu^2 + \mu^4) \text{ArcTan} \left[\frac{\mu}{\sqrt{4 m_0^2 - \mu^2}} \right] - \right.$$

$$\left. 2 \mu (-8 m_0^4 - 2 m_0^2 \mu^2 + \mu^4) \text{ArcTan} \left[\frac{-2 m_0^2 + \mu^2}{\mu \sqrt{4 m_0^2 - \mu^2}} \right] + \right.$$

$$\left. \sqrt{4 m_0^2 - \mu^2} \left(3 m_0^4 + 2 m_0^2 \mu^2 - 12 m_0^4 \text{Log} \left[\frac{m_0}{\Lambda} \right] - 2 \mu^4 \text{Log} \left[\frac{\mu}{m_0} \right] \right) \right)$$

Primeiramente, notemos que não há divergência quando $\Lambda \rightarrow 0$

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} \delta m = \frac{3 \alpha m_0}{8 \pi} \left(1 + 2 \log \left[\frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right] \right) \quad \circ \circ \circ \quad \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\Lambda} \right) = \frac{\pi}{2}$$

E que, de qualquer forma, a divergência ultravioleta está em um termo que independe de μ

$$\delta m \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{3 \alpha m_0}{4 \pi} \log \left[\frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right]$$

Temos então a massa do elétron sendo corrigida por uma grandeza divergente. Isto não é novidade, classicamente temos a energia de repouso de uma partícula dada pelo potencial eletrostático da seguinte forma (carga pontual):

$$\int d^3 R \frac{1}{2} |\vec{E}|^2 = \int d^3 R \frac{1}{2} \left(\frac{e}{4 \pi R^2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{(4 \pi)^2} \int d\Omega \int \frac{1}{R^2} dR$$

Dim [R] = GeV⁻¹
Dim [1/R² = Λ^2] = GeV²

$$= \frac{\alpha}{2} \int_0^\infty \frac{1}{R^2} dR \sim \alpha \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \left[\frac{1}{R} \right] = \alpha \Lambda$$

Nota-se de fato que a divergência quântica é menos forte que a clássica, quanticamente temos uma divergência logarítmica com a escala de energia, classicamente ela é linear. Dá para entender que não poderia ser diferente por análise dimensional: suponha que $m_0 = 0$, pense no termo de massa:

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R \Rightarrow m_0 \bar{\Psi} \Psi = m_0 (\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L)$$

$$\bar{\Psi} \Psi = \bar{\Psi}_R \Psi_R + \bar{\Psi}_L \Psi_L$$

se este termo é zero, não temos mais nada na Lagrangeana que "acople" Ψ_L e Ψ_R . Com isso obtemos duas teorias separadas, uma para cada quiralidade, e não há correção radiativa que vá produzir um termo de massa.

$\delta m \sim m_0$ (note que isso quer dizer que um elétron de massa zero nunca ganharia massa)

Portanto a única dependência possível com a energia é logarítmica. Essa "pequena correção infinita" parece invalidar todo o procedimento perturbativo, mas logo veremos que podemos reescrever nossa lagrangeana em termos de parâmetros físicos finitos desde o começo, evitando assim o problema. Por enquanto assumiremos que já fizemos isso e trocar m_0 por m nas contas que seguem

No caso de Z_2 temos:

$$Z_2 = 1 + \delta Z_2$$

$$(1-x)^{-1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1+x+O(x^2)$$

$$\delta Z_2 = Z_2 - 1 = \left(1 - \frac{d\Sigma}{d\phi} \Big|_{\phi=m} \right)^{-1} - 1 \underset{\text{Lim } x \rightarrow 0}{\sim} \frac{d\Sigma_2}{d\phi} \Big|_{\phi=m}$$

$$\frac{d}{d\phi} \left[\frac{x}{2\pi} \int_0^1 dx (2m-x\phi) L_v \left(\frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2} \right) \right] =$$

$$= \frac{x}{2\pi} \int_0^1 dx (-x) L_v \left(\frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2} \right) + \frac{x}{2\pi} \int_0^1 dx (2m-x\phi) \frac{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2}{x\Lambda^2} \cdot \frac{-x\Lambda^2}{[(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2]^2} \cdot (-2x(1-x)\phi) =$$

$$= \frac{x}{2\pi} \int_0^1 dx \left[-x L_v \left(\frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2} \right) + (2m-x\phi) \frac{2x(1-x)\phi}{[(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2]} \right]$$

$$\frac{d\Sigma_2}{d\phi} \Big|_{\phi=m} = \frac{x}{2\pi} \int_0^1 dx \left[-x L_v \left(\frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2} \right) + (2-x) \frac{2x(1-x)m^2}{[(1-x)m^2 + x\nu^2]} \right]$$

O que nos dá a primeira contribuição perturbativa à "field strength renormalization" Z_2 , do elétron. Com isso podemos, finalmente, voltar a questão da divergência ultravioleta do vértice da QED (se você já não lembra o que estamos fazendo, volte na página 44 e leia a introdução desta seção). Na pg 38 eliminamos a divergência ultravioleta do vértice fazendo uma subtração "força bruta", o que subtraímos foi:

$$\delta \bar{F}_1(0) = \left(\frac{x}{2\pi} \right) \int_0^1 dx \int_0^y dy \int_0^z dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[\frac{z\Lambda^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right] + \frac{(1-y+z^2)m^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right\} =$$

na pg 38 fizemos a subtração antes de introduzir μ , mas é mais geral pensar na introdução de μ antes

$$= \left(\frac{x}{2\pi} \right) \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left\{ \ln \left[\frac{z\Lambda^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right] + \frac{(1-y+z^2)m^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right\} =$$

Calculemos a soma destas duas expressões ($x \rightarrow z$ em δZ_2):

$$\delta \bar{F}_1(0) + \delta Z_2 = \left(\frac{x}{2\pi} \right) \int_0^1 dz \left\{ (1-2z) \ln \left[\frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\nu^2} \right] + \frac{P(z)}{(1-z)^2 m^2 + z\nu^2} \right\}$$

$$P(z) = (2-z) 2z(1-z)m^2 + (1-z)(1-y+z^2)m^2 =$$

$$= m^2(1-z)^2(z+1)$$

$$\int_0^1 dz (1-2z) \ln \left[\frac{z \Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z \mu^2} \right] = \int_0^1 \underbrace{dz (1-2z)}_{d\mu} \underbrace{\ln[z]}_{\mu'} +$$

$$\mu = z(1-z)$$

$$d\mu = \frac{1}{z}$$

$$d\mu = \frac{2m^2(1-z) - \mu^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2}$$

$$+ \int_0^1 \underbrace{dz (1-2z)}_{d\mu} \underbrace{\ln \left[\frac{\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z \mu^2} \right]}_{\mu}$$

$$= \underbrace{(z-z^2) \ln z} \Big|_0^1 + \underbrace{(z-z^2) \ln \left[\frac{\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z \mu^2} \right]} \Big|_0^1 - \int_0^1 dz (1-z) +$$

$$- \int_0^1 dz z(1-z) \frac{2m^2(1-z) - \mu^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} =$$

$$= - \int_0^1 dz (1-z) - \int_0^1 dz \frac{(1-z) [2m^2(1-z)z - z\mu^2] + (1-z)(1-z^2)m^2 - (1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} =$$

$$= - \int_0^1 dz (1-z) - \int_0^1 dz \frac{(1-z) [2m^2(1-z)z - \underbrace{(1-z^2)m^2}_{\text{green}} - z\mu^2] + (1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} =$$

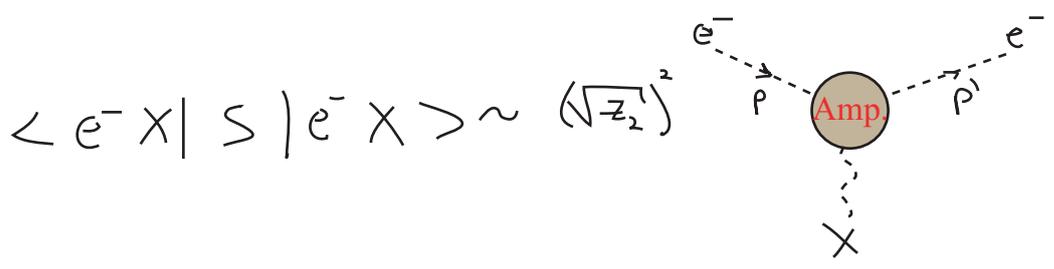
$$= - \int_0^1 dz (1-z) - \int_0^1 dz \left[(1-z)(-1) + \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} \right] = - \int_0^1 dz \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2}$$

$$\delta F_1(0) + \delta Z_2 = \left(\frac{g}{2\pi} \right) \int_0^1 dz \left\{ - \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} + \overbrace{\frac{m^2(1-z)^2(z+1)}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2}}^{P(z)} \right\} = 0$$

$$(1-z)^2(z+1) - (1-z)(1-z^2) = 0$$

$$\delta \bar{F}_1(0) + \delta Z_2 = 0$$

Agora, considerando a fórmula de LSZ (eq. 11.1), sabemos que:



Por isso, em qualquer espalhamento que envolva este vértice, teremos não apenas $-i e \Gamma^\mu$ mas sim:

$$-i e \Gamma^\mu \rightarrow -i e \Gamma^\mu Z_2$$

Considerando isso na definição dos fatores de forma obtemos:

$$Z_2 \Gamma^\mu = \gamma^\mu \bar{F}_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \bar{F}_2(q^2)$$

a "linha" é para indicar a nova correção, agora que consideramos Z_2
 todos os δ são em ordem α

$$1 + \gamma^\mu \delta Z_2 + \delta \Gamma^\mu + \mathcal{O}(\alpha^2) = \gamma^\mu + \gamma^\mu \delta \bar{F}_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta \bar{F}_2(q^2)$$

$$\gamma^\mu \delta \bar{F}_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta \bar{F}_2(q^2)$$

$$\sigma^{\mu\nu} q_\nu \Rightarrow \delta \bar{F}_2'(q^2) = \delta \bar{F}_2(q^2) \quad (\text{nada muda para esta estrutura})$$

$$\gamma^\mu \Rightarrow \delta \bar{F}_1'(q^2) = \delta \bar{F}_1(q^2) + \delta Z_2 = \delta \bar{F}_1(q^2) - \delta \bar{F}_1(0)$$

que é exatamente a subtração que fizemos na pg 38

Isto nos mostra que, apesar de termos estas divergências circulando pela teoria, pelo menos nessa grandeza observável (o fator de forma elétrico) as divergências se cancelam. É claro que, feito desta forma, parece apenas um milagre numérico com pouca chance de se sustentar em ordens superiores de α .

De uma forma mais geral, para que o fator de forma satisfaça as condições que desejamos:

$$\bar{F}_1(0) = 1$$

representa o que tínhamos antes da subtração na pg 38

podemos introduzir um novo fator Z no vértice, definido por: $\Gamma^\mu(q^2=0) \equiv Z_1^{-1} \gamma^\mu$ (eq. 51.1)

e a condição em F1 para qualquer ordem de perturbação se torna:

$$Z_1 = Z_2$$

$$Z_2 \Gamma^N = \gamma^N F_1(q^2) + \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2) \xrightarrow{q^2=0} \underbrace{Z_2 Z_1^{-1}}^{\gamma^N} \delta^N = \gamma^N F_1(0) + \dots$$

$F_1(0) = Z_2 Z_1^{-1}$

Felizmente, podemos provar que isto é verdade usando as relações de Ward-Takahashi:

(eq 27.1) $\Rightarrow -i q^\mu \Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; q) = [S_F^c(p_1+q)]^{-1} - [S_F^c(p_1)]^{-1}$

$\Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; q) \xrightarrow{q \rightarrow 0} Z_1^{-1} \gamma^N$ $S_F(p) = \frac{i Z_2}{\not{p} - m} + \dots$

$\left. \begin{matrix} p_1, p_2 \rightarrow m \\ q_\mu \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow -i q_\mu \Gamma^N \simeq 0 - i \underbrace{\Gamma^N(q=0)}_{Z_1^{-1} \gamma^N} q_\mu + \mathcal{O}(q^2) \simeq -i Z_1^{-1} \not{q}$

$\Rightarrow [S_F^c(p_1+q)]^{-1} - [S_F^c(p_1)]^{-1} \simeq -i Z_2^{-1} [(p_1+q) - m - \not{p}_1 + m] = -i Z_2^{-1} \not{q}$

$Z_1 = Z_2$

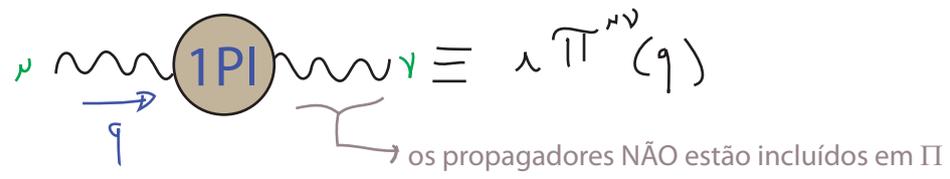
Em qualquer ordem de perturbação

Como uma nota final, note que as identidades de WT são consequência direta da simetria de gauge da teoria e garantiram o cancelamento de divergências em todas as ordens. Este é um resultado importante e bastante geral. No caso de simetrias não Abelianas trocamos as identidades de WT pelas **identidades de Slavnov-Taylor** que têm um papel central nos cancelamentos que precisam ocorrer nestas teorias. Este é mais um motivo para usarmos teorias de gauge.

Auto-energia do fóton

(Peskin 7.5)

Vamos ver agora o que ocorre com o propagador do fóton quando consideramos as correções radiativas. Começemos definindo:



A primeira correção obtida perturbativamente é:

$$i \Pi^{\mu\nu}(q) = (-ie)^2 (-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m} \right] \equiv i \Pi^{\mu\nu}(q)$$

Dada sua estrutura de Lorentz: $\Pi^{\mu\nu}(q) = \Pi_A(q^2) g^{\mu\nu} + \Pi_B(q^2) q^\mu q^\nu$

mas também sabemos que (identidade de Ward): $q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0$

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = \Pi_A(q^2) q^\nu + \Pi_B(q^2) q^2 q^\nu = 0$$

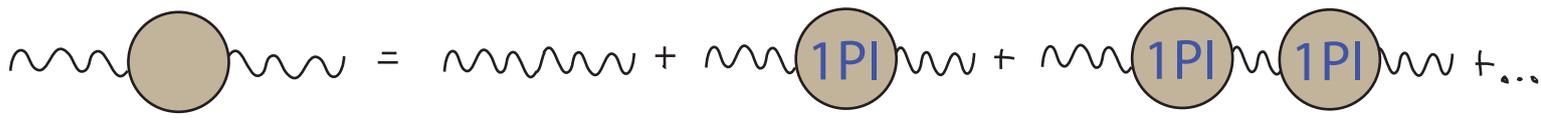
$$\Pi_A(q^2) = -\Pi_B(q^2) q^2 \equiv \Pi(q^2) q^2$$

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2)$$

 (eq. 53.1)

Não esperamos que haja um polo em $q^2 = 0$, já que a QED não tem nenhum estado de uma partícula que contribua para este diagrama, então assumiremos que $\Pi(q^2)$ é regular em $q^2 = 0$.

Podemos somar todas as contribuições 1PI para obter:



gauge de Feynman

$$= -\frac{i g^{\mu\nu}}{q^2} + -\frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \left[i (q^2 g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma) \Pi(q^2) \right] \frac{-i g^{\sigma\nu}}{q^2} + \dots =$$

$$\left(g^{\mu\rho} g^{\rho\sigma} \frac{g_{\sigma\nu}}{q^2} - \frac{q^\rho q^\sigma}{q^2} \right) \Pi(q^2) = \delta_\nu^\mu - \frac{q^\mu q_\nu}{q^2} \Pi(q^2) \equiv \Delta_\nu^\mu \Pi(q^2)$$

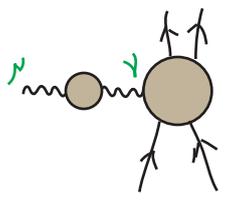
$$\Delta_\nu^\mu \Delta_\beta^\nu = \left(\delta_\nu^\mu - \frac{q^\mu q_\nu}{q^2} \right) \left(\delta_\beta^\nu - \frac{q^\nu q_\beta}{q^2} \right) = \delta_\beta^\mu - \frac{q^\mu q_\beta}{q^2} - \frac{q^\mu q_\beta}{q^2} + \frac{q^\mu q^2 q_\beta}{q^4} = \Delta_\beta^\mu$$

$$= -\frac{i g^{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \underbrace{\Delta_\sigma^\rho \Delta_\nu^\sigma}_{\Delta_\nu^\mu} \Pi(q^2) \Pi(q^2) + \dots =$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \Delta^{\rho\nu} \left[\Pi^1(q^2) + \Pi^2(q^2) + \Pi^3(q^2) + \dots \right] =$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \left(\delta^{\rho\nu} - \frac{q^\rho q^\nu}{q^2} \right) \left(\frac{1}{1 - \Pi(q^2)} - 1 \right) = \frac{-i}{q^2(1 - \Pi(q^2))} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) - \frac{i}{q^2} \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right)$$

Na prática, para o cálculo de elementos da matriz S, este propagador deverá estar conectado a uma linha fermiônica de um diagrama mais complicado:



$$= \frac{-i}{q^2(1 - \Pi(q^2))} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) - \frac{i}{q^2} \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \cdot \mathcal{M}^\nu(q)$$

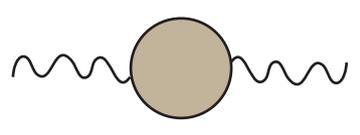
em algum lugar neste elemento de matriz temos:

$$\dots \frac{i}{\not{p}_1 + \not{q} - m} (-i e \not{\gamma}^\nu) \frac{i}{\not{p}_2 - m} \dots$$

E neste caso as identidades de WT nos garantem que: $q_\nu \mathcal{M}^\nu(q) = 0$

É fácil obter isso a partir da eq. 27.1, basta notar o que ocorre se usarmos LSZ do dois lados da equação, buscando um elemento de matriz com dois elétrons reais. Do lado esquerdo temos dois polos, mas cada termo do lado direito tem apenas um, de forma que este não contribui para o elemento de matriz. Para mais detalhes veja a seção 7.4 do Peskin.

Portanto, para fim de cálculo de elementos de matriz S:

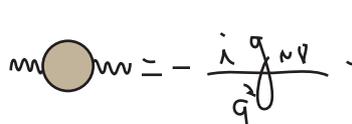


$$= \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 \left(1 - \frac{\Pi(q^2)}{1} \right)}$$

REGULAR EM $q^2 = 0$

Continuamos tendo um polo $q^2 = 0$, portanto a massa do fóton não muda. Note que as identidades de Ward-Takahashi (e portanto a simetria de gauge) estão por trás disso. Suponha que fosse possível ter uma correção com a forma proibida por WT, por exemplo:

$$i \Pi^{\mu\nu}(q) = i M^2 g^{\mu\nu} \left(\text{onde falta um termo } -\frac{M^2}{q^2} q^\mu q^\nu \text{ que garantiria WT} \right)$$



$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} + -\frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \left[i M^2 g^{\rho\sigma} \right] \frac{-i g_{\sigma\nu}}{q^2} + \dots =$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} - i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left(\frac{M^2}{q^2} \right) - i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left(\frac{M^2}{q^2} \right)^2 =$$

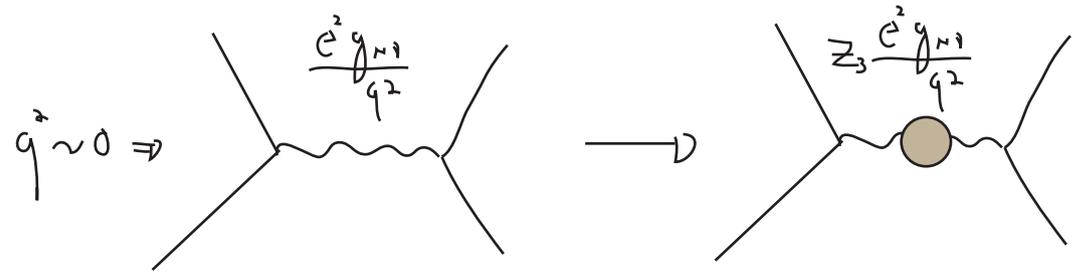
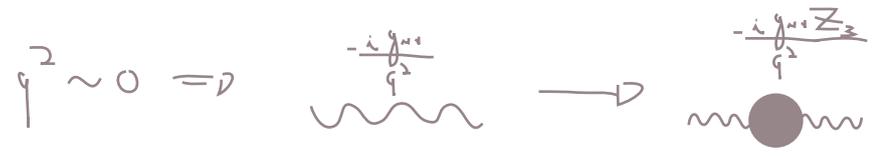
$$= -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left(1 + \left(\frac{M^2}{q^2} \right) + \left(\frac{M^2}{q^2} \right)^2 + \dots \right) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{1}{1 - \frac{M^2}{q^2}} = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2 - M^2}$$

polo em M (desastre!)
↓

O resíduo do polo em $q^2 = 0$ é basicamente dado por:

$$Z_3 = \frac{1}{1 - \Pi(0)}$$

Qualquer espalhamento "soft" (com baixa troca de energia e momento) entre dois elétrons será modificado justamente por este fator:



Como temos um e^2 acompanhando este fator Z_3 podemos vê-lo como uma redefinição da carga:

$$e_r = \sqrt{Z_3} e$$

⇓ mudamos a notação (assim como fizemos com a massa)

$$e = \sqrt{Z_3} e_0$$

⇓ carga que aparece na lagrangeana (carga "nua")
 ↙ carga vestida ou física (o que medimos)

Mais uma vez temos a condição advinda da série perturbativa:

$$\begin{cases} e = e_0 + \mathcal{O}(\alpha) \\ Z_3 = 1 + \mathcal{O}(\alpha) \end{cases}$$

$\Pi(q^2)$ tem outro efeito:

$$q^2 \neq 0 \Rightarrow \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{(1 - \Pi(q^2))} \approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2 (1 - \Pi_2(0))}{(1 - \Pi_2(q^2))} \approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{1 + \kappa}$$

$\frac{1}{1 + \kappa} \approx 1 - \kappa + \kappa^2 + \dots$
 $\frac{1}{1 - \kappa} \approx 1 + \kappa + \kappa^2 + \dots$

$e_0^2 = \frac{e^2}{Z_3} = e^2 (1 - \Pi(0)) \approx e^2 (1 - \Pi_2(0))$

$$\approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{(1 - \Pi_2(q^2))(1 + \Pi_2(0))} \approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{[1 - (\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))]}$$

$\Pi_2(q^2) \Pi_2(0) \sim \mathcal{O}(\alpha^2)$

esta grandeza funciona como uma carga elétrica dependente do momento

Em suma, o efeito das correções ao propagador do fóton é o de mudar o acomplamento da teoria e torná-lo dependente de energia (passa a ser um running coupling):

$$\alpha_0 \rightarrow \alpha_{\text{EFF}}(q^2) = \frac{e_0^2/4\pi}{1 - \Pi(q^2)} \stackrel{\mathcal{O}(\alpha)}{\approx} \frac{\alpha}{[1 - (\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))]}$$

(eq. 56.1)

$$\alpha_{\text{EFF}}(0) \equiv \alpha$$

Calculemos rapidamente $\Pi(q^2)$:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -(-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{k-m} \gamma^\nu \frac{i}{k+q-m} \right]$$

rigorosamente teríamos que usar e_0 e m_0 , mas trocar por e e m só introduz um erro de ordem α^2

$$e = e_0(1 + \mathcal{O}(\alpha)) \Rightarrow (e - e_0)^2 = \mathcal{O}(\alpha^2)$$

Seguindo o procedimento usual (parametriz. de Feynman, rotação de Wick), chegamos a:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l_E}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}l_E^2 + g^{\mu\nu}l_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2)}{(l_E^2 + \Delta)^2}$$

(eq. 56.2)

$$\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$$

Que obviamente diverge (temos l^5 no numerador). Temos que escolher algum método de regularização. Neste caso a escolha apresenta sutilezas devidas ao fato de estarmos lidando com uma função cuja forma está restrita pela identidade de WT. Se fizéssemos por exemplo a regularização por cut-off (que consiste simplesmente em não integrar no módulo do momento euclidiano até infinito, mas sim até uma escala máxima Λ):

$$\int_0^\infty dl_E \rightarrow \int_0^\Lambda dl_E \Rightarrow i\Pi_2^{\mu\nu}(q) \propto e^2 \Lambda^2 g^{\mu\nu}$$

falta um termo $-\frac{e^2 \Lambda^2}{q^2} q^\mu q^\nu$
para satisfazer WT

$$\hookrightarrow q_\mu \Pi_2^{\mu\nu} \sim e^2 \Lambda^2 q^\nu \neq 0$$

Este resultado viola a identidade de Ward e daria uma massa para o fóton

De fato não é a divergência em si que está violando a invariância de gauge (as id. WT.) mas sim a forma como escolhemos regularizá-la, a prova disso é que podemos encontrar outras regularizações que preservam as identidades de WT. De uma forma geral, o resultado deve independer da regularização escolhida e quando duas regularizações dão resultados diferentes é porque uma delas (ou as duas) está violando alguma(s) das simetrias da teoria. Se elevarmos as simetrias a categoria de axiomas da teoria, então temos um critério para escolher a regularização correta.

Dentro desta lógica concluímos que a regularização por cut-off feita acima não é boa. Uma outra opção é usar Pauli-Villars, como fizemos nas pgs 34-35, o que preservaria WT mas é um tanto complicado. Felizmente temos uma outra opção, a **regularização dimensional**.

A idéia da **regularização dimensional** é calcular os diagramas como função do número d de dimensões do espaço tempo. Para d suficientemente pequeno as integrais são finitas, e então voltamos para o mundo real fazendo $d \rightarrow 4$

Um exemplo:

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \int \frac{d\mathcal{L}_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi})^d &= \left(\int dx e^{-x^2} \right)^d = \int d^d x e^{-\sum_{i=1}^d x_i^2} = \int d\mathcal{L}_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} = \\ &= \left(\int d\mathcal{L}_d \right) \frac{1}{2} \int_0^\infty d(x^2) (x^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-x^2} = \left(\int d\mathcal{L}_d \right) \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \end{aligned}$$

$x^{d-2} = (x^2)^{\frac{d}{2}-1}$

$\int d\mathcal{L}_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$

 (eq. 57.1)

$$x = \frac{\Delta}{(l_E^2 + \Delta)} \quad dx = -\frac{\Delta}{(l_E^2 + \Delta)^2} dl_E^2$$

$$\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d(l_E^2) \frac{(l_E^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} = -\frac{1}{2} \int_1^0 dx \frac{x^{1-\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}$$

$$(l_E^2)^{\frac{d}{2}-1} = \left(\frac{\Delta - \Delta x}{x} \right)^{\frac{d}{2}-1} = x^{1-\frac{d}{2}} \Delta^{\frac{d}{2}-1} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}$$

Usando então a definição da função beta:

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \frac{\Gamma(2-d/2)\Gamma(d/2)}{\Gamma(2)} \underset{1!}{}$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \Gamma(2-d/2)\Gamma(d/2)$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \Gamma(2-d/2)$$

(eq. 58.1)

$\Gamma(z)$ tem polos em todos os números inteiros negativos e em zero, logo teremos polos em

$$d = 4, 6, 8, \dots$$

Como estamos interessados no comportamento perto de $d = 4$, podemos definir: $\epsilon = 4 - d$

$$\Gamma(2-d/2) = \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)$$

const. de Euler

$$-\frac{d}{2} = \frac{\epsilon}{2} - 2$$

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} = \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\epsilon/2} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon \ln\left(\frac{1}{\Delta}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$(4\pi)^{-d/2} = (4\pi)^{\frac{\epsilon-4}{2}} = (4\pi)^{-2} (4\pi)^{\frac{\epsilon}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[1 + \frac{1}{2}\epsilon \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right]$$

O produto das três expansões acima nos dá:

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \underset{\substack{d \rightarrow 4 \\ \epsilon \rightarrow 0}}{\sim} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) + \ln(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

Comparemos com o que teríamos obtido via regularização de Pauli-Villars

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[L_N\left(\frac{\Lambda^2}{\Delta}\right) + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}) \right]$$

Reg. Dimensional

Pauli-Villars

De onde vemos que: $\frac{2}{\epsilon} \longleftrightarrow L_N(\Lambda^2)$

Isso também explica porque temos um logaritmo de algo com dimensão ($\ln[\Delta]$), a escala deste logaritmo está escondida no $2/\epsilon$

Podemos também provar algumas fórmulas mais gerais:

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2} \frac{\Gamma(n-d/2)}{\Gamma(n)} \quad (\text{eq. 59.1})$$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2-1} \frac{\Gamma(n-d/2-1)}{\Gamma(n)} \quad (\text{eq. 59.2})$$

Além disso é importante lembrar que: $\begin{cases} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = d \\ \text{portanto a substituição nas integrais (pg 32) fica: } \ell^\mu \ell^\nu \rightarrow \frac{1}{d} \ell^2 g^{\mu\nu} \\ \delta^\mu \delta^\nu \delta_\mu = -(2-\epsilon) \delta^\nu \\ \delta^\mu \delta^\nu \delta^\rho \delta_\mu = 4 \delta^{\nu\rho} - \epsilon \delta^{\nu\rho} \\ \delta^\mu \delta^\nu \delta^\rho \delta^\sigma \delta_\mu = -2 \delta^{\rho\sigma} \delta^\nu + \epsilon \delta^{\nu\rho} \delta^\sigma \end{cases}$

Voltando ao cálculo de $\Pi_2^{\mu\nu}(q)$ (eq. 56.2 - com pequenas mudanças para dar conta da mudança de dimensão), os termos com ℓ^2 no numerador nos dão:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{(1 - \frac{2}{d}) g^{\mu\nu} \ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} &= (1 - \frac{2}{d}) g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-d/2} \Gamma(1-d/2) = \\ &= - \underbrace{\left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma(1-d/2)}^{\Gamma(2-d/2)} g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \Delta = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2-d/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} (-\Delta g^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Calculando o termos restantes de 56.2 temos (fica como exercício):

$$i\tilde{\Pi}_2(q^2) = (q^2 g^{NV} - g^N g^V) i \Pi_2(q^2) \quad (\text{eq. 60.1})$$

Onde:

$$\Pi_2(q^2) = -\frac{8e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \, x(1-x) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \quad (\text{eq. 60.2})$$

De forma que, fazendo a regularização dimensional, obtemos exatamente a forma exigida pelas identidades de WT.

Fazendo o limite $d \rightarrow 4$ ($\epsilon \rightarrow 0$):

$$\Pi_2(q^2) \rightarrow -\frac{8e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) + \ln(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

$-\frac{2\alpha}{\pi}$

a integral da parte divergente nos dá: $-\frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{3\epsilon}$

Podemos obter a correção na carga:

$$\frac{e^2 - e_0^2}{e_0^2} = \frac{Z_3 e_0^2 - e_0^2}{e_0^2} = Z_3 - 1 = \frac{1}{1 - \Pi(0)} - 1 = \Pi_2(0) \approx -\frac{2\alpha}{3\pi\epsilon}$$

\uparrow
 $\mathcal{O}(\epsilon)$

Temos mais uma vez uma diferença infinita entre o que observamos (e^2) e o que aparece na lagrangeana (e_0^2), mas essa diferença não é observável. O que é **realmente observável** é a dependência com q^2 desta carga. É fácil ver que esta está livre de divergências:

$$(\text{eq. 56.1}) \Rightarrow \alpha_{\text{FFF}}(q^2) = \frac{\alpha}{[1 - \underbrace{(\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))}_{\tilde{\Pi}_2(q^2)}]}$$

$$\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$$

$$\tilde{\Pi}_2(q^2) = -\frac{8e^2}{2\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) + \ln(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) + \right. \\ \left. -\frac{2}{\epsilon} + \ln(m^2) - \ln(4\pi) + \gamma - \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

$$\tilde{\Pi}_2(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln\left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2}\right)$$

(eq. 60.3)

Primeiro consideremos o caso em que $q^2 < 0$



neste caso o argumento do logaritmo é positivo e $\hat{\Pi}_2(q^2)$ é real e analítica em q^2 o que está de acordo com o que assumimos na pg 53.



No caso em que $q^2 > 0$ (canais s) a função é analítica até $q^2 = 4m^2$, e depois disso desenvolve um corte de ramificação (a partir deste ponto é possível produzir um par elétron-pósitron)

Vejamos como isto afeta o potencial elétrico entre cargas opostas (no limite não relativístico):

$$V(\vec{x}) = -\frac{e_0^2}{4\pi|\vec{x}|} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{-e_0^2}{|\vec{q}|^2} \rightarrow \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{-e^2}{|\vec{q}|^2 [1 - \hat{\Pi}_2(-|\vec{q}|^2)]}$$

$|\vec{q}|^2 \ll m^2$ → massa do elétron



$$\hat{\Pi}_2(-|\vec{q}|^2) \approx -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[-\frac{x(1-x)|\vec{q}|^2}{m^2} + O\left(\frac{|\vec{q}|^2}{m^2}\right) \right] = -\frac{2\alpha}{\pi} \left(-\frac{|\vec{q}|^2}{30m^2} \right)$$

$$V(\vec{x}) = -e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{q}|^2 \left[1 - \frac{\alpha|\vec{q}|^2}{15\pi m^2} \right]} \approx -e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{q}|^2} \left[1 + \frac{\alpha|\vec{q}|^2}{15\pi m^2} \right]$$

$$= -e^2 \left[\frac{1}{4\pi|\vec{x}|} + \frac{\alpha}{15\pi m^2} \delta^3(\vec{x}) \right] = -\frac{\alpha}{|\vec{x}|} - \frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^3(\vec{x})$$

O potencial muda para pequenas distâncias

Isto muda os níveis de energia do átomo de hidrogênio:

$$\Delta E = \int d^3x |\psi(\vec{x})|^2 \left(-\frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^3(\vec{x}) \right) = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} |\psi(0)|^2$$

só estados de onda s tem $\psi(0) \neq 0$

$$\Delta E_{2s} = -1,123 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$$

A função delta no potencial é fruto de uma aproximação um pouco grosseira (quando expandimos em $|\vec{q}|^2/m^2$, podemos fazer melhor escrevendo:

$$|\vec{q}| \equiv Q$$

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-e^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}\cos\theta}}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} = \frac{-e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^\infty dQ \frac{e^{iQx\cos\theta}}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]}$$

$$= \frac{+e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dQ \int_1^{-1} d(\cos\theta) \frac{e^{iQx\cos\theta}}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} = \frac{+e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dQ \frac{Q [e^{-iQx} - e^{iQx}]}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]}$$

$$= \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \int_0^\infty dQ \frac{Q e^{iQx}}{Q^2 + \mu^2} [1 + \hat{\pi}_2(-Q^2)]$$

inserido para regularizar o polo em $Q^2=0$

$\int_0^\infty dQ Q \rightarrow -\int_{-\infty}^0 dQ Q$

$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$

$\frac{i\alpha}{\pi\kappa} \oint = \frac{i\alpha}{\pi\kappa} 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \left[1 + \hat{\pi}_2(-iN) \right] \stackrel{N \rightarrow \infty}{=} -\frac{\alpha}{\kappa}$

$\oint = \int_{C_1} + \int_{C_2+C_3} + \int_{C_4} \Rightarrow \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \int_{C_1} = -\frac{\alpha}{\kappa} - \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \int_{C_3+C_4}$

$\hat{\pi}_2(Q^2)$ tem um Branch Cut para $\begin{cases} -Q^2 > 4m^2 & \text{Im}[Q] > 2m \\ Q^2 \in \mathbb{R} & \text{Re}[Q] = 0 \end{cases}$

As integrais perto do corte (curvas C_3 e C_4) nos dão a correção do potencial:

$$\int_{C_3+C_4} = \int_{i2m+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dQ F(Q) + \int_{i\infty-\epsilon}^{i2m-\epsilon} dQ F(Q) = -\int_{i2m}^{i\infty} dQ F(Q+\epsilon) + \int_{i2m}^{i\infty} dQ F(Q-\epsilon) = 2i \text{Im} \left[\int_{i2m}^{i\infty} dQ F(Q-\epsilon) \right]$$

$$F(Q) = \frac{Q e^{iQx}}{Q^2 + \mu^2} [1 + \hat{\pi}_2(-Q^2)]$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Re}[F(Q+\epsilon)] &= \text{Re}[F(Q-\epsilon)] \\ \text{Im}[F(Q+\epsilon)] &= -\text{Im}[F(Q-\epsilon)] \end{aligned} \right\}$$

$$SV(x) = \frac{2\alpha}{\pi\kappa} 2i \operatorname{Im} \left[\int_{i2m}^{i\infty} dQ \frac{e^{iQx}}{Q^2 + \cancel{\mu^2}} \left[1 + \hat{\Pi}_2(-(\cancel{Q}-\epsilon)^2) \right] \right] =$$

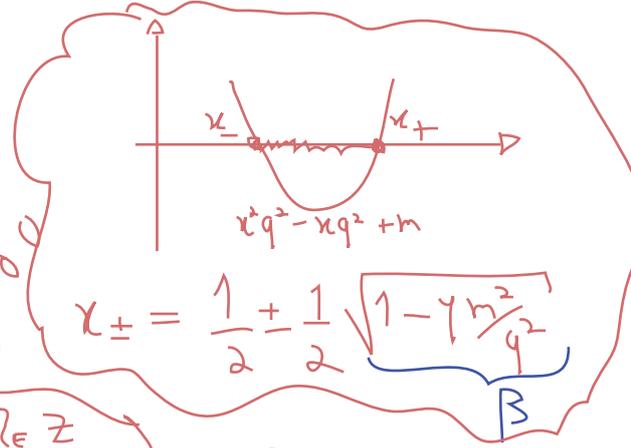
$Q - \epsilon \sim Q$ $q \equiv -iQ$

$$= \frac{2\alpha}{\pi\kappa} \operatorname{Im} \left[\int_{2m}^{\infty} \frac{dq}{q} e^{-qx} \left[1 + \hat{\Pi}_2(-(\cancel{i}q - \epsilon)^2) \right] \right] = \frac{2\alpha}{\pi\kappa} \int_{2m}^{\infty} \frac{dq}{q} e^{-qx} \operatorname{Im} \left[\hat{\Pi}_2(q^2 + i\epsilon) \right]$$

Vamos obter a parte imaginária desta função para $q^2 > 4m^2$ partindo de 60.3:

$$\int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right)$$

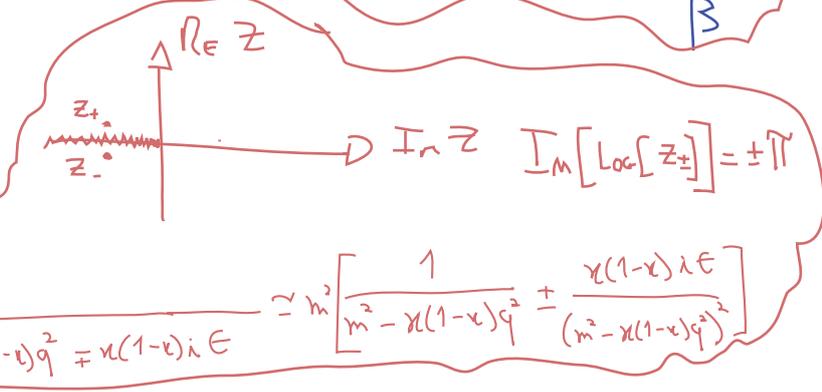
$\rho(x, q^2)$



$$\operatorname{Im}[\rho(x, q^2)] \neq 0 \iff m^2 - x(1-x)q^2 < 0$$

$x_- < x < x_+$

$$\sqrt{1 - 4\frac{m^2}{q^2}} \in \mathbb{R} \quad (\forall q^2 > 4m^2)$$



$$\operatorname{Im} \left[\hat{\Pi}_2(q^2 + i\epsilon) \right] = -\frac{2\alpha}{\pi} (-\pi) \int_{x_-}^{x_+} dx (1-x)x =$$

$y \equiv x - \frac{1}{2}$

$$= +2\alpha \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dy \left(\frac{1}{4} - y^2 \right) = +\frac{2\alpha}{3} \sqrt{1 - 4\frac{m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2} \right)$$

$$SV(x) = \frac{-2\alpha}{\pi\kappa} \int_{2m}^{\infty} \frac{dq}{q} e^{-qx} \frac{2\alpha}{3} \sqrt{1 - 4\frac{m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2} \right)$$

Estudemos isto em duas regiões:

(I) $x \gg \frac{1}{m} \implies$ Neste caso a exponencial e^{-qx} suprime fortemente o integrando e a principal contribuição vem do limite inferior. Neste caso: $q \approx 2m$

$$\delta V(x) = \frac{-2\alpha}{\pi x} \int_0^\infty dt \frac{e^{-(t+2m)x}}{(t+2m)} \approx \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t}{t+4m}} \frac{(t+2m)^2 + 2m^2}{(t+2m)^2}$$

$t = q - 2m$

$$\approx \frac{-2\alpha}{\pi x} \int_0^\infty dt \frac{e^{-(t+2m)x}}{2m} \approx \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t}{4m}} \frac{3}{2} + \mathcal{O}(t)$$

$x \gg \frac{1}{m} \rightarrow \delta V(x) \approx -\frac{\alpha}{x} \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mx}}{(mx)^{3/2}}$

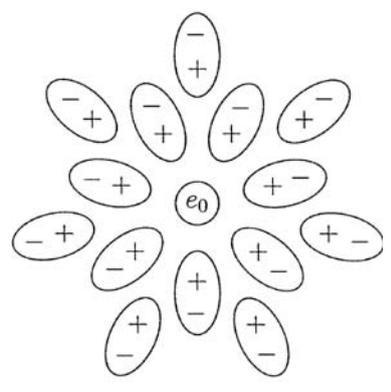
(eq. 64.1)

$$V(x) = -\frac{\alpha}{x} \left(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mx}}{(mx)^{3/2}} + \dots \right)$$

Potencial de Uehling

O importante é notar que a correção é suprimida exponencialmente para grandes distâncias e a escala é dada pelo comprimento de onda Compton do elétron (de fato $1/2m$). A interpretação é de que a distâncias menores que $1/2m$ temos uma densidade considerável de pares virtuais elétron-pósitron, isto funciona como um dielétrico que esconde parte da carga.

Polarização do Vácuo:



Vejamos o que acontece quando vamos para o limite oposto:

$$\textcircled{II} -q^2 \gg m^2 \Rightarrow \frac{1}{\Pi_2(q^2)} \approx -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right)$$

(eq. 60.3)

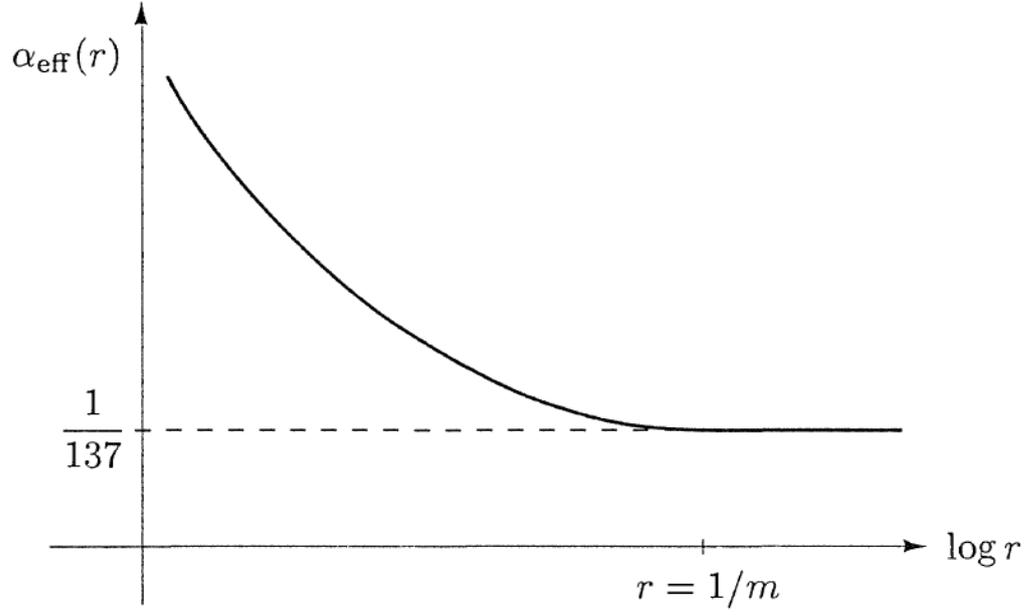
$+ \ln(m^2) - \ln(x(1-x)) - \ln(-q^2)$

$$\approx \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left\{ \ln \left[\frac{-q^2}{m^2} \right] + \ln(x(1-x)) \right\} = \frac{\alpha}{3\pi} \left[\ln \left[\frac{-q^2}{m^2} \right] - \frac{5}{3} + \mathcal{O} \left(\frac{m^2}{q^2} \right) \right]$$

O que na constante de acoplamento nos dá (eq. 56.1):

$\alpha_{\text{EFF}}^2(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left[-\frac{q^2}{m^2} e^{5/3} \right]}$

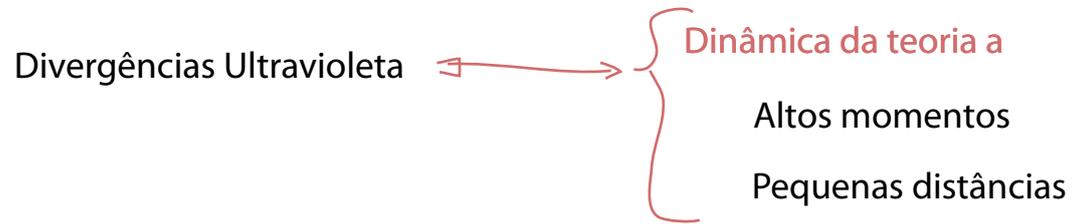
Para espalhamentos muito duros (ou seja, distância de interação pequenas), $-q^2$ fica grande e o acoplamento efetivo aumenta. Podemos fazer uma imagem qualitativa disto fazendo $q = 1/r$ e obtendo o gráfico abaixo:



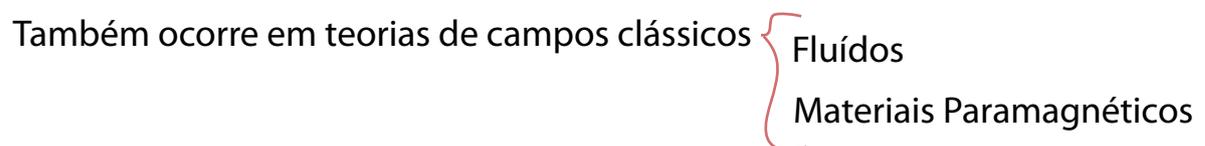
Renormalização

(Peskin 10.1)

Vimos alguns cancelamentos de divergências no caso da QED, mas por enquanto pode parecer complicado descobrir quais diagramas temos que considerar para que estes cancelamentos ocorram. Além disso a presença de divergências põe em dúvida a validade da série perturbativa. Veremos agora como é possível modificar a teoria para escrevê-la em termos de grandezas físicas finitas desde o princípio de forma que tenhamos uma teoria que possa ser expandida perturbativamente. Começamos pensando um pouco sobre estas divergências.



deve existir um cut-off a partir do qual preciso de uma descrição mais fundamental



Posso estudar ondas sonoras (ou de spin) e fluxos

↳ Esperamos que esta descrição falhe quando chegamos a tamanhos e velocidades típicos dos átomos. Ou seja, quando a descrição contínua falha.

Conhecer detalhes da “**continuação ultravioleta**” (neste caso a física dos átomos - seus tamanhos, velocidades e spins) ajuda a obter a física em escalas de tamanhos maiores ou de menor energia (neste caso, viscosidades, suscetibilidade magnética, velocidade do som). No entanto, no caso de campos quânticos, não conhecemos a física a escalas realmente pequenas, sequer sabemos exatamente aonde está o cut-off. É importante nos interrogarmos em que condições é possível contruir teorias preditivas nessa situação, teorias que sejam **independentes do cut-off**.

A resposta para esta pergunta está intrinsecamente ligada ao tratamento das divergências, pois é a presença delas nas relações entre as versões **nuas** (antes de considerarmos interações) e **físicas** dos parâmetros da teoria (massas e acoplamentos) indicam que os valores destes parâmetros são muito influenciados pela continuação ultravioleta - pela física desconhecida. É por isso que eles não podem ser obtidos de primeiros princípios, tudo que podemos fazer é medi-los. Veremos no entanto que, satisfeitas certas condições, podemos obter o comportamento destes parâmetros até em regiões próximas do cut-off.

Contagem de Divergências Ultravioleta - QED

(Peskin 10.1, Ryder 9.1 ~ 9.5)

Começemos tentando encontrar um modo de “descobrir” (sem de fato calcular o diagrama de Feynman) quando um diagrama tem divergências ultravioleta. Começemos com a QED

N_e = número de elétrons externos

V = número de vértices

N_γ = número de fótons externos

L = número de loops

P_e = número de propagadores de elétron

P_γ = número de propagadores de fóton

Em um diagrama qualquer, temos uma divergência em potencial para cada loop: $\int d^4k$

no entanto, os propagadores atenuam esta divergência, colocando potências de momento no denominador:

$$\longrightarrow \Rightarrow \frac{1}{\not{k} - m} \quad \text{~~~~~} \quad \text{~~~~~} \quad \Rightarrow \frac{1}{k^2}$$

Definamos a **divergência superficial** do diagrama por:

$$D \equiv 4L - P_e - 2P_\gamma \quad (\text{eq. 66.1})$$

Inocentemente esperaríamos que o diagrama tenha uma divergência proporcional a Λ^D se $D > 0$, e proporcional a $\ln(\Lambda)$ se $D = 0$. Λ é um cut-off de momento.

Esta análise simplista pode falhar por três motivos:

- (1) Diagramas sem loops nem propagadores tem $D = 0$, mas são convergentes
- (2) Se um diagrama contém um subdiagrama divergente, a divergência pode ser pior do que parece:

$L = 1$
 $P_e = 2$
 $P_\gamma = 2$

$D = 4 - 2 - 2 = -2$

no entanto este diagrama $\sim L_N(\Lambda)$

diverge $\sim L_N(\Lambda)$

os momentos colocados no denominador por estes propagadores nada tem a ver com o que está sendo integrado no loop. Logo não contribuem para cancelar a divergência

- (3) Se alguns termos do diagrama são cancelados por força de alguma simetria (identidades de WT, por exemplo), a divergência pode ser menor ou nem existir:

$L = 1$
 $P_e = 2$
 $P_\gamma = 0$

$D = 4 - 2 = 2$

no entanto: $\sim L_N(\Lambda)$

Note que (pg 56) quando fizemos regularização por cut-off (que viola WT) obtivemos $\sim \Lambda^2$ mas o resultado que obedece WT (Pauli-Villars) nos dá $L_N(\Lambda)$

Ainda assim D é útil, veja que podemos escrevê-lo em função das pernas externas usando:

$$L = P_e + P_\gamma - V + 1 \quad (\text{eq. 67.1})$$

ex: para $V = 4$, preciso de 4 propagadores para fechar o loop:

$V = 4$
 $P_e + P_\gamma = 4$
 $L = 1$

diminuindo o número de propagadores, não consigo fechar o loop

$V = 4$
 $P_e + P_\gamma = 3$
 $L = 0$

se aumento o número de propagadores fica inevitável aparecer mais loops:

$V = 4$
 $P_e + P_\gamma = 5$
 $L = 2$

e também, que:

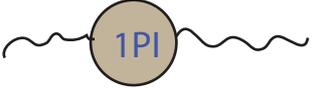
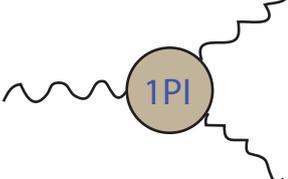
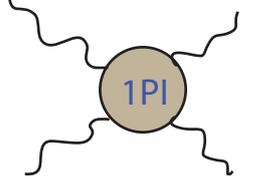
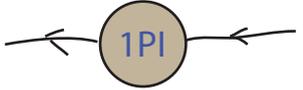
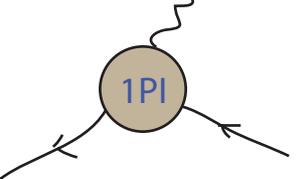
$$V = 2 P_\gamma + N_\gamma = \frac{1}{2} (2 P_e + N_e) \quad (\text{cada vértice tem 1 fóton e 2 elétrons, propagadores tem dois vértices e pernas externas apenas um}) \quad (\text{eq. 67.2})$$

$$D = 4(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma = 4P_e + 4P_\gamma - 2P_\gamma - N_\gamma - 3P_e - \frac{3}{2}N_e + 4 - P_e - 2P_\gamma =$$

$$\hookrightarrow \frac{V}{4} + \frac{3V}{4} = \frac{P_\gamma}{2} + \frac{N_\gamma}{4} + 3\frac{P_e}{4} + \frac{3N_e}{8}$$

$D = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2} N_e$ (eq. 68.1)

O que nos mostra que a divergência superficial só depende do número de pernas externas. Somente diagramas com poucas pernas tem $D \geq 0$. Temos poucas possibilidades na QED, de fato sete combinações (abaixo). E como as pernas externas não entram na integral de loop, podemos considerar a soma de todos os diagramas 1PI que contribuem para cada combinação de pernas externas. Qualquer diagrama que contenha divergências vai ter um destes como sub-diagrama:

A		$D = 4$	B		$D = 3$
	$N_e = N_\gamma = 0$				
C		$D = 2$	D		$D = 1$
E		$D = 0$	F		$D = 1$
G		$D = 0$			

O diagrama A é o mais divergente, mas não contribui para elementos de matriz S e nem pode estar contido em outros diagramas porque não tem pernas externas (de fato nem para Z ele contribui pois é cancelado na normalização).

Para cada linha externa de fóton, devemos ter dentro do produto temporalmente ordenado uma corrente eletromagnética:

$$j^\mu(z) = \bar{\psi}(z) \gamma^\mu \psi(z)$$

$$\langle \Omega | A_\mu(x) | \Omega \rangle \sim \langle 0 | A_\mu(x) | 0 \rangle + K_1 \langle 0 | T \{ A_\mu(x) A^\nu(z) j_\nu(z) \} | 0 \rangle +$$

$$+ K_2 \langle 0 | T \{ A_\mu(x) A^\nu(z) j_\nu(z) A^\rho(z') j_\rho(z') \} | 0 \rangle +$$

$$+ K_3 \langle 0 | T \{ A_\mu(x) A^\nu(z) j_\nu(z) A^\rho(z') j_\rho(z') A^\sigma(z'') j_\sigma(z'') \} | 0 \rangle + \dots =$$

$K_n =$ constantes e integrais em z

$$\sim K_1^D \langle 0 | T \{ j_\mu(z) \} | 0 \rangle + K_3^D \langle 0 | T \{ j_\mu(z) \overbrace{j_\nu(z')}^{c} j_\rho(z'') \} | 0 \rangle + \dots \sim$$


$$\sim K \int d^4 z \langle \Omega | T \{ j_\mu(z) \} | \Omega \rangle$$

$$\langle \Omega | A_\mu(x) A_\nu(x') A_\rho(x'') | \Omega \rangle \sim \iiint \langle \Omega | j_\mu(x) j_\nu(x') j_\rho(x'') | \Omega \rangle$$

Como a QED é invariante por conjugação de carga: $C | \Omega \rangle = | \Omega \rangle$

e temos: $C \bar{\psi} \gamma^\mu \psi C^\dagger = - \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

então: $\langle \Omega | T \{ j_\mu(z) \} | \Omega \rangle = - \langle \Omega | T \{ j_\mu(z) \} | \Omega \rangle = 0$

$$\langle \Omega | T \{ j_{\mu_1}(z_1) \dots j_{\mu_n}(z_n) \} | \Omega \rangle = (-1)^n \langle \Omega | T \{ j_{\mu_1}(z_1) \dots j_{\mu_n}(z_n) \} | \Omega \rangle$$

Qualquer correlator com um número ímpar de fótons externos é zero. Isto elimina os diagramas B e D acima. O restante dos diagramas acima é diferente de zero, comecemos pensando sobre o diagrama F (auto energia do elétron) - ele é função do momento do elétron (p), a série em torno de $p = 0$ fica:

$$\leftarrow \text{1PI} \leftarrow = A_0 + A_1 \not{p} + A_2 p^2 + \dots$$

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d p^n} \left(\leftarrow \text{1PI} \leftarrow \right) \Big|_{p=0}$$

↳ não estamos nos preocupando com as divergências infravermelhas, assumimos que foram devidamente regularizadas, como fizemos na pg 39.

O momento p vai estar no denominador dos propagadores aparecendo na soma 1PI, quando calculamos os coeficientes fazemos:

$$\frac{d}{d p} \left(\frac{1}{\not{p} + \not{p} - m} \right) = - \frac{1}{(\not{p} + \not{p} - m)^2} \Rightarrow \text{coeficientes com n maior tem o grau de divergência menor}$$

↳ momento integrado

A divergência superficial de A_0 (que é a maior) deve ser $D = 1$, isto quer dizer que a divergência de A_1 é logarítmica e o restante dos coeficientes não diverge (é preciso cuidado aqui - pode

haver subdiagramas com divergências mais altas - veremos como tratar isso em breve). Além disso vimos que (pg 48) que correções radiativas não podem dar massa ao elétron quiral (que não tem uma massa nua) e que a correção deve ser proporcional a massa, por análise dimensional vemos que a divergência é logarítmica. Temos portanto o caso em que uma simetria torna a divergência menor que a divergência superficial:

$$\leftarrow \text{1PI} \leftarrow = a_0 m L_N(\Lambda) + a_1 \not{v} L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

(compare com a eq. 45.1)

Podemos seguir a mesma lógica no caso do diagrama G, neste caso, como a divergência superficial já é 0, qualquer derivada em qualquer um dos momentos externos já nos dá algo finito. Portanto a expansão nestas três variáveis só tem divergências no coeficiente A_0 :

$$\text{1PI} \sim -i e \not{v} L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

Como já discutimos (pg 53) a auto-energia do fóton (diagrama C) deve ter a forma:

$$\text{1PI} = (\delta^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2)$$

o que já é a série de Taylor que procuramos, dentro de $\Pi(q^2)$ temos os coeficientes A_n , $n = 2, 3, \dots$. Os coeficientes A_0 e A_1 são zero, e a divergência superficial cai de 2 para 0 nos termos de $\Pi(q^2)$ que não dependem do momento (os termos de $\Pi(q^2)$ que dependem de q são finitos) - exatamente o que obtivemos na página 60.

Observação importante:

Temos aqui dois exemplos importantes do que chamamos de "massas protegidas" por simetrias. A simetria de gauge da QED impede o fóton de ter massa nua e impede, via WT, que ele ganhe massa a qualquer ordem de perturbação. Este mecanismo continua útil mesmo quando a simetria é **quebrada explicitamente**! A simetria quiral impede o elétron de ter massa nua e de ganhar via correções, mas de fato o elétron tem massa. No entanto o conhecimento de que no limite em que a massa nua vai para zero, todas as correções radiativas também devem ir, nos diz que estas devem ser proporcionais a massa. Esta simetria quebrada protege a massa de divergências mais intensas (em vez de lineares são logarítmicas).

Nos resta apenas o espalhamento fóton-fóton (diagrama E). Sabemos que (identidade de Ward):

$$k^\mu \left(\text{1PI} \right) = 0$$

É possível mostrar que isto implica na seguinte estrutura para a amplitude deste diagrama:

$$(g^{\mu\nu} k_1^\sigma - g^{\nu\sigma} k_1^\mu) \times (g^{\alpha\beta} k_2^\gamma - g^{\beta\gamma} k_2^\alpha) (g^{\delta\epsilon} k_3^\zeta - g^{\epsilon\zeta} k_3^\delta) (g^{\eta\theta} k_4^\iota - g^{\theta\iota} k_4^\eta)$$

Como há uma potência do momento em cada termo, temos que todos os coeficientes da série com $n < 4$ devem ser zero. O primeiro termo diferente de zero tem quatro derivadas o que leva a $D = -4$.

O que concluímos é que só existem três blocos básicos divergentes na QED, os diagramas **C** (auto-energia do fóton), **F** (auto-energia do elétron) e **G** (vértice). Os diagramas **G** e **C**, de fato possuem apenas um coeficiente divergente, ao passo que o diagrama **F** contém dois. Isto quer dizer que a QED tem um total de **quatro grandezas divergentes** que temos que absorver em redefinições de parâmetros para obter uma teoria finita. Veremos isto mais a frente

Suponha que seguíssemos o mesmo procedimento para QED em d dimensões. Neste caso:

$$D_d = \underbrace{dL}_{\text{agora cada loop contribui com uma integral de momento d-dimensional}} - P_e - 2P_\gamma$$

agora cada loop contribui com uma integral de momento d -dimensional

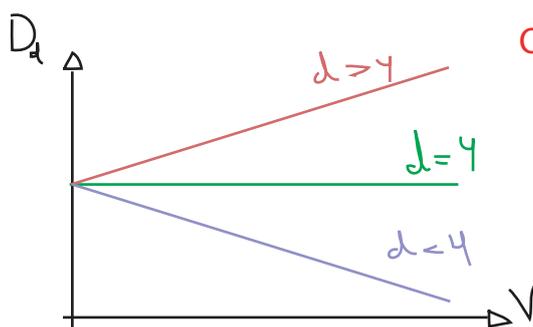
usando as eqs. 67.1 e 67.2 temos:

$$(67.2) \Rightarrow \left. \begin{aligned} P_\gamma &= \frac{V - N_\gamma}{2} \\ P_e &= \frac{2V - N_e}{2} \end{aligned} \right\} D_d = d(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma = (d-1)P_e + (d-2)P_\gamma - dV + d =$$

$$= (d-1)V - \frac{(d-1)N_e}{2} + \frac{(d-2)V}{2} - \frac{(d-2)N_\gamma}{2} - dV + d =$$

$$= d + \underbrace{\left(\frac{d-4}{2}\right)V}_{\text{O número de vértices só é cancelado em } d=4} - \left(\frac{d-2}{2}\right)N_\gamma - \left(\frac{d-1}{2}\right)N_e$$

O número de vértices só é cancelado em $d = 4$



$d < 4 \Rightarrow$ somente diagramas de ordem baixa (na expansão perturbativa) divergem superficialmente

A QED é uma **Teoria Super-Renormalizável**

$d = 4 \Rightarrow$ há um número finito de amplitudes divergentes, mas há um infinidade de diagramas contribuindo para cada uma destas divergências, já que as divergências ocorrem a todas as ordens na expansão perturbativa

A QED é uma **Teoria Renormalizável**

$d > 4 \Rightarrow$ qualquer amplitude é divergente, já que se formos mais longe na expansão perturbativa (V cresce) encontraremos divergências

A QED é uma **Teoria Não-Renormalizável**

Contagem de Divergências Ultravioleta - Campo Escalar $\lambda\phi^n$

(Peskin 10.1, Ryder 9.1 ~ 9.5)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{n!} \phi^n \quad (\text{EM } d \text{ DIMENSÕES})$$

$n \geq 3$

N = número de linhas externas V = número de vértices
 P = número de propagadores L = número de loops

Assim como antes (eq. 67.1): $L = P - V + 1$

De cada vértice saem n linhas, então 67.2 fica: $V = \frac{N + 2P}{n}$

$$D = dL - 2P =$$

$$= d(P - V + 1) - 2P = d + \left[n \left(\frac{d-2}{2} \right) - d \right] V - \left(\frac{d-2}{2} \right) N$$

(eq. 72.1)

$d > 2$
 Não-Renormalizável $\left\{ \begin{array}{l} > 0 \Leftrightarrow n > \frac{2d}{d-2} \\ = 0 \Leftrightarrow n = \frac{2d}{d-2} \\ < 0 \Leftrightarrow n < \frac{2d}{d-2} \end{array} \right.$

$d \leq 2 \Rightarrow \forall$ Teoria é Super-Renormalizável

$d = 4 \left\{ \begin{array}{l} \lambda \phi^4 \text{ renormalizável} \\ \lambda \phi^6 \text{ não-renormalizável} \end{array} \right.$ <p style="margin-left: 20px;">$\frac{2d}{d-2} = 4$</p>	$d = 3 \left\{ \begin{array}{l} \lambda \phi^4 \text{ super-renormalizável} \\ \lambda \phi^6 \text{ renormalizável} \end{array} \right.$ <p style="margin-left: 20px;">$\frac{2d}{d-2} = 6$</p>
---	---

Outra forma de chegar a 72.1 é analisando a dimensão da lagrangeana. Em unidades naturais a ação tem que ser adimensional:

$$Dim[S] = 0 \dots 0 \quad \text{GeV}^0$$

$$S = \int d^d x \mathcal{L} \Rightarrow \underbrace{Dim[d^d x]}_{\text{GeV}^{-d}} + Dim[\mathcal{L}] = 0$$

$$\therefore Dim[\mathcal{L}] = d$$

Voltando a lagrangeana do campo escalar podemos ver que:

$$\text{Dim}\left[\frac{1}{2}(\partial_\nu \phi)^2\right] = d = 2 \underbrace{\text{Dim}[\partial_\nu \phi]}_{\text{Dim}[\phi] + 1}$$

$$\boxed{\text{Dim}[\phi] = \frac{d-2}{2}} \quad (\text{eq. 73.1})$$

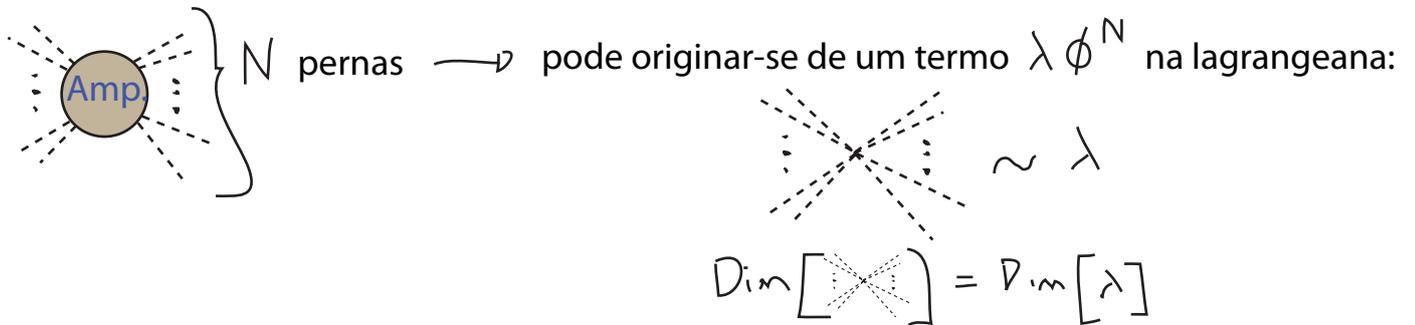
$$\text{Dim}[m^2 \phi^2] = d = 2 \text{Dim}[m] + 2 \underbrace{\text{Dim}[\phi]}_{d-2}$$

$$\text{Dim}[m] = 1 \quad (\text{para nossa sorte! 😊})$$

$$\text{Dim}\left[\frac{\lambda}{n!} \phi^n\right] = d = \text{Dim}[\lambda] + n \text{Dim}[\phi]$$

$$\boxed{\text{Dim}[\lambda] = d - \frac{n(d-2)}{2}} \quad (\text{eq. 73.2})$$

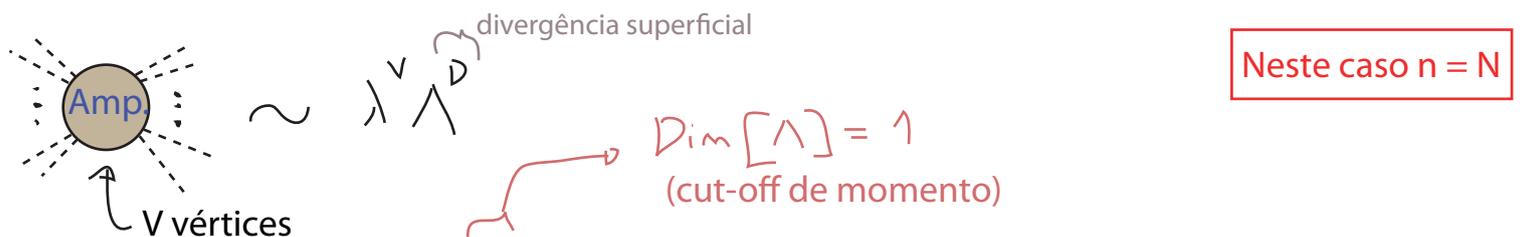
Suponha agora o seguinte diagrama:



Como devo somar sobre todas as possibilidades, qualquer diagrama com N linhas externas terá:

$$\boxed{\text{Dim}\left[\text{diagram with } N \text{ lines}\right] = d - \frac{N(d-2)}{2}} \quad (\text{eq. 73.3})$$

Em uma teoria apenas com o vértice $\lambda \phi^N$ um diagrama com V vértices será proporcional a:



(73.2 & 73.3) $\Rightarrow \text{Dim}[\lambda^V \Lambda^D] = \text{Dim}[\lambda] \Rightarrow V \text{Dim}[\lambda] + D = \text{Dim}[\lambda]$

$$\boxed{V \left(d - \frac{N(d-2)}{2} \right) + D = d - \frac{N(d-2)}{2}} \quad \begin{matrix} (\text{que concorda com 72.1} \\ \text{para } n = N) \\ (\text{eq. 73.4}) \end{matrix}$$

Aqui fica claro que o que multiplica V é $-\text{Dim}[\lambda]$:

$$D = -\text{Dim}[\lambda] V + \text{Dim}[\lambda]$$

podemos então dizer que:

$$\begin{aligned} \text{Dim}[\lambda] > 0 &\Rightarrow \text{Super-Renormalizável} \\ \text{Dim}[\lambda] = 0 &\Rightarrow \text{Renormalizável} \\ \text{Dim}[\lambda] < 0 &\Rightarrow \text{Não-Renormalizável} \end{aligned} \quad (74.1)$$

Esta análise poderia ter sido feita também para a QED ou qualquer outra teoria, com a mesma conclusão.

Teoria Perturbativa Renormalizada

(Peskin 10.2, Ryder 9.3)

Nos preocuparemos agora em achar métodos gerais para redefinir nossa teoria em termos de grandezas observáveis e finitas. Note que no caso das correções radiativas para QED foi possível, uma vez que consideramos todos os diagramas e redefinimos as constantes, ter observáveis finitos. Essencialmente o que fizemos foi a troca:

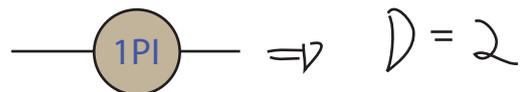
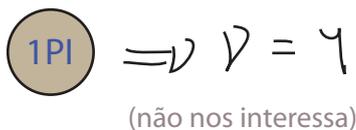


Colocando de forma simples: isto é a renormalização! Daqui para frente o que faremos é encontrar métodos práticos e confiáveis de fazer esta troca (já que até agora fomos fazendo de forma um tanto caso a caso).

Vejamos como fica a teoria $\lambda\phi^4$, analisando

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4$$

Analisemos quais são os diagramas divergentes desta teoria. Como ela é simétrica por $\phi \rightarrow -\phi$ todos os diagramas com um número ímpar de linhas externas dão zero. Segundo a eq. 72.1 (para $d = 4$, quando não importa o número de vértices):



$$\text{Diagram} \Rightarrow D = 0$$

Escrevendo uma série de Taylor (agora em p^2) e estudando a divergência dos coeficientes (como fizemos na pg 69 para QED) obtemos:

$$\text{Diagram} \sim \Lambda^2 + p^2 L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

$$\text{Diagram} \sim L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

São três constantes divergentes que precisamos "absorver" em redefinições. Faremos isso redefinindo a constante de acoplamento, a massa e o campo em si. Lembrando que:

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | \Omega \rangle e^{i p \cdot x} = \frac{i Z}{p^2 - m^2} + (\text{termos sem polo em } m^2)$$

Se quisermos obter um propagador próximo ao polo que seja parecido com o de uma partícula livre (só que com a massa física) devemos remover este Z. É possível fazer isso definindo:

$$\boxed{\phi \equiv Z^{1/2} \phi_r} \rightarrow \phi_r = Z^{-1/2} \phi \quad (\text{eq. 75.1})$$

O resultado desta substituição na dedução das pgs 2 e 3 será o de fazer sumir o fator Z em toda a conta. O mesmo ocorrerá com todos os Z's que aparecem na fórmula de LSZ (eq. 11.1).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z (d_\nu \phi_r)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 Z \phi_r^2 - \frac{\lambda_0}{4!} Z^2 \phi_r^4$$

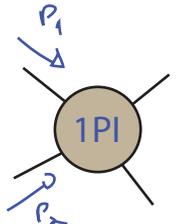
Ainda precisamos nos livrar de m_0 e λ_0 . Para tanto definamos:

$$\delta Z = Z - 1 \quad \delta m = m_0^2 Z - m^2 \quad \delta \lambda = \lambda_0 Z^2 - \lambda$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (d_\nu \phi_r)^2 + \underbrace{\delta Z \frac{1}{2} (d_\nu \phi_r)^2}_{\text{contratermos}} - \frac{m^2}{2} \phi_r^2 - \underbrace{\frac{\delta m}{2} \phi_r^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi_r^4 - \frac{\delta \lambda}{4!} \phi_r^4}_{\text{contratermos}}$$

Importante: note que não somamos estes novos termos, apenas re-escrevemos a lagrangeana em função de novos campos e parâmetros.

Os parâmetros físicos, m e λ . A massa já está bem definida como a localização do menor polo da função de dois pontos. No caso de λ , temos liberdade de escolha. Escolheremos definir:



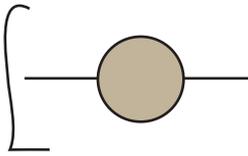
$$p = p_1 + p_2$$

$$\Rightarrow i \Gamma^{(2)}(p^2)$$

$$p^2 = 0 \Rightarrow i \Gamma^{(2)}(p^2) = -i \lambda$$

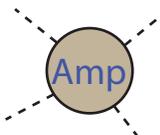
$$\lambda \equiv -\Gamma^{(2)}(p^2 = 0)$$

Essas definições podem ser resumidas em duas equações, chamadas de **condições de renormalização**:



$$\left[\text{Diagram} = \frac{i}{p^2 - m^2} \right]_{p^2 = m^2}$$

esta equação fixa duas grandezas, a posição do polo e o seu resíduo (m e Z).

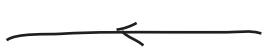


$$= -i \lambda$$

$p^2 = 0 \left\{ \begin{array}{l} s = 4m^2 \\ t = u = 0 \end{array} \right.$

(eq. 76.1)

Esta "nova" lagrangeana tem as seguintes regras de Feynman:



$$= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$


$$= \lambda (p^2 \delta Z - \delta m)$$


$$= -i \lambda$$


$$= -i \delta_\lambda$$

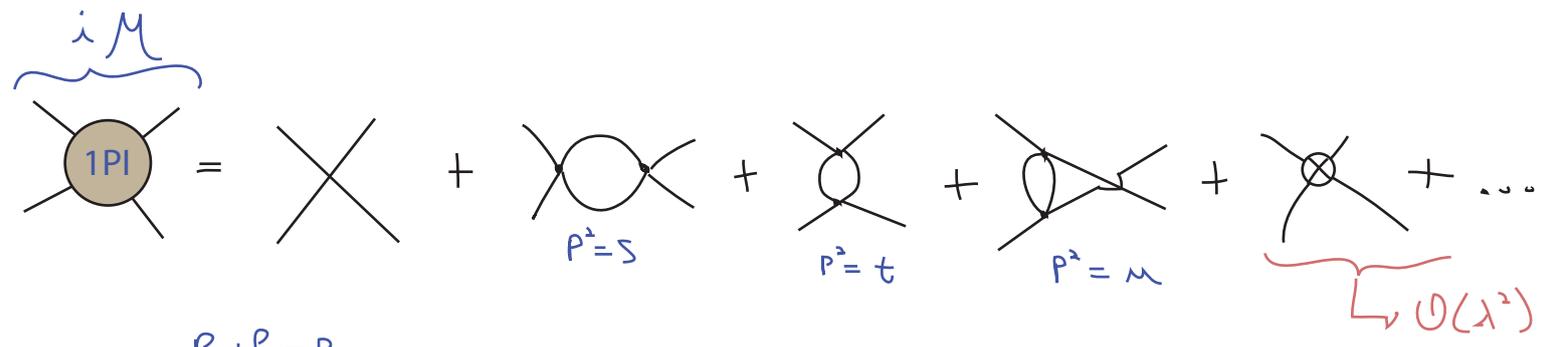
(notem que tratamos os contra termos como novas interações) e a utilização desta lagrangeana com contratermos é chamada de **Teoria de Perturbação Renormalizada**.

O procedimento a seguir é então o seguinte:

- (1) calculamos a amplitude desejada com as regras de Feynman novas
- (2) seguimos o procedimento usual para tratar loops (parametrização de Feynman, regularizações, etc...)
- (3) o resultado vai ser função dos parâmetros nos contratermos (δZ , δm e $\delta \lambda$ no caso escalar)
- (4) usamos as condições de renormalização (eq 76.1) para encontrar os parâmetros

As amplitudes resultantes devem ser finitas e independentes do regulador

Vejamos como ficam as divergências de $\lambda \phi^4$:



$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram with } p_1, p_2 \text{ and } k \text{ on external lines, and } k, k+p \text{ on internal lines} \\
 & = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} = (-i\lambda)^2 i V(P^2)
 \end{aligned}$$

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + (-i\lambda)^2 [iV(s) + iV(t) + iV(\mu)] - i\delta_\lambda \quad (\text{eq. 77.1})$$

condição de normalização (eq. 76.1) $\Rightarrow \left. \begin{matrix} s = 4m^2 \\ t = 0 \end{matrix} \right\} i\mathcal{M} = -i\lambda$

$$\hookrightarrow (-i\lambda)^2 [iV(4m^2) + 2iV(0)] - i\delta_\lambda = 0$$

$$\delta_\lambda = -\lambda^2 [V(4m^2) + 2V(0)] \quad (\text{eq. 77.2})$$

nesta ordem de perturbação

$$\begin{aligned}
 V(s) &= \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2} = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dy \frac{1}{[m^2 - y(1-y)P^2]^{2-d/2}} \right\} = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dy \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \text{Li}[4\pi] - \text{Li}[m^2 - y(1-y)s] \right) \right\} =
 \end{aligned}$$

(eq. 77.3)

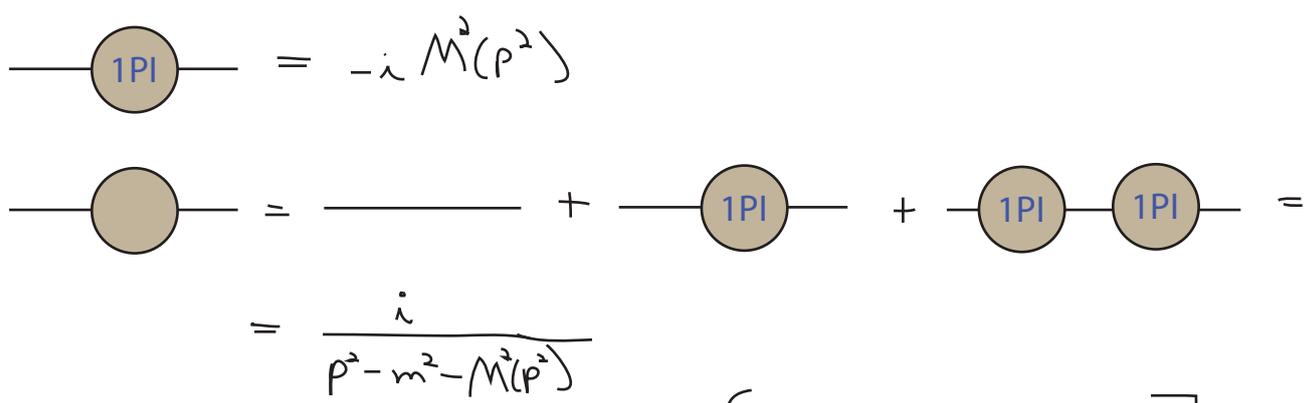
$$\delta_\lambda = \frac{\lambda^2}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dy \left\{ \frac{1}{[m^2 - y(1-y)4m^2]^{2-d/2}} + \frac{2}{[m^2]^{2-d/2}} \right\} =$$

$$= \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left(\frac{6}{\epsilon} - 3\delta + 3L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)4m^2] - 2L_N[m^2] \right)$$

Juntando este resultado ao de 77.1, temos

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= -i\lambda - \frac{i(\lambda)^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left\{ \left(\frac{2}{\epsilon} - \delta + L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)S] \right) + \left(\frac{2}{\epsilon} - \delta + L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)u] \right) \right. \\ &+ \left. \left(\frac{2}{\epsilon} - \delta + L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)t] \right) \right\} - i\frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left(\frac{6}{\epsilon} - 3\delta + 3L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)4m^2] - 2L_N[m^2] \right) \\ &= -i\lambda - \frac{i(\lambda)^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left\{ L_N\left(\frac{m^2 - \gamma(1-\gamma)S}{m^2 - \gamma(1-\gamma)4m^2}\right) + L_N\left(\frac{m^2 - \gamma(1-\gamma)u}{m^2}\right) + L_N\left(\frac{m^2 - \gamma(1-\gamma)t}{m^2}\right) \right\} \end{aligned}$$

δ_z e δ_m vêm da função de dois pontos:



A condição de normalização é (76.1):

$$\left[\text{Diagram with circle} = \frac{i}{p^2 - m^2} \right]_{p^2 \approx m^2}$$

portanto:

$$\boxed{M^2(p^2) \Big|_{p^2=m^2} = 0} \quad (\text{eq. 78.1})$$

e também (expandindo o propagador em torno do polo):

$$p^2 - m^2 - M^2(p^2) = -M^2(p^2) \Big|_{p^2=m^2} + \left(1 - \frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right) (p^2 - m^2) + \mathcal{O}(p^2 - m^2)^2$$

(eq. 78.2)

$$\frac{i}{p^2 - m^2 - M^2(p^2)} = \frac{i \left(1 - \frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right)^{-1}}{p^2 - m^2} = 1 \quad \boxed{\frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} = 0}$$

$$\text{---} \textcircled{1PI} \text{---} = \text{---} + \text{---} \textcircled{D} \text{---} + \underbrace{\text{---} \textcircled{\otimes} \text{---}}_{i(p^2 \delta z - \delta m)} + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{---} \textcircled{D} \text{---} & \sim \lambda^2 \\ &= \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} = \lim_{d \rightarrow 4} \left(-\frac{i\lambda}{2} \right) \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1 - \frac{d}{2}}} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{i\lambda}{2} \right) \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{-\frac{d}{2} m^2}{\epsilon} - m^2 \ln(4\pi) - m^2 \ln\left(\frac{1}{m^2}\right) + m^2 \gamma - m^2 \right] \end{aligned}$$

▶ O mesmo tipo de polo que obtivemos para a divergência logarítmica na pag 59 (!?!?!). O fato é que em regularização dimensional, não é tão fácil ver a divergência quadrática (ou em geral a potência da divergência). Ela aparece como um polo em $d = 2$.

O fato é que $\Gamma(z)$ tem polos em $z = 0, -1, -2, -3, \dots$ mas estes polos são sempre do tipo

$$\Gamma(a \in -b) \simeq \frac{(-1)^{-b}}{a \in b!} + \mathcal{O}(\epsilon^0)$$

$$a \in \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{N}_0$$

(eq. 59.1)

$$\int \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)}$$

$$\hookrightarrow n=1 \Rightarrow \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \rightarrow 1 - \frac{d}{2} \leq 0 \quad d \geq 2$$

$$\int \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q_E^2 + \Delta)} \sim \lambda^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{dois polos em } d \leq 4 \Rightarrow d = (2, 4) \\ \rightarrow \epsilon = 4 - d \Rightarrow \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) \simeq -\frac{2}{\epsilon} + \dots \\ \hookrightarrow \epsilon = 2 - d \Rightarrow \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \simeq \frac{2}{\epsilon} + \dots \end{cases}$$

$$\int \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q_E^2 + \Delta)^2} \sim \lambda^1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{três polos em } d \leq 6 \Rightarrow d = (2, 4, 6) \\ \hookrightarrow \epsilon = 6 - d \Rightarrow \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 2\right) \simeq \frac{1}{\epsilon} \end{cases}$$

$\hookrightarrow n=2 \Rightarrow \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \rightarrow 2 - \frac{d}{2} \leq 0 \quad d \geq 4$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \sim \text{Log} \Lambda \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{apena um polo em } d \leq 4 \\ \epsilon = 4 - d \Rightarrow \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) \sim \frac{2}{\epsilon} + \dots \end{array} \right.$$

$$-i M^2(p^2) = \left(-\frac{i\lambda}{2} \right) \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1 - 1/2}} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m)$$

como esta parte não depende de p^2 , fica fácil satisfazer ambas as condições (78.1 e 78.2)

basta que:

$$\delta_Z = 0 \quad (\text{eq. 80.1})$$

$$\delta_m = -\frac{\lambda}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1 - 1/2}} \quad (\text{eq. 80.2})$$

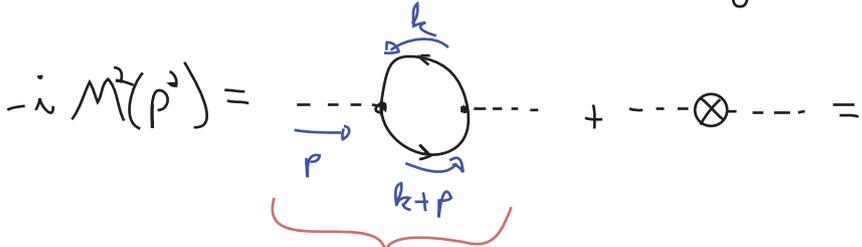
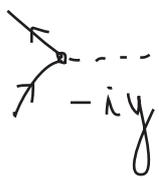
e teremos: $M^2(p^2) = 0 \quad \forall p^2$

(δ_Z não é zero em ordens superiores de perturbação, veremos isso mais adiante)

Note que a correção para a massa do escalar é quadraticamente divergente!

Esse cancelamento de δ_Z em L.O. é uma peculiaridade de $\lambda\phi^4$, outras teorias escalares não terão esta propriedade. Tomemos, por exemplo, uma teoria escalar com acoplamentos de Yukawa:

$$\mathcal{L}_Y = -\gamma \bar{\psi} \psi \phi$$



$$\Delta = m_\phi^2 - \kappa(1-\kappa) p^2$$

$$-i M^2(p^2) = -\gamma \gamma^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2 - \kappa(1-\kappa)p^2 + m^2}{(\ell^2 + \kappa(1-\kappa)p^2 - m_\phi^2)^2} = \frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx (d-1) \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{\Delta^{1 - 1/2}}$$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{\ell_E^2} \sim \int d\ell_E \frac{\ell_E^3}{\ell_E^2} \sim \Lambda^2$$

$$M^{\lambda}(p^2) = \frac{-4g^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx (d-1) \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Delta^{1-d/2}} - (p^2 \delta Z - \delta m)$$

$$\frac{d}{dp^2} M^{\lambda}(p^2) = -\frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left[\underbrace{-x(1-x)}_{-\Gamma(2-d/2)} \left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma(1-d/2) (m_p^2 - x(1-x)p^2)^{d/2-2} \right] - \delta Z$$

$$\left. \frac{d}{dp^2} M^{\lambda}(p^2) \right|_{p^2=m^2} = 0 \Rightarrow \delta Z = -\frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{x(1-x) \Gamma(2-d/2)}{(m_p^2 - x(1-x)m^2)^{2-d/2}} \quad (\text{eq. 81.1})$$

→ ~ L_N(Λ²)

$$M^{\lambda}(m^2) = \frac{-4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1-d/2)}{(m_p^2 - x(1-x)m^2)^{1-d/2}} - (m^2 \delta Z - \delta m)$$

$$M^{\lambda}(m^2) = 0 \Rightarrow \delta m = \frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1-d/2)}{(m_p^2 - x(1-x)m^2)^{1-d/2}} + m^2 \delta Z \quad (\text{eq. 81.2})$$

→ Λ²

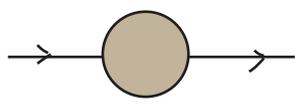
Renormalização da QED

(Peskin 10.3, Ryder 9.5 a 9.7)

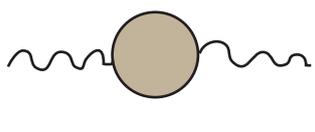
Tentemos agora repetir o processo acima para a QED

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi} (i\not{\partial} - m_0) \Psi - e_0 \bar{\Psi} \not{A} \Psi$$

Vimos que a partir desta lagrangeana obtemos:



$$= \frac{i Z_2}{\not{p} - m} + \dots \quad (\text{pg 5})$$



$$= \frac{-i Z_3 g_{\mu\nu}}{q^2} + \dots \quad (\text{pg 55})$$

Começamos então com a renormalização dos campos:

$$\Psi \equiv Z_2^{1/2} \Psi_R \quad (\text{eq. 82.1})$$

$$A^\mu \equiv Z_3^{1/2} A_{R\mu} \quad (\text{eq. 82.2})$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 (F_{\mu\nu})^2 + Z_2 \bar{\Psi}_R (i\not{\partial} - m_0) \Psi_R - e_0 Z_2 Z_3^{1/2} \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu}$$

A primeira condição de renormalização é a que define a carga física:

$$(e_0 Z_2 Z_3^{1/2} = e Z_1)_{q=0} \quad (\text{eq. 82.3})$$

isto é equivalente a definição de Z_1 que usamos na eq 51.1 já que este é o fator que aparece no vértice (multiplicando a carga) quando $q = 0$. Ademais lembre que:

$$(\text{pg 55}) \Rightarrow Z_3^{1/2} e_0 = e$$

$$(\text{pg 52}) \Rightarrow Z_2 = Z_1$$

de forma que as definições dos Z 's que já vínhamos usando se mantêm.

Fazendo então as definições adicionais:

$$\begin{cases} \delta_3 = Z_3 - 1 \\ \delta_2 = Z_2 - 1 \\ \delta_m = Z_2 m_0 - m \\ \delta_1 = Z_1 - 1 = \frac{e_0}{e} Z_2 Z_3^{1/2} - 1 \end{cases}$$

(eq. 82.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} \underbrace{Z_3}_{1+\delta_3} (F_{\mu\nu})^2 + \underbrace{Z_2}_{1+\delta_2} \bar{\Psi}_R (i\not{\partial} - \underbrace{m_0}_{Z_2 m_0 = m + \delta_m}) \Psi_R - \underbrace{e_0 Z_2 Z_3^{1/2}}_{e Z_1 = e(1+\delta_1)} \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu} = \\ &= -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi}_R (i\not{\partial} - m) \Psi_R - e \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu} + \\ &\quad -\frac{1}{4} \delta_3 (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi}_R (i\delta_2 \not{\partial} - \delta_m) \Psi_R - \delta_1 e \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu} \end{aligned}$$

cujas regras de Feynman são:

$$\begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \xrightarrow{q} \end{array} = \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{solid line} \\ \xrightarrow{q} \end{array} = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$$

$$\text{Diagrama de vértice} = -ie\gamma^\mu$$

$$\text{Diagrama de linha com nó} = i(\not{p}\delta_2 - \delta_1 m)$$

$$\text{Diagrama de loop} = -i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\delta_3$$

$$\text{Diagrama de vértice com loop} = -ie\gamma^\mu\delta_4$$

$$\int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} A_\mu (-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu \right]$$

As condições que fixam as normalizações dos propagadores e definem a carga e a massa do férmion podem ser escritas usando as definições que fizemos anteriormente:

$$\text{Diagrama de loop com 1PI} = i\Pi^{\mu\nu}(q) = i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2)$$

$$\text{Diagrama de linha com 1PI} = -i\Sigma(\not{p})$$

$$\text{Diagrama de vértice com Amp} = -ie\Gamma^\mu(p,p)$$

Só que agora estou REDEFININDO estas grandezas, todas incluem agora as contribuições que vem dos contratermos
 A definição de Γ agora é feita com a carga física

Como discutido na página 71, temos quatro grandezas divergentes na QED, isto levou aos quatro δ 's nos contratermos, as quatro condições que usamos para obtê-los são:

(eq. 83.1) $\Sigma(\not{p}=m) = 0$ (a)

$$\Pi(q^2=0) = 0$$
 (b)

$$\frac{d}{d\not{p}} \Sigma(\not{p}) \Big|_{\not{p}=m} = 0$$
 (c)

$$-ie\Gamma^\mu(p'-p=0) = -ie\gamma^\mu$$
 (d)

Vejamos a aplicação destas condições e o valor dos contratermos em um loop. Já obtivemos a expressão para a auto-energia do elétron usando regularização de Pauli-Villars (eq. 45.1), se tivéssemos feito regularização dimensional, chegaríamos a:

antes da inclusão dos contratermos

$$-i \sum_2^* (\rho) = -i \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\rho^2]^{2-d/2}} \times$$

$$\times [dm - (d-2)x\rho]$$

Levando em conta a contribuição do contratermo ($\rightarrow \otimes \rightarrow$) e usando a condição 83.1(a), temos:

$$(m \delta_2 - \delta m) = \frac{e^2 m}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2}) (d - (d-2)x)}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)m^2]^{2-d/2}} =$$

$$= \frac{e^2 m}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2}) [(1-x)d + 2x]}{[(1-x)m^2 + x\mu^2]^{2-d/2}} \quad (\text{eq. 84.1})$$

Para utilizar a condição 83.1(c) precisamos calcular:

$$\frac{d}{d\rho} \sum_2^* (\rho) = \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\rho^2]^{2-d/2}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{-2x(1-x)\rho \left(\frac{d}{2} - 2\right)}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\rho^2]} [dm - (d-2)x\rho] - (d-2)x \right\}$$

$\epsilon = d - 4$

$$\frac{d}{d\rho} \sum_2^* (\rho) \Big|_{\rho=m} = \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{4-\epsilon}{2}}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]^{2-d/2}} \left\{ - (2-\epsilon)x + \right.$$

$$\left. + \frac{\epsilon}{2} \frac{2x(1-x)m}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]} m [4 - 2x + \epsilon(x-1)] \right\}$$

* a divergência vem toda desta parte, todo o resto é proporcional a ϵ e dá uma contribuição finita quando multiplicado por $1/\epsilon$ que vem da função Γ .

Levando em conta a contribuição do contratermo $(\rightarrow \otimes \rightarrow)$ e usando a condição 83.1(c), temos:

$$\delta_2 = \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{d-4}{2}}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]^{2-\frac{d}{2}}} \left\{ (2-\epsilon)x - \epsilon \frac{x(1-x)m^2}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]} \left[4 - 2x + \epsilon(x-1) \right] \right\} \quad (\text{eq. 85.1})$$

Incluindo $(\nu \rightsquigarrow \otimes \nu)$ na contribuição à auto-energia do fóton que calculamos em 60.2 e usando 83.1(b) temos:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = (q^\mu q^\nu - q^\nu q^\mu) i\Pi_2^*(q^2) - i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\delta_3 = i(q^\mu q^\nu - q^\nu q^\mu)(\Pi_2^* - \delta_3)$$

antes da inclusão dos contratermos

$$\Pi_2(q^2) = \Pi_2^*(q^2) - \delta_3 \xrightarrow{83.1(b)} \delta_3 = \Pi_2^*(0) \quad 60.2$$

$$\delta_3 = -\frac{8e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx \left[x(1-x) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{[m^2]^{2-\frac{d}{2}}} \right] \quad (\text{eq. 85.2})$$

Para o vértice da QED, temos agora:

$$-ie\Gamma^\mu = -ie\Gamma^{*\mu} - ie\gamma^\mu\delta_1$$

antes da inclusão dos contratermos (mas sem Z₂ na LSZ!)

A condição 83.1(d) nos dá: $(1 - \delta_1)\Gamma^\mu = \Gamma^{*\mu} (p' = p = 0)$ (pg 27)

$$\delta_1 = -\delta F_1(0) \quad \rightarrow \quad F_1 = 1 + \delta F_1(0)$$

$\gamma^\mu F_1(0) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu F_2(q^2)}{2m} \xrightarrow{q=0} 0$

Como estamos fazendo tudo em regularização dimensional, precisamos escrever o resultado obtido em 36.2 nesse método, obtemos:

$$\delta F_1(q^2) = \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \frac{(2-\epsilon)^2}{2} + \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Delta^{3-\frac{d}{2}}} \left[q^2 [2(1-x)(1-y) - \epsilon xy] + m^2 [2(1-y+z)^2 - \epsilon(1-z)^2] \right] \right\}$$

Onde: $\Delta = (1 - \gamma^2)m^2 + z\nu^2 - \kappa\gamma q^2$

$$\delta_1 = -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{[(1-\gamma^2)m^2 + z\nu^2]^{2-d/2}} \frac{(2-\epsilon)^2}{2} \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{[(1-\gamma^2)m^2 + z\nu^2]^{3-d/2}} m^2 [2(1-\gamma+z^2) - \epsilon(1-z)^2] \right\} \\ \int dz (1-z)$$

(eq. 86.1)

As equações 84.1, 85.1, 85.2 e 86.1 fixam todos os coeficientes dos contratermos em ordem α .

É possível mostrar (via integração por partes) que $\delta_1 = \delta_2$ e que, portanto, $z_1 = z_2$ (em ordem α). Podemos provar que isto continua valendo para qualquer ordem α (o que não faremos aqui). Como um comentário final note o que aconteceria se pensarmos não apenas no elétron, mas também no muon, interagindo via QED. A equação 82.3 nos diz que:

elétron - $e = e_0 \frac{z_2 z_3^{1/2}}{z_1}$

muon - $e' = e_0 \frac{z_2' z_3'^{1/2}}{z_1'}$

auto-energia do muon e correção do vértice, ambas dependem da massa do muon

Corremos o risco do muon sentir uma carga física diferente da do elétron, mesmo que comecemos com a mesma carga nua. No entanto como $Z_1 = Z_2$ eles se cancelam, e temos:

$$e = e' = e_0 z_3^{1/2}$$

As identidades de WT (ou seja, a simetria de Gauge) garantem que a correção à carga venham somente do fóton, independente de qual partícula esta interagindo. Isto garante que o acoplamento de gauge da teoria continue universal, e que todas as partículas sintam o mesmo "running" deste acoplamento.

Renormalização em ordem superior

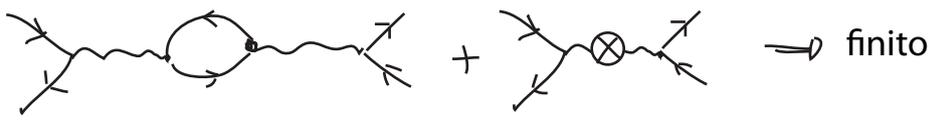
(Peskin 10.4, Ryder 9.7)

Vejamos agora as sutilezas que aparecem quando consideramos diagramas com mais de um loop. Vimos que a divergência superficial de um diagrama pode nos enganar quando ele contém subdiagramas divergentes. No caso em que o diagrama que queremos calcular é convergente caso remo-

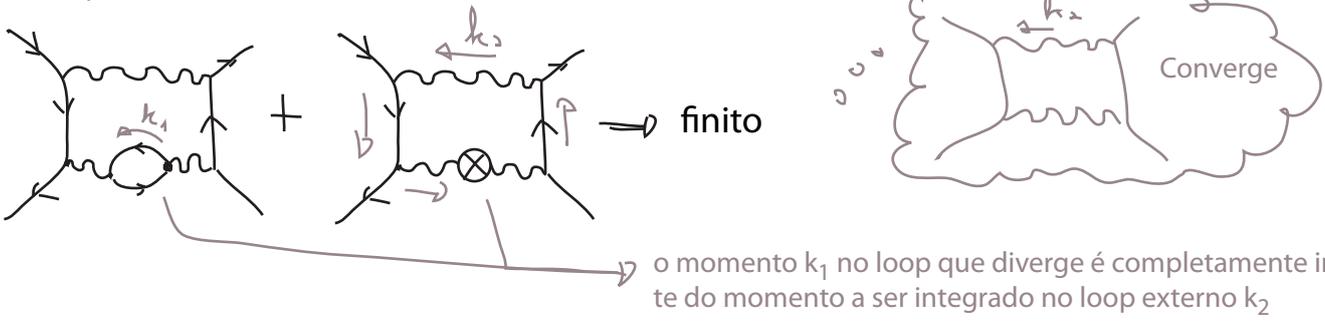
vamos o sub-diagrama divergente, fica relativamente simples:



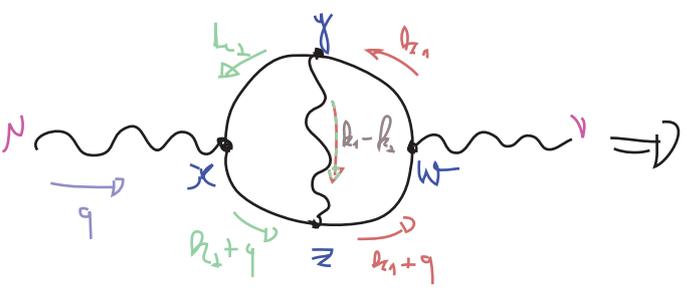
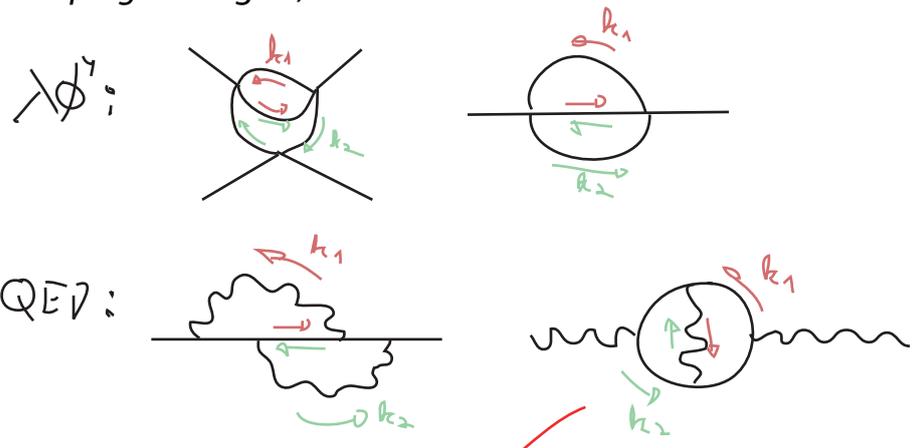
neste caso a divergência é cancelada pelo mesmo contratermo que cancelou a divergência do sub-diagrama:



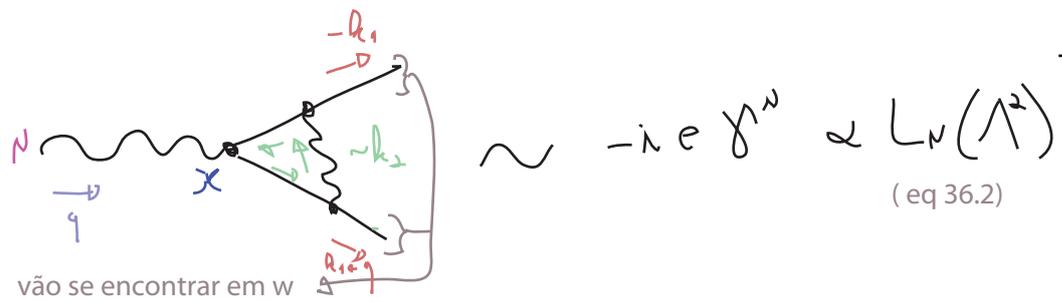
O mesmo vale para diagramas mais complicados. No exemplo abaixo basta somar os dois diagramas para cancelar a divergência na auto energia do fóton antes de fazer a integral no loop mais externo (que é finita)



A situação começa a ficar complicada quando temos diagramas em que dois loops divergentes compartilham um mesmo propagador, chamamos isto de **divergências sobrepostas** (*nested* ou *overlapping* em inglês)



Pensemos primeiro na região em que k_2 é grande. Neste caso x, y e z tem que estar próximos (tanto o fóton quanto os eletrons no loop são muito virtuais) mas w pode ser mais distante. Podemos pensar nisso como uma correção de um fóton ao vértice em x :



Se voltamos com este vértice no diagrama completo antes de integrar em k_1 , obteremos:

$$\text{Diagram} \sim \alpha (g^{\mu\nu} q^2 - g^{\nu\mu} q^2) \Pi_2(q^2) \cdot \alpha L_N(\Lambda^2)$$

(pg 60)

$$\Pi_2(q^2) \sim \int_0^1 dx \, x(1-x) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \Delta^{\frac{d}{2}-2} \sim L_N(\Lambda^2) + L_N(\Delta) + \dots$$

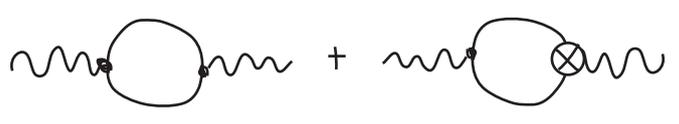
$m^2 - x(1-x)q^2$

$$\text{Diagram} \sim \alpha^2 (L_N(\Lambda^2) + \frac{L_N(q^2)}{m^2}) L_N(\Lambda^2)$$

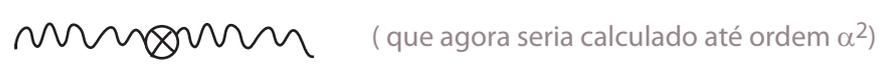
domina quando k_1 ou k_2 é pequeno
domina quando k_1 também é grande

Estes termos proporcionais a $L_N(q^2) L_N(\Lambda^2)$ vão contra nossa expectativa de que as divergências aparecem multiplicando simples polinômios em q^2 (pense no que fizemos na pag 70). Chamamos as divergências que de fato multiplicam polinômios em q^2 de **divergências locais**, essas divergências que não multiplicam polinômios são chamadas de **divergências não locais**.
 pois no espaço das posições são funções delta (ou derivadas da delta)

A aproximação acima indica que, na região em que um dos momentos é pequeno e o outro grande, o que temos é uma divergência local dentro de um loop não divergente. Isso sugere que os diagramas necessários para corrigir a divergência são:



De fato, se fizéssemos a conta veríamos que estes cancelam a divergência não local. Uma vez somados, resta apenas uma divergência local que é cancelada como de costume, pelo diagrama



É possível mostrar que isso funciona a todas as ordens de perturbação, contanto que a teoria seja renormalizável pelo critério da divergência superficial. Isto quer dizer que uma vez que colocemos os contratermos necessários para cancelar as divergências locais, todas as divergências (locais ou não) são removidas a todas as ordens - este resultado é conhecido como teorema BPHZ (Bogoliubov - Parasiuk - Hepp - Zimmermann)

O Grupo de Renormalização

(Peskin 8 & 12.1, Ryder 9.4)

Vimos que, fazendo a renormalização de uma teoria, podemos obter resultados que independem da dinâmica no ultravioleta. As divergências somem e conseguimos uma teoria que funciona. No entanto é um tanto misterioso como as excitações de maior energia da teoria podem ter tão pouco efeito. Vamos então tentar ter uma imagem mais clara de como isso pode ocorrer.

Começemos pensando no funcional gerador de $\lambda\phi^4$

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int [\mathcal{L} + J\phi]} = \left(\prod_k \int d\phi(k) \right) e^{i \int [\mathcal{L} + J\phi]}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{V} \sum_k e^{-i k \cdot x} \phi(k)$$

unitária

$$\mathcal{D}\phi(x) = \prod_k d\phi(k)$$

fazer uma regularização por cut-off significa integrar somente sobre: $\phi(k) / |k| \leq \Lambda$
 $k > \Lambda \rightarrow \phi(k) = 0$

pensando desta forma podemos estudar especificamente o efeito dos momentos da ordem do cut-off: basta integrar só sobre eles. Para evitar valores de k que, apesar de pequenos, tem valores enormes de k_0 e \vec{k} , trabalharemos no espaço Euclideano.

$$|k_E| \leq \Lambda$$

Além disso, a teoria de campo no espaço Euclideano nos leva para perto de sistemas atômicos, onde podemos ter mais intuição do que significa o cut-off ultravioleta e a renormalização. Um bom exemplo de um sistema de mecânica estatística que é bem descrito por um campo escalar é um ferromagneto na teoria de Landau. A energia livre de Gibbs deste sistema é:

$$G = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\nabla s)^2 + b(T - T_c) s^2 + c s^4 - H s \right]$$

E a densidade de spin $s(x)$ faz o papel do campo escalar, ao passo que o campo externo H é a fonte. Nesse caso é bastante óbvio que existe um cut-off físico, não faz sentido falar em flutuações da densidade de spin em distâncias menores que o espaçamento entre os átomos que compõe o material.

Pensemos um pouco sobre este sistema em termos de temperatura: se estamos longe de qualquer ponto crítico, é de se esperar que hajam flutuações de spin na escala atômica. No entanto assim que nos afastamos para escalas maiores, da ordem de algumas dezenas de distâncias atômicas, o sistema já deve parecer uniforme e nenhuma flutuação é visível. Podemos descrever este comportamento usando teoria de campos. Mas primeiro vamos lembrar um pouco da física por trás do problema

Estamos imaginando, por simplicidade, que se trata de um material com um eixo preferencial de magnetização

$T \sim 0$
 $H = 0$ } \rightarrow Magnetização M paralela ou antiparalela a este eixo

$$M = \int d^3x S(x)$$

tanto o campo como os spins são definidos na direção deste eixo

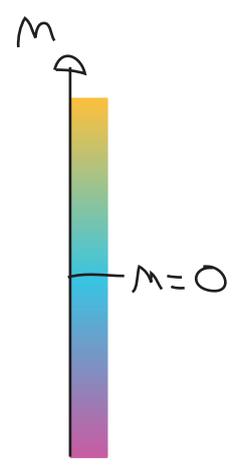
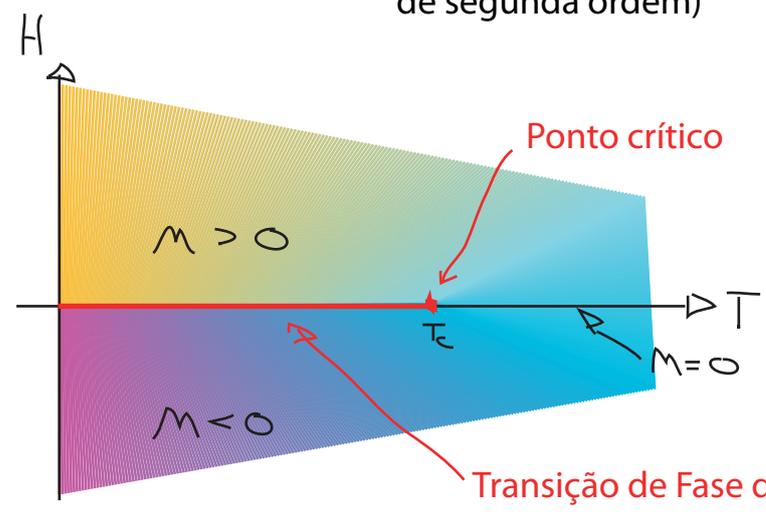
$T \sim 0$
 $H \neq 0$ } \rightarrow Favorece M paralelo ou antiparalelo

Mudança de H pequeno e negativo para pequeno e positivo } \rightarrow Mudança descontínua em M
 $T \sim 0$ } **Transição de fase de primeira ordem**

$T_c > T > 0 \rightarrow$ Spins cada vez mais desordenados $|M|$ vai diminuindo

$T = T_c$
 $H = 0$ } $\rightarrow M = 0$

\hookrightarrow Valores grandes de H ainda induzem magnetização, mas a descontinuidade perto de $H = 0$ desaparece. Este é o ponto crítico (ou transição de fase de segunda ordem)



Ao longo da linha da transição de fase os dois estados ($M > 0$ e $M < 0$) coexistem em equilíbrio. A energia livre de Gibbs só depende de M e T e é dada por:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial M} \right|_T = H$$

Perto do ponto crítico M é pequeno e podemos expandir $G(M)$ como:

$$G(M) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4$$

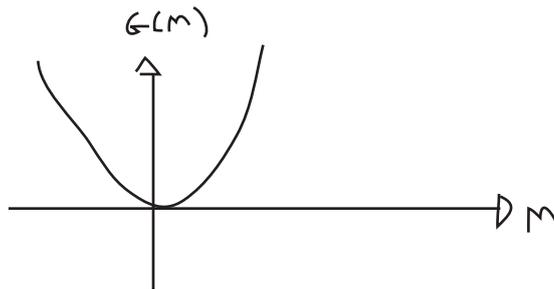
o sistema é simétrico por mudança no sinal de M , então $G(M)$ tem que ser par

Para encontrar o estado do sistema em $H = 0$, devemos minimizar G :

$$H=0 \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial M} = 2B(T)M + 4C(T)M^3 = 0$$

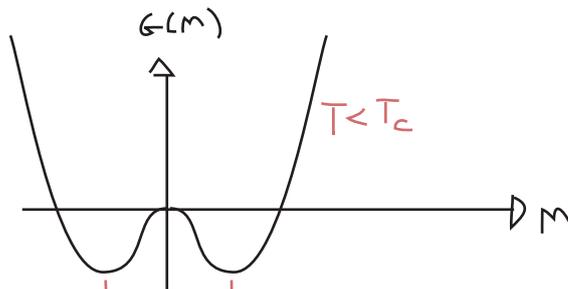
Resta fixar B e C , suponha que:

$$B, C > 0 \Rightarrow M = 0$$



No entanto se B puder ser negativo (digamos, abaixo de uma dada temperatura) então temos uma solução menos trivial:

$$\left. \begin{array}{l} C > 0 \\ B(T < T_c) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$



dois mínimos com magnetizações opostas

Fica claro que podemos modelar o sistema definindo:

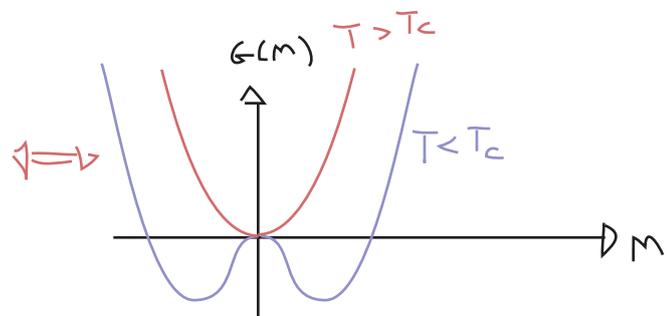
$$B(T) = b_5 (T - T_c) \quad C(T) = c \quad b_5, c > 0$$

Neste caso temos:

$$M = \begin{cases} 0 \\ \pm \left[\frac{b_5}{2c} (T_c - T) \right]^{1/2} \end{cases}$$

$$T > T_c$$

$$T < T_c$$



Para obter o comportamento para H não nulo precisamos resolver

$$\frac{\partial G}{\partial M} \Big|_T = H \quad G = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4$$

ou podemos minimizar (em relação a M): $G(M, H) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4 - HM$

Só temos o duplo mínimo para $H = 0$ e $T < T_c$. Substituindo a definição de M , e as expressões para $B(T)$ e $C(T)$ na energia de Gibbs, obtemos a expressão que comparamos com o campo escalar:

$$G = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\nabla s)^2 + b(T - T_c) s^2 + c s^4 - H s \right] \quad H = H(x)$$

este termo adicional inclui a física microscópica, é o jeito mais simples de introduzir a tendência dos spins de se alinhar

Suponha que: $H(x) = H_0 \delta^{(3)}(x)$ } Vamos ver qual é a resposta em pontos longe de x . Procurando o mínimo de G em relação a configurações do campo s obtemos:

$$0 = \delta G[S(x)] = -\nabla^2 s + 2b(T - T_c) s + 4c s^3 - H$$

$$T > T_c \Rightarrow \chi \neq 0, M \sim 0 \Rightarrow s < 1, s^3 \sim 0 \Rightarrow (-\nabla^2 + 2b(T - T_c)) s(x) = H(x)$$

$$H(x) = H_0 \delta^{(3)}(x) \Rightarrow (-\nabla^2 + 2b(T - T_c)) D(x) = H_0 \delta^{(3)}(x)$$

Função de Green!

Configuração do campo $s(x)$ que surge quando o spin em $x = 0$ é forçado a se alinhar com H

$$D(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{H_0 e^{ikx}}{|k|^2 + 2b(T - T_c)} = \frac{H_0}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-r/\xi} = \langle S(x) S(0) \rangle$$

$\sum_{S(x)} S(x) S(0) e^{-\frac{H}{kT}}$

comprimento de correlação $\rightarrow \xi = [2b(T - T_c)]^{-1/2}$

É importante perceber que, apesar do resultado depender dos coeficientes b e c , que são dados pela física no UV (física atômica), a lei de potência em $(T - T_c)$ só depende de podermos expandir G em série, e da simetria que o torna par. De fato, obteríamos o mesmo resultado para qualquer sistema com esta simetria (existem vários exemplos). O fato de que podemos usar teoria de campos para descrever certas propriedades de sistemas de mecânica estatística perto do ponto crítico **independentemente de detalhes na escala atômica** (a chamada **universalidade**) está intimamente ligado ao fato de podermos construir TQCs **independentes de cut-off**.

Note que o valor de $s(x)$ estará ligado ao valor em $x=0$ dependendo de quão longe ele está de $x=0$. A escala de "longe" é dada por ξ , note que este diverge quando chegamos perto da temperatura crítica - o sistema fica fortemente correlacionado. Voltando para nossa analogia com teoria quântica de campos, estamos falando de uma partícula escalar que carregaria a informação da existência da fonte em $x=0$, e que a "massa" desta partícula (ξ^{-1}) é da ordem de $[b(T-T_c)]^{-1/2}$. Se estivermos longe da temperatura crítica $|T| \gg |T_c|$, então o único parâmetro que determina a massa é $B(T)$, que vem da **escala ultravioleta da teoria**. O tamanho de m é então fixado pela única escala natural do sistema, portanto esperamos que $m \sim \Lambda$ (que no exemplo seria o inverso do típico tamanho atômico).

No cálculos que fizemos até agora, estávamos interessados justamente no caso em que $m \ll \Lambda$, e ajustamos os parâmetros da teoria para obter esta situação. Com isso em mente, vamos ver como fica a separação de escalas na integral de trajetória.

$$Z = \int [D\phi]_{\Lambda} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\Delta_0}{4!} \phi^4 \right] \right\} \quad (\text{eq. 93.1})$$

$$[D\phi]_{\Lambda} \equiv \prod_{|k| < \Lambda} d\phi(k)$$

$$\phi(k) \begin{cases} \hat{\phi}(k) = \begin{cases} \phi(k) & |k| \leq \Lambda \\ 0 & |k| < \Lambda \text{ ou } |k| \geq \Lambda \end{cases} \\ \phi(k) = \begin{cases} \phi(k) & |k| < \Lambda \\ 0 & |k| \geq \Lambda \end{cases} \end{cases} \quad \Lambda < 1$$

$$\phi(k) \rightarrow \phi(k) + \hat{\phi}(k)$$

$$Z = \int D\phi \int D\hat{\phi} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi + \partial_\mu \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_0^2 (\phi + \hat{\phi})^2 + \frac{\Delta_0}{4!} (\phi + \hat{\phi})^4 \right] \right\} =$$

Todos os termos do tipo $\phi(k_1) \hat{\phi}(k_2)$ são iguais a zero (ortogonalidade para $k \neq k'$)

$$= \int D\phi e^{-\int \mathcal{L}(\phi)} \int D\hat{\phi} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \hat{\phi}^2 + \lambda \left(\frac{1}{6} \phi^3 \hat{\phi} + \frac{1}{4} \phi^2 \hat{\phi}^2 + \frac{1}{6} \phi \hat{\phi}^3 + \frac{1}{4!} \hat{\phi}^4 \right) \right] \right\}$$

Queremos então integrar em $\hat{\phi}$, se tratarmos todos os termos (com exceção do cinético) como interações (incluindo o termo de massa), podemos escrevê-los como derivadas agindo em $\text{Exp}[-\int \mathcal{L}_0(\hat{\phi})]$

Onde:

$$\int \mathcal{L}_0 = \int d^d x \partial_\nu \hat{\phi}(x) \partial^\nu \hat{\phi}(x) = \int_{k-\Lambda \leq |k| < \Lambda} d^d k \int_{k-\Lambda \leq |k'| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} e^{-i k x} e^{-i k' x} i k_\nu i k'_\nu \hat{\phi}(k) \hat{\phi}(k') =$$

$$= \int_{k-\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k^2 \underbrace{\hat{\phi}(-k)}_{\hat{\phi}^*(k)} \hat{\phi}(k)$$

condição para que $\phi(x)$ seja real, ver Peskin pg 285

Isso nos leva a um propagador (no espaço dos momentos):

$$\hat{\phi}(k) \hat{\phi}(p) = \frac{\int \mathcal{D}\hat{\phi} \hat{\phi}(k) \hat{\phi}(p) e^{-\int \mathcal{L}_0}}{\int \mathcal{D}\hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_0}} = \frac{1}{k^2} (2\pi)^d \delta(k+p) \Theta(k)$$

$\Theta(k) = \begin{cases} 1 & k-\Lambda \leq |k| < \Lambda \\ 0 & \text{quer outro } k \end{cases}$

Os outros termos da lagrangeana de $\hat{\phi}$ são tratados como interações em teoria de perturbação. Tomemos como exemplo o termo $\hat{\phi}^2$:

$$\text{Exp} \left\{ - \int d^d x \lambda_0 \left(+ \frac{1}{4} \hat{\phi}^2 \right) \right\} \simeq - \int d^d x \frac{\lambda_0}{4} \hat{\phi}^2 \hat{\phi} \hat{\phi}$$

Em princípio poderíamos calcular funções de dois pontos com quaisquer combinações de ϕ e $\hat{\phi}$:

$$\langle \phi \phi e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \langle \hat{\phi} \hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \langle \phi \hat{\phi} \phi \hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \dots$$

Mas se considerarmos que momentos próximos ao cut-off só aparecerão em integrais de loop e nunca nas linhas externas dos diagramas, então os campos $\hat{\phi}$ só aparecem em loops. Em termos do teorema de Wick temos:

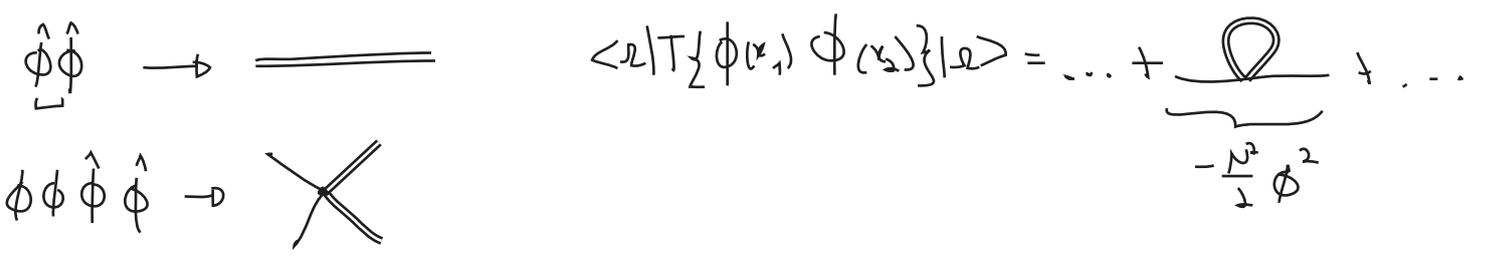
$$\left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[- \int \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \hat{\phi} \hat{\phi} \right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[- \int \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \underbrace{\hat{\phi} \hat{\phi}} \right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[- \int \frac{\lambda_0}{2} \phi^2 \right] \right\rangle$$

↙ operador com n campos ϕ ↘ estamos assumindo que os campos externos serão ϕ e não $\hat{\phi}$

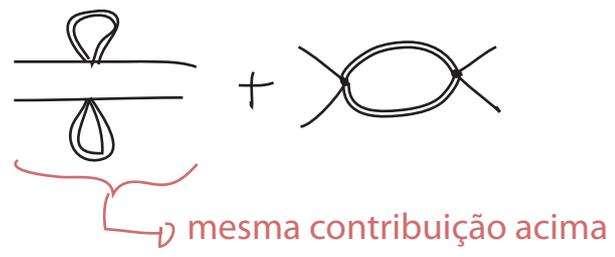
$$N = \frac{\lambda_0}{2} \int_{b\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} = \frac{\lambda_0}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{1 - b^{d-2}}{d-2} \Lambda^{d-2}$$

O importante a ser notado aqui é que este termo também seria obtido de um termo $-\frac{N}{2} \phi^2$ na lagrangeana

Para ver o que ocorre em ordens superiores, é útil definir diagramas:



Em ordem λ_0^2 temos, para a função de 4 pontos:



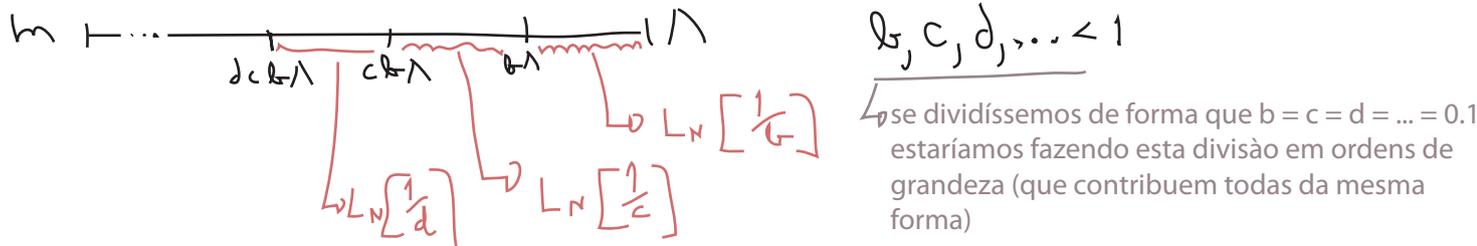
assumindo que o momento das pernas externas é muito pequeno comparado com $b\Lambda$, podemos ignorá-los e obter

$$L_0 = -\frac{1}{4!} \int d^d x \zeta \phi^4 \quad \text{equivale a} \quad \text{X diagram} \quad -i\zeta$$

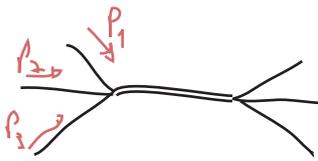
$$\zeta \equiv -4! \frac{2}{2!} \left(\frac{\lambda_0}{4}\right)^2 \int_{b\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{k^2}\right)^2 = \frac{-3\lambda_0^2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{(1 - b^{d-4})}{d-4} \Lambda^{d-4}$$

$$\stackrel{d \rightarrow 4}{=} -\frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} L_N \left[\frac{1}{b} \right] \quad \text{(eq. 95.1)}$$

Note que se fizessemos mais subdivisões (multiplicativamente), cada intervalo teria uma contribuição similar:

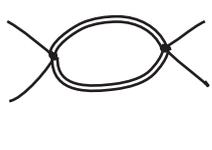


Este procedimento gera contribuições não só a ϕ^2 e ϕ^4 , mas também a ordens superiores. O termo $\phi^3 \hat{\phi}$ por exemplo:



$$\sim \frac{\lambda_0^2}{(p_1 + p_2 + p_3)^2} \oplus (p_1 + p_2 + p_3)$$

Obtemos acoplamentos com derivadas também. Para o diagrama abaixo por exemplo, desprezamos o momento das linhas externas. Se ao invés disso fizermos uma expansão para o momento externo pequeno, o próximo termo seria:



$$= -\frac{1}{4!} \int d^d x \zeta \phi^4 - \frac{1}{4} \int d^d x \eta \phi^2 (\partial_\mu \phi)^2 + \dots$$

De forma geral obteremos todas as interações possíveis (de potências arbitrariamente altas) entre o campo ϕ e suas derivadas. Temos diversas contribuições desconectadas que acabam sendo eliminadas pela normalização de qualquer correlator, então podemos finalmente escrever

$$Z = \frac{1}{N} \int \left[\mathcal{D}\phi \right] e^{-\int d^d x \mathcal{L}_{EFF}}$$

$$\mathcal{L}_{EFF} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi^4 + \left(\text{contribuições conectadas de } \hat{\phi} \right) \quad (\text{eq. 96.1})$$

Este processo de excluir um campo das linhas externas da teoria fazendo seu momento (ou massa) muito grande comparado com as outras é chamado de "integrate out" o campo (não conheço uma tradução para o português melhor do que "integrar" o campo). Façamos então uma comparação entre a lagrangiana original e a que obtivemos após a integração

$$k' = \frac{k}{\Lambda} \quad \kappa' = \kappa \Lambda$$

$$0 < k < \Lambda \rightarrow 0 < |k'| < 1$$

$$\int d^d x \mathcal{L}_{EFF} = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (1 + \Delta z) (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m_0^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4!} (\lambda_0 + \Delta \lambda) \phi^4 + \Delta C (\partial_\mu \phi)^4 + \Delta D \phi^6 + \dots \right]$$

contribuições da "out-integration" de $\hat{\phi}$

$$= \int d^d x' \Lambda^{-d} \left[\frac{1}{2} (1 + \Delta z) \Lambda^2 (\partial'_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m_0^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4!} (\lambda_0 + \Delta \lambda) \phi^4 + \Delta C \Lambda^4 (\partial'_\mu \phi)^4 + \dots \right]$$

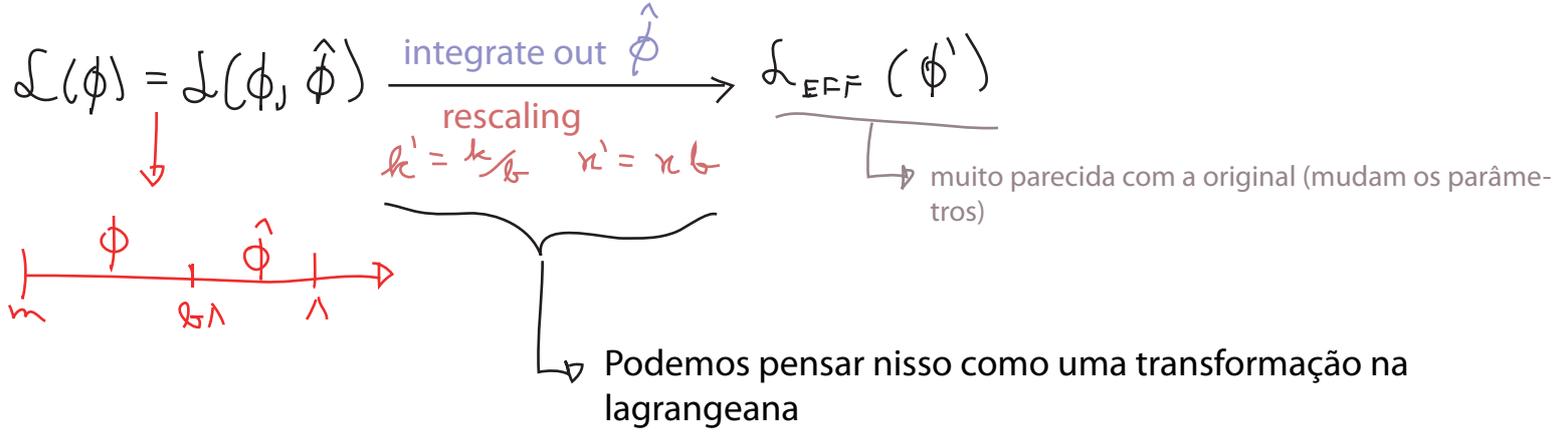
Podemos voltar a uma forma muito parecida com a lagrangeana original fazendo as seguintes definições:

$$\begin{aligned} \phi' &= [b^{2-d} (1 + \Delta z)]^{1/2} \phi \\ m'^2 &= (m_0^2 + \Delta m^2) (1 + \Delta z)^{-1} b^{-2} \\ \lambda' &= (\lambda_0 + \Delta \lambda) (1 + \Delta z)^{-2} b^{d-4} \\ c' &= (c_0 + \Delta c) (1 + \Delta z)^{-2} b^d \\ \mathcal{D}' &= (\mathcal{D}_0 + \Delta \mathcal{D}) (1 + \Delta z)^{-3} b^{2d-6} \\ &\vdots \end{aligned}$$

(eq. 97.1)

$$\int d^d x \mathcal{L}_{EFF} = \int d^d x' \left[\frac{1}{2} (\partial'_\mu \phi')^2 + \frac{1}{2} m'^2 \phi'^2 + \frac{\lambda'}{4} \phi'^4 + c' (\partial'_\mu \phi')^4 + \mathcal{D}' \phi'^6 + \dots \right]$$

Pensando em todo o processo, o que fizemos foi:



Podemos, de fato, repetir o processo para uma nova "fatia" do espaço de momentos ($cb\Lambda < |k| < b\Lambda$). Cada transformação sucessiva resulta em uma nova transformação dos coeficientes dos termos na lagrangeana (como em 97.1). Se fizermos todos os parâmetros desta transformação (b, c, \dots) infinitesimalmente próximos de 1 (o que equivale a fazer as "fatias" tenderem a zero) temos uma transformação contínua. Neste caso vemos que podemos descrever o resultado de integrar sobre os graus de liberdade com momentos grandes como uma trajetória ou caminho (em inglês é comum usar "flow") sobre o espaço das possíveis lagrangeanas. O conjunto destas transformações é chamado de **Grupo de Renormalização (RG)** (embora não formem verdadeiramente um grupo, pois não são inversíveis).

Notem que temos então duas formas de atacar o mesmo problema. Suponha que estejamos interessados em um processo qualquer em que os momentos típicos (da partículas reais) sejam muito menores que uma escala qualquer Λ (usemos a teoria escalar para ilustrar):

Método 1: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda_0 \phi^4}{4!}$

Calculamos a função de n-pontos

↓
Surgem divergências assim que consideramos loops (porque é neles que entra a dinâmica de altas energias)

↓ Renormalização

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \text{contratermos}$$

$m^2 = m_0^2 \pm \delta m$
 $\lambda = \lambda_0 \pm \delta \lambda$

as divergências aqui (nos δ 's) nos forçam assumir que os parâmetros nús (m_0, λ_0) eram infinitos, o que parece criar problemas para a série perturbativa

→ resultados finitos

Método 2: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda_0 \phi^4}{4!}$

Diversas transformações sucessivas em que "integramos" os modos de alto momento, embutindo o seu efeito de volta na lagrangeana. Em cada passo temos só **integrais finitas** e os parâmetros da lagrangeana são também sempre assumidos pequenos.

$(m_0 \ll \Lambda)$ $(\lambda \text{ perturbativo})$

m_0, λ_0 finitos!

há de se tomar cuidado, pois λ vai mudando e por enquanto assumimos que ele nunca vai ficar forte o bastante para invalidar a teoria de perturbação.

$$\mathcal{L}_{\text{EFF}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda \phi^4}{4!} + \text{ todos os termos possíveis (de qualquer dim.)}$$

→ resultados finitos (o campo que sobra é zero para qualquer momento um pouco acima dos momentos externos considerados)

Os dois métodos devem nos fornecer os mesmos resultados, mas o segundo deixa diversas idéias mais claras. Para começar a teoria de perturbação é válida em qualquer ponto do cálculo, desde que a constante de acoplamento não evolua para valores grandes (o que de fato acontece em algumas teorias). Além disso fica claro que todas as grandezas vão depender da escala que estamos considerando (aquela que sobra no final, depois de integrarmos tudo acima dela).

Vejamos como a lagrangeana tende a variar sobre as transformações do grupo de renormalização. As lagrangeanas são definidas no espaço dos coeficientes de seus termos (que são operadores compostos dos campos), no caso escalar, por exemplo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + c (\partial_\mu \phi)^4 + \mathcal{D} \phi^6 + \dots$$

→ parâmetros que definem o espaço de lagrangeanas escalares

↙ da forma que definimos as transformações do RG este termo fica sempre igual.

O ponto $\{m^2, \lambda, C, D, \dots\} = \{0, 0, 0, 0, \dots\}$ é o que chamamos de **ponto fixo** para as transformações do RG, uma vez que nele temos apenas:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2$$

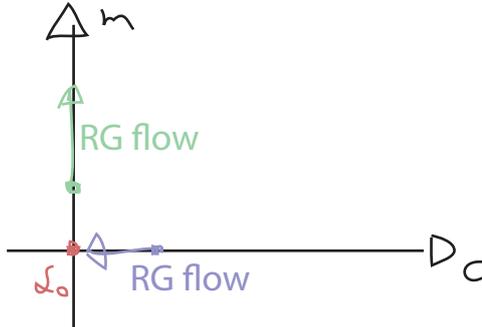
e portanto não há interações que vão corrigir os outros parâmetros e tirá-los de zero. Perto deste ponto podemos ignorar as correções superiores na perturbação e simplificar as transformações 97.1:

(eq. 97.1)

$$\left. \begin{aligned} b m'^2 &= (m_0^2 + \Delta m^2) (1 + \Delta z)^{-1} b^{-2} \\ \lambda' &= (\lambda_0 + \Delta \lambda) (1 + \Delta z)^{-2} b^{d-4} \\ C' &= (C + \Delta C) (1 + \Delta z)^{-2} b^d \\ D' &= (D + \Delta D) (1 + \Delta z)^{-3} b^{2d-6} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} m'^2 \simeq m_0^2 b^{-2} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ \lambda' \simeq \lambda_0 b^{d-4} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ C' \simeq C b^d + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ D' \simeq D b^{2d-6} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ \vdots \end{cases}$$

$\mathcal{L} \{m^2, \lambda, C, D, \dots\} \sim \{0, 0, 0, 0, \dots\}$

Como $b < 1$, os parâmetros com **potências negativas de b crescem**, e os com **potências positivas de b diminuem** quando aplicamos a transformação.



Os operadores cujos coeficientes crescem com as transformações sucessivas são chamados de **relevantes** e os que desaparecem são chamados de **irrelevantes**. Os operadores cuja potência em b é zero são chamados de **marginais**, e precisamos das correções perturbativas de ordem mais alta para saber se eles crescem ou decrescem.

no caso escalar: ϕ^2 é relevante sempre (independentemente do numero de dimensões)

ϕ^4 $\left\{ \begin{array}{l} d < 4 \text{ relevante} \\ d = 4 \text{ marginal} \\ d > 4 \text{ irrelevante} \end{array} \right.$

De uma forma geral, o coeficiente de um operador com N potências de ϕ (escalar) e M derivadas vai se transformar conforme (veja pg 96-97, note que queremos manter o termo cinético normalizado):

$$C'_{N,M} = \underbrace{b^{-d}}_{\text{scaling da integral}} \underbrace{b^{\left(\frac{d-2}{2}\right)N}}_{\text{transf. do campo (eq. 97.1)}} \underbrace{b^M}_{\text{scaling das derivadas}} C_{N,M} = b^{N\left(\frac{d}{2}-1\right)+M-d} C_{N,M}$$

(eq. 99.1)

Note que a dimensão do operador é (veja pg 73):

$$Dim [\hat{O}_{N,m}] = N \left(\frac{d-2}{2} \right) + M = d_{N,m}$$

↳ dimensão do campo escalar
↳ cada derivada aumenta a dimensão em 1

Como a lagrangeana deve ter dimensão d, a dimensão do coeficiente deste operador deve ter dimensão:

$$Dim [C_{N,m}] \equiv D_c = d - d_{N,m} = d - \left[N \left(\frac{d-2}{2} \right) + M \right]$$

que é justamente o que aparece no expoente de b (com sinal trocado). Comparando isto com o resultado da página 74 (eq 74.1), vemos que operadores **relevantes** ($D_c > 0$) equivalem a interações **super-renormalizáveis**, operadores **marginais** ($D_c = 0$) equivalem a interações **renormalizáveis** e os **irrelevantes** ($D_c < 0$) equivalem a interações **não-renormalizáveis**.

Uma outra forma de relacionar o comportamento dos coeficientes com a dimensão do operador consiste em pensar que o coeficiente é naturalmente da ordem de:

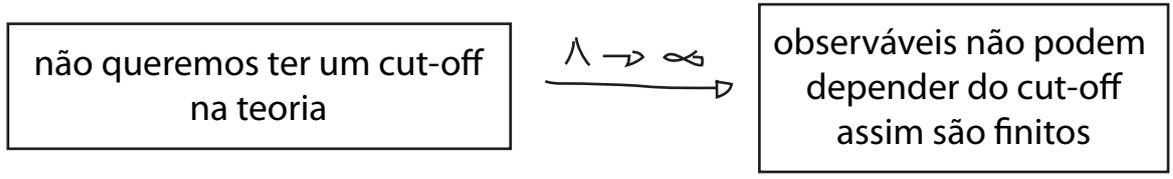
$$C_{OEF.} \sim (massa)^{d - d_{N,m}} \sim (\Lambda)^{d - d_{N,m}}$$

$$d < d_{N,m} \Rightarrow C_{OEF.} \sim \frac{1}{\Lambda^{|d - d_{N,m}|}} \left\{ \begin{array}{l} \text{irrelevante para momentos pequenos} \\ |p| \ll \Lambda \Rightarrow \left(\frac{|p|}{\Lambda} \right)^{d_{N,m} - d} \sim 0 \end{array} \right.$$

$$d > d_{N,m} \Rightarrow C_{OEF.} \sim \Lambda^{|d - d_{N,m}|} \quad \text{importante mesmo em pequenos momentos porque } \Lambda \text{ é grande}$$

Este é um resultado importante porque nos diz que, pelo menos em regiões próximas ao ponto fixo da lagrangeana livre, qualquer lagrangeana, não importa o quão complicada, acabará se tornando uma lagrangeana com um numero finito de interações renormalizáveis.

Isto muda um pouco nosso ponto de vista sobre teorias renormalizáveis, anteriormente seguimos o seguinte raciocínio:

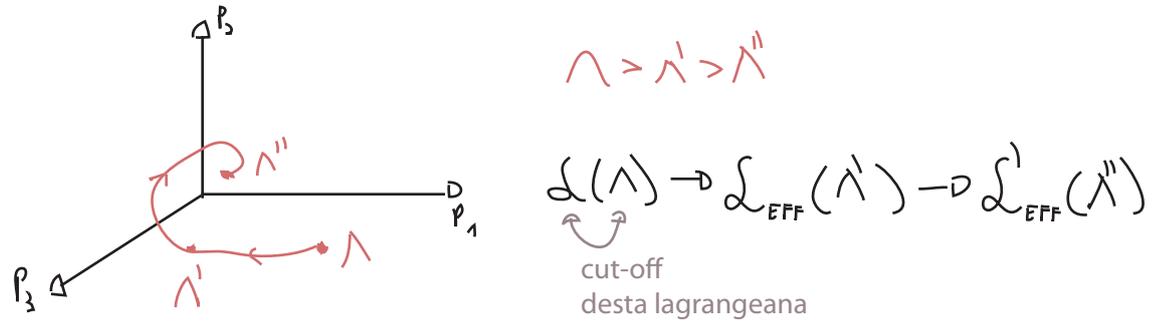


Só consigo uma teoria preditiva se não houver termos não-renormalizáveis

↳ Só teorias renormalizáveis são boas (é uma "sorte" que a QED o seja)

sorte no sentido que, nesta visão, não há motivo para uma teoria independente do cut-off ter sido realizada na natureza ↴

Agora temos uma outra perspectiva, suponha que qualquer teoria de campo tenha um cut-off - mesmo que não saibamos onde ele fica ou qual teoria começa ali (gravidade quântica?) - e que ele esteja bem acima do nosso alcance experimental. O que fazemos é usar as transformações do RG para "trazer" o cut-off para perto da escala em que estamos calculando o espalhamento, e incluímos os efeitos das altas energias na lagrangeana efetiva.



Se neste processo as interações não-renormalizáveis forem suprimidas, então as equações do RG nos dão **uma razão para que a QED seja renormalizável**: qualquer teoria com acoplamentos suficientemente fracos se comportará como uma teoria renormalizável em baixas energias.

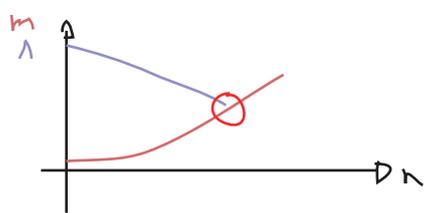
É claro que temos que tomar cuidado com os casos em que os acoplamentos crescem, ou que estamos um pouco mais longe do ponto fixo, vamos ver isso com um pouco mais de detalhe:

$\lambda \phi^4$
 $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}_0$
 $d > 4$

⇒ Apenas o termo de massa é relevante, começamos com $m_0 \ll \Lambda_0$

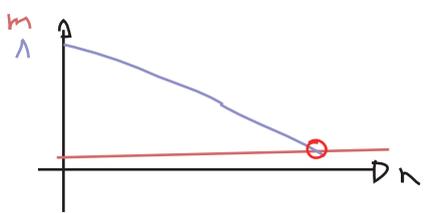
$$m_0^2 \xrightarrow{n \text{ integrações}} m'^2 = m_0^2 g^{-2n}$$

$$\Lambda_0 \longrightarrow \Lambda'$$



Em algum ponto $m'^2 \sim \Lambda'^2$ e temos que parar aí. Exigir que m' seja uma massa "pequena" significa exigir que a massa:

(a) comece perto do ponto fixo da teoria livre e mude muito pouco com as transformações do RG, e somente o cut-off é que vai baixando;



ou: (b) se ela começar longe de \mathcal{L}_0 , então ela flue para lá e então se comporta como em (a)

A situação (a) exige que a m passe extremamente perto do ponto fixo, e para conseguir (b) precisamos escolher o ponto onde começa a trajetória com muita precisão. Caso consigamos fazer isso, então a previsão é de que mesmo lagrangeanas com operadores altamente não lineares (longe de \mathcal{L}_0) terão correlatores a baixas energias que se comportam como teorias praticamente livres de escalares leves. No caso de sistemas magnéticos (onde podemos de fato ajustar as "condições iniciais") este comportamento aparece em modelos com mais de 4 dimensões. Perto da transição de fase de segunda ordem destes modelos temos exatamente esta situação.

$\lambda\phi^4$
 $d \sim d_0$
 $d = 4$

Neste caso temos que ficar atentos ao operador ϕ^4

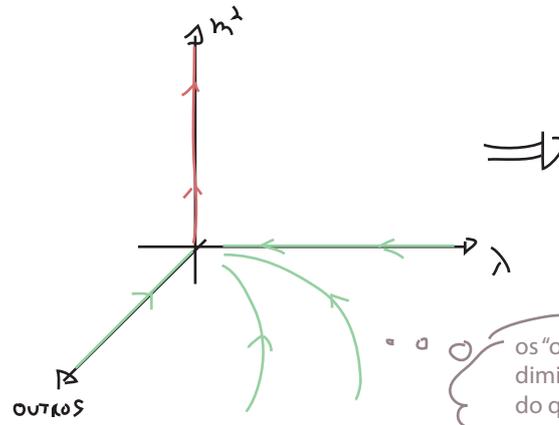
$$\lambda' = (\lambda + \Delta\lambda)(1 + \Delta z)^{-d} \mu^{d-4}$$

eq. 95.1

$\Delta z \sim \frac{1}{\Lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^2)$
 só corrige a massa (veja pg 80, eq. 80.1)

$$\lambda' \approx \lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right)$$

λ' diminui lentamente conforme "integramos"



isso quer dizer que $\lambda\phi^4$ acaba sempre se tornando livre muito longe do cut-off (ou quando fazemos o cut-off ir para infinito). Esta é a trivialidade de $\lambda\phi^4$ sem cut-off (é claro que a teoria continua útil se temos um cut-off)

os "outros" coeficientes diminuem mais rápido do que λ

$\lambda\phi^4$
 $d \sim d_0$
 $d < 4$

O operador ϕ^4 agora é relevante. Mesmo que comecemos perto da teoria livre o valor de λ vai fluir para valores maiores. Assim que nos afastamos da origem, temos que considerar as correções de ordem λ (da eq. 95.1). Para $d < 4$ temos:

$$\lambda' = \left(\lambda - \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{(1 - \Lambda^{d-4})}{d-4} \Lambda^{d-4} \right) \mu^{d-4}$$

$\lambda' \sim \lambda \Lambda^{d-4}$

este sinal sugere que em algum ponto o crescimento causado pelo scaling vai ser cancelado pela contribuição do termo não-linear, neste ponto λ pára de mudar - há um segundo ponto fixo. Este ponto se funde como o ponto da lagrangeana livre se fazemos $d \rightarrow 4$, e os dois vão ter a mesma propriedade em relação ao crescimento da massa. Então, perto de $d = 4$ temos o diagrama abaixo:

