

## Correções Radiativas

(Peskin 7.1, S. Weinberg QTF - Vol1 - 10.7)

Vamos agora olhar mais profundamente o que acontece com as funções de Green da teoria quando "ligamos" a interação. Começemos com o seguinte objeto:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle$$

estado fundamental (vácuo) da teoria interagente

Como interpretamos este objeto? Tomemos auto-estados de  $\hat{H}$  e  $\hat{\vec{P}}$ :

$$|\lambda\rangle$$

Lagrangiana completa

podem ter uma ou mais partículas

Notem que estamos assumindo que  $\hat{H}$  e  $\hat{\vec{P}}$  comutam. Isto só é verdade porque se tratam de estados livres (a interação corrige o propagador por meio de loops) ou estados representando um conjunto de partículas (ligadas ou não) que tratamos como um único corpo (a energia de ligação já está incluída na massa do estado composto, que por sua vez é livre). Não estamos falando agora de espalhamentos.

Definamos:  $|\lambda_0\rangle \rightarrow \hat{\vec{P}} |\lambda_0\rangle = 0$

$\lambda$  carrega todos os outros números quânticos dos possíveis estados

estado de momento zero

$$\hat{H} |\lambda_0\rangle = E_0(\lambda) |\lambda_0\rangle$$

$$|\lambda_0\rangle \xrightarrow{\text{Boost } \vec{P}} |\lambda_p\rangle$$

A invariância de Lorentz de  $\hat{H}$  me diz que  $|\lambda_p\rangle$  também é auto-estado de  $\hat{H}$

$$\hat{H} |\lambda_p\rangle = E_p(\lambda) |\lambda_p\rangle$$

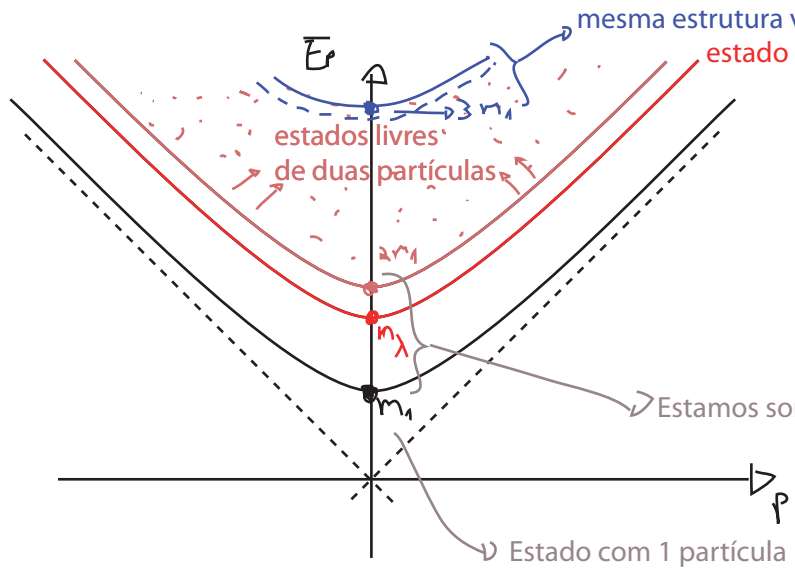
$$E_p(\lambda) \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_\lambda^2}$$

Estou definindo como "massa", a energia do estado em seu referencial de repouso

(o que faz todo sentido para estados de 1 partícula ou mesmo estados ligados)

Qualquer autovalor de  $H$  pode ser escrito como um boost de um outro autovalor com momento zero.

Autovalores de  $\hat{P}^\mu = (\hat{H}, \hat{\vec{P}})$ :



$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} |\lambda_p\rangle\langle\lambda_p|$$

Estamos somando sobre estes pontos e integrando sobre as curvas

Estado com 1 partícula

$$x^0 > y^0$$

$$\langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle = \langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle}_{0} \langle\Omega|\phi(y)|\Omega\rangle + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \langle\Omega|\phi(x)|\lambda_p\rangle \langle\lambda_p|\phi(y)|\Omega\rangle$$

$$\langle\Omega|\phi(x)|\lambda_p\rangle = \langle\Omega| e^{i\hat{P}x} \underbrace{\phi(0)}_{\text{translação}} e^{-i\hat{P}x} |\lambda_p\rangle = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_p\rangle e^{-i p x}$$

$p^0 = E_p$

$$= \langle\Omega|U^{-1}U\phi(0)U^{-1}U|\lambda_p\rangle e^{-i p x} = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle e^{-i p x}$$

boost de  $\vec{p}$  para 0  
 $U|\lambda_p\rangle = |\lambda_0\rangle$

$$U\phi(0)U^{-1} = \phi(0) \quad \langle\Omega|U^{-1} = \langle\Omega|$$

↳ para campos de spin maior teríamos que ter mais cuidado aqui (vai para a lista)

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-iE_p(x-y_0)} =$$

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-iE_p(x-y_0)}}{2E_p(\lambda)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)}$$

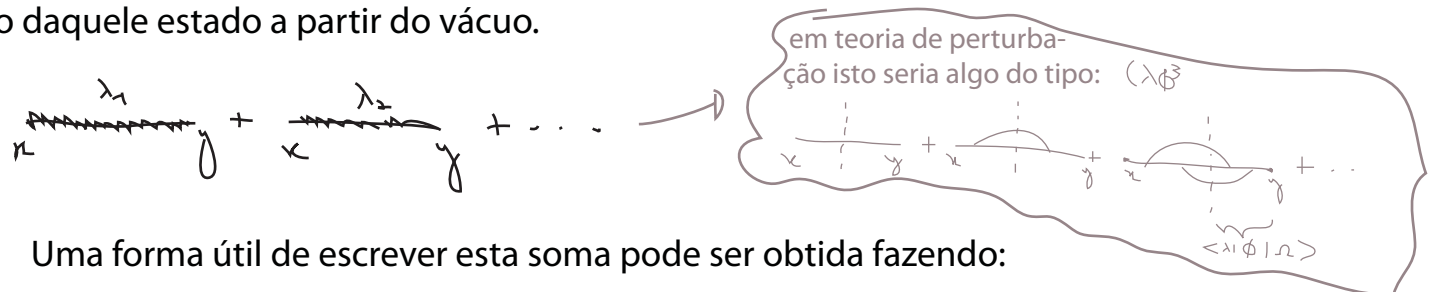
$$D_F(k, m) = \frac{i}{p^2 - m^2}$$

$$= \sum_{\lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2$$

Poderíamos fazer o mesmo para o caso  $y_0 > x_0$  e obter:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 D_F(x-y, m_{\lambda}^2)$$

Note que obtemos o propagador de Feynman com a massa substituída por  $m_{\lambda}$ . Para cada estado  $\lambda$  contribuindo para a função de 2 pontos temos também um "peso" dado pela amplitude de criação daquele estado a partir do vácuo.



Uma forma útil de escrever esta soma pode ser obtida fazendo:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2 D_F(x-y, M^2) =$$

$$\rho(M^2) = \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle \Omega | \phi(\omega) | \lambda_0 \rangle|^2$$

Densidade espectral

$$= \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x-y, M^2)$$

(representação espectral de Källén-Lehmann)

É importante notar que, para um estado intermediário de uma partícula:

$$\kappa \xrightarrow{\phi} \eta$$

teremos  $m_\lambda = m$ , onde  $m$  é o autovalor de energia (para a Hamiltoniana interagente) no referencial de repouso da partícula. Esse estado contribui com uma função  $\delta(M^2 - m^2)$  para a densidade espectral

$$\rho(M^2) = 2\pi \delta(M^2 - m^2) \cdot \underbrace{Z}_{|\langle \Omega | \phi(0) | 1_0 \rangle|^2} + \underbrace{\sigma(M^2)}_{\text{contribuições de estados de 2 ou mais partículas.}}$$

↑ estado de 1 partícula com momento zero

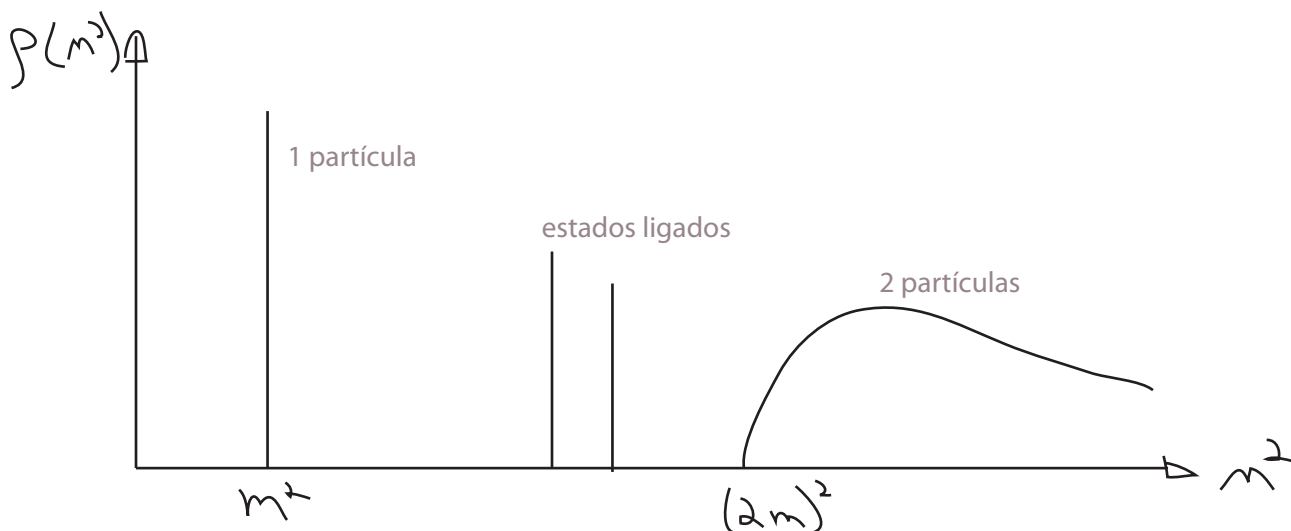
$Z \rightarrow$  Field Strength Renormalization

Esta massa "m" é a massa observável da partícula interagente e vai, em geral, diferir daquela que aparece na lagrangeana, que chamaremos de  $m_0$

$m \rightarrow$  Massa física

$m_0 \rightarrow$  Massa nua (bare mass)

Em relação às contribuições de mais partículas,  $\sigma(M^2)$ , temos essencialmente duas possibilidades: a partir da energia em que podemos produzir duas ou mais partículas reais "livres" temos um espectro contínuo da massa  $m_\lambda$ . Mas abaixo desta energia podemos, dependendo da interação específica, ter estados ligados de duas ou mais partículas. Neste caso teremos polos adicionais em massas entre  $m$  e  $2m$ . Isto nos leva a uma forma tipicamente do tipo:

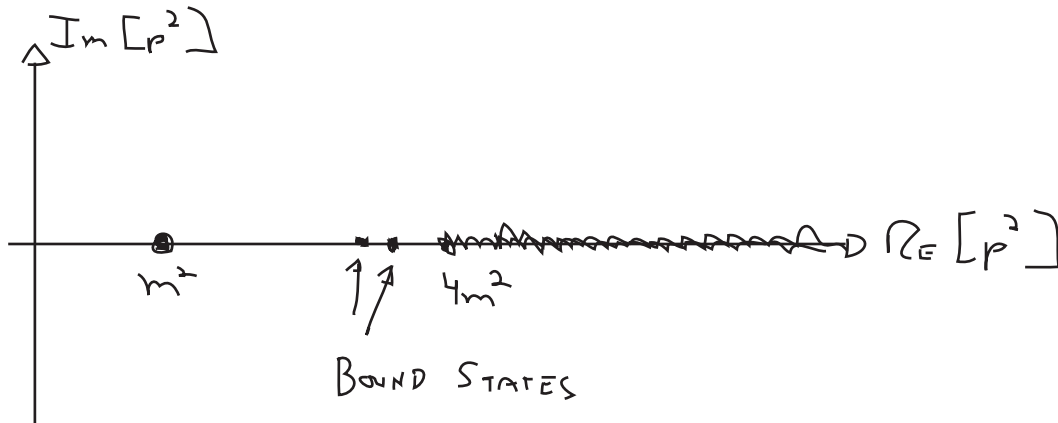


Passando para o espaço dos momentos:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | \Omega \rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

$$= \frac{i Z}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + (\text{BOUND STATES}) + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dM^2 \sigma(M^2)}{2\pi} \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

Que tem a seguinte estrutura analítica no plano complexo:



Comparemos este resultado com o caso de um campo livre:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | 0 \rangle = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

Os dois são semelhantes e fica claro que temos que levar Z para 1 quando “desligamos” a interação. De fato, é possível mostrar que (veja Weinberg, 10.7):

$$\int_0^{\infty} \rho(M^2) dM^2 = 1$$

&

$$1 = Z + \int_0^{\infty} \sigma(M^2) dM^2$$

O que também nos garante que a contribuição de estados de muitas partículas desaparece na teoria livre.

PS: no caso de espinores de Dirac, o mesmo raciocínio nos levaria a:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle = \frac{i Z_2 \sum_s \psi^s(p) \bar{\psi}^s(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots = \frac{i Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

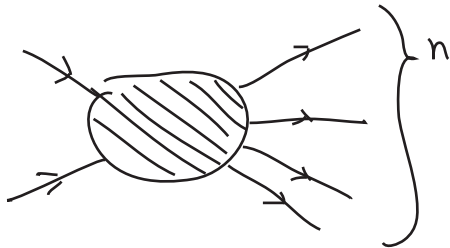
$$\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2} \psi^s(p)$$

PS2: obter de fato a forma da densidade espectral é uma tarefa árdua por se tratar de um cálculo não-perturbativo. Um método envolve a utilização de relações de dispersão. Quem estiver interessado pode ler: Weinberg, sec 10.8 ou Peskin, sec 18.4

## A matriz S e a fórmula de redução LSZ (Lehmann, Symanzik, Zimmerman)

(Peskin 7.2, Ryder 6.8 e 7.3)

Vamos ver o que acontece quando generalizamos estas idéias para correlatores maiores



$$\Rightarrow \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

Vamos escolher um dos pontos acima (que chamaremos de  $x$ ) e fazer a transformada de Fourier nele:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\int d^4x = \underbrace{\int_{T_+}^{\infty} dx^0}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{T_-}^{T_+} dx^0}_{\text{II}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{T_-} dx^0}_{\text{III}}$$

$$T_+ > \forall z_i^0 > T_-$$

Na região I o tempo  $x^0$  é maior que os outros, portanto:

$$\int_{T_+}^{\infty} d^4x \int d^3k e^{iP^0 x^0} e^{-i\vec{P}\vec{x}} \langle \Omega | \phi(x) T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

$$\sum_{\lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{k}}(\lambda)} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\vec{k}} \rangle \langle \lambda_{\vec{k}} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\langle \Omega | \phi(x) | \lambda_k \rangle = \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle e^{-i k x} \quad \left. \begin{array}{l} \text{v. p. } \neq \gamma \\ k^0 = E_k(\lambda) \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{\lambda} \int_{T_+}^{\infty} d^4 x^0 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \underbrace{\int d^3 x e^{+i \vec{k} \vec{x}} e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x}}}_{(2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{p})} \frac{1}{2E_p(\lambda)} e^{i p^0 x_0} e^{-i E_k x^0} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \times \langle \lambda_k | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

$$= \sum_{\lambda} \int_{T_+}^{\infty} d^4 x^0 \frac{1}{2E_p(\lambda)} e^{-i(E_p - p^0)x_0 - \epsilon x^0} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \times \langle \lambda_p | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle =$$

← Para garantir convergência

$$= \sum_{\lambda} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \frac{i e^{-i(E_p - p^0)T_+ - \epsilon T_+}}{[p^0 - E_p(\lambda) + i\epsilon]} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_p | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

→ será suprimido no que segue, já que próximo ao polo é igual a 1

Esta é uma função de  $p_0$  com singularidades em todos os pontos  $E_p(\lambda)$ . Se estas singularidades são polos isolados ou cortes vai depender da teoria específica. Vamos nos interessar com o que ocorre próximo ao polo, que equivale a uma partícula de massa (física)  $m$ .

$$p^2 - m^2 = p_0^2 - |\vec{p}|^2 - m^2 = p_0^2 - \underbrace{(|\vec{p}|^2 + m^2)}_{E_p^2} = (p_0 + E_p)(p_0 - E_p)$$

$$\lim_{p_0 \rightarrow +E_p} p^2 - m^2 = 2E_p(p_0 - E_p)$$

$$\int d^4 x e^{i p x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}}_{p_0 \rightarrow E_p} \sqrt{z} \langle \vec{p} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

estado de 1 partícula com momento  $\vec{p}$

←  $\langle \Omega | \phi_0 | \Omega \rangle$  → estado de 1 partícula com momento zero

este símbolo quer dizer "tem polos iguais a" (estamos desprezando os termos finitos)

Se fizermos o mesmo para a região III, veremos que

$$\int d^4x e^{iP \cdot x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{P_0 \rightarrow -E_P}_{\substack{P_0 \rightarrow -E_P \\ P^0 \rightarrow -E_P}} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \Omega | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | -\vec{P} \rangle$$

A região II não possui polos em  $P_0 \rightarrow E_P$  ou  $P_0 \rightarrow -E_P$  se tentássemos o mesmo procedimento chegaríamos a algo na forma:

$$\int d^3k \frac{i}{E_0 - E_{k+p} + E_k}$$

Gostaríamos de continuar fazendo isso para todos os outros campos dentro do produto temporalmente ordenado, mas temos que ter cuidado com o isolamento das partículas externas. A forma de fazer isso é voltar na página 6 e, ao invés da transformada de Fourier, usamos um pacote de onda estreito:

$$\int d^4x e^{iP^0 x_0} e^{-i\vec{P} \cdot \vec{x}} \longrightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^4x e^{iP^0 x_0} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \psi(\vec{k})$$

$\psi(\vec{k})$ : distribuição estreita centrada em  $\vec{p}$  (voltamos a transformada de Fourier se fizemos esta distribuição virar uma delta de Dirac)

Esta pequena indeterminação no momento da partícula associada faz com que ela fique com a posição contida em uma região do tamanho deste pacote. Retraçando todo o raciocínio acima teremos agora:

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi(\vec{k}) \frac{1}{2E_k(\lambda)} \frac{i}{p^0 - E_k(\lambda) + i\epsilon} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_k | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\underbrace{\sim}_{P^0 \rightarrow E_P} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i \psi(\vec{k})}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \vec{k} | T \{ \phi(z_1) \dots \phi(z_{n+1}) \} | \Omega \rangle$$

$$\tilde{p} = (P_0, \vec{k})$$

Na prática agora o polo "anda" conforme variamos  $\vec{k}$ , ou seja, o polo de uma partícula virou um pequeno corte cujo comprimento é a largura de  $\psi(\vec{k})$ . A volta ao caso anterior é bem definida conforme estreitamos  $\psi(\vec{k})$  até que vire uma delta e o corte volta a ser um polo.



Se fizermos o mesmo para todos os pontos na função de  $n+2$  pontos da página 6, obteremos:

$$\int \prod_{i=1}^{n+2} \left( \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} d^4 x_i e^{i \tilde{P}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

De novo temos três regiões:



Se tomarmos os tempos que dividem as regiões suficientemente grandes (para o passado ou futuro) podemos assumir que nestas regiões já não há mais sobreposição alguma dos pacotes e dividir cada uma das integrais anteriores em três regiões, assim como fizemos antes. Mais uma vez, não precisamos nos preocupar com a região II, pois as integrais nessa região resultam em funções analíticas. Pensemos nas regiões I e III, e no caso em que só "empacotamos" dois campos:

$$x_1^0, x_2^0 \in \text{I}$$

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \int \prod_{i=1,2} \left( \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} d^4 x_i e^{i \tilde{P}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right)$$

$$\times \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_k \rangle \langle \lambda_k | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

É aqui os pacotes de onda se tornam importantes. Como este estado tem que ser aniquilado por campos que sofrem a restrição de só serem diferentes de zero em locais isolados do espaço ele tem que ser composto de duas excitações distintas e isoladas espacialmente. Neste caso podemos fazer a aproximação:

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_k \rangle \langle \lambda_k | \Omega \rangle =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_1}} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_2}} \langle \Omega | \phi(x_1) | \lambda_{k_1} \rangle \langle \Omega | \phi(x_2) | \lambda_{k_2} \rangle \langle \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} | \Omega \rangle$$

Agora podemos separar a contribuição dos "polos" de uma partícula (que na verdade agora são pequenos cortes):

$$\int \prod_{i=1}^2 \left( \frac{\int d^3k_i}{(2\pi)^3} \int d^4x_i e^{i\tilde{p}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle \sim$$

$$\overset{\substack{P_1^0 \rightarrow E_{k_1} \\ P_2^0 \rightarrow E_{k_2}}}{\sim} \int \prod_{i=1}^2 \left( \frac{\int d^3k_i}{(2\pi)^3} \varphi_i(\vec{k}_i) \frac{i\sqrt{z^1}}{P_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

Para voltarmos em estados assintóticos de momento bem definido, basta tomar o limite em que os pacotes viram funções delta. A expressão acima se torna:

$$\prod_{i=1}^2 \left( \frac{i\sqrt{z^1}}{P_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \vec{P}_1 \vec{P}_2 | T \{ \phi(x_3) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

Finalmente, podemos fazer o mesmo para as funções que restam (colocando-as na região III - passado) e vemos que o termo mais singular de:

$$\int \prod_{i=1}^{n+2} \left( \frac{\int d^3k_i}{(2\pi)^3} \int d^4x_i e^{i\tilde{p}_i x_i} \varphi_i(\vec{k}_i) \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$$

$$\sim \prod_{i=1}^{n+2} \left( \frac{i\sqrt{z^1}}{P_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \vec{P}_1 \vec{P}_2 | (-\vec{P}_3) (-\vec{P}_4) \dots \rangle_{IN}$$

contém em si elementos de matriz de S

**Resumindo**

$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+2}) \} | \Omega \rangle$   
 ↓ pacotes de onda

$\prod (\text{propagadores completos}) \langle S \rangle$   
 ↑ volta ao pacote estreito

$\int \prod \frac{\int d^3k_i}{(2\pi)^3} \varphi_i(\vec{k}_i) \langle \phi_1 \dots \phi_{n+2} \rangle$ 
→ polos termo mais singular
 $\int \prod \int d^3k_i \frac{\varphi_i(\vec{k}_i) \sqrt{z^1}}{P_i^2 - \vec{k}_i^2 - m^2} \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | \vec{k}_3 \dots \rangle$

\* se pudermos inverter a ordem das duas operações indicadas, fica bem fácil obter os elementos da matriz S. Na prática esquecemos todo o caminho que envolve os pacotes e calculamos o correlator da teoria interagente no espaço dos momentos:

$$\prod_{i=1}^n \int d^4x_i e^{i p_i x_i} \prod_{j=1}^m \int d^4y_j e^{-i k_j y_j} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(y_1) \dots \phi(y_m) \} | \Omega \rangle$$

$$\underset{\substack{p_i \rightarrow E_{p_i} \\ q_j \rightarrow E_{q_j}}}{\sim} \left( \prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{Z}^i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left( \prod_{j=1}^m \frac{\sqrt{Z}^i}{q_j^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | S | \vec{q}_1 \dots \vec{q}_m \rangle$$

(eq. 11.1)

ai basta olhar a função resultante na região em que todas as partículas externas estão "on-shell", perto de seus polos. O coeficiente do produto de todos os polos é o elemento de matriz S.

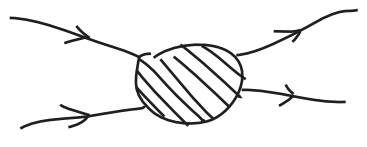
ps: no caso de partículas com spin, teremos fatores tais como  $u^s(p)$  acompanhando os propagadores, neste caso temos também que separar estes fatores da matriz S, multiplicando por polarizações que projetem nos estados de spin finais e iniciais de espalhamento que queremos calcular

ps2: também temos que lidar com o fator  $\sqrt{Z}$ , podemos identificar quanto ele vale na função de dois pontos de cada partícula e "separá-lo" junto com os propagadores para obter a matriz S

**Importante:** note que o fator Z e a massa física apareceram neste desenvolvimento geral, mesmo sem termos identificado qualquer divergência nas correções radiativas. Suponha que estivessemos trabalhando em poucas dimensões e as integrais de loop convergissem. Teríamos que introduzir Z e uma massa m diferente daquela na lagrangeana ( $m_0$ )?

De fato, a possibilidade de fazer esta inversão foi provada por Lehmann, Symanzik, and Zimmermann e a equação 11.1 acima é conhecida como **Fórmula de Redução de LSZ**

Vamos tentar expressar esta fórmula por meio de diagramas de Feynman. Consideremos um caso simples:



Consideramos apenas os diagramas conectados, já que os desconectados não possuem a multiplicação de 4 polos que procuramos.

lembre-se, por exemplo, da teoria  $\lambda\phi^4$  -

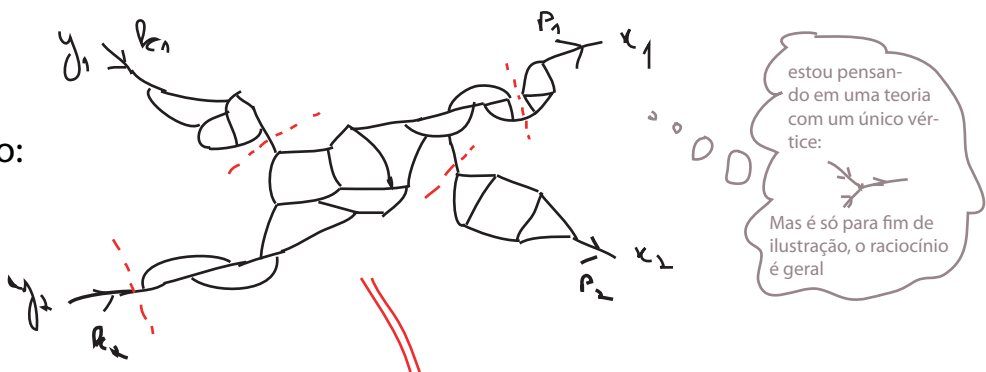
$$\text{X} = \Delta_F(x_1-z) \Delta_F(x_2-z) \Delta_F(x_3-z) \Delta_F(x_4-z)$$

$$\text{---} + \text{---} \sim \Delta_F \Delta_F$$

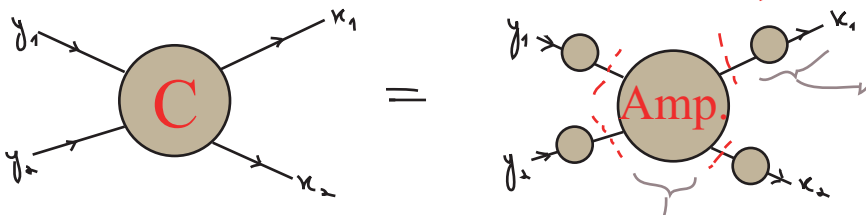
A função de quatro pontos no espaço dos momentos é:

$$\left( \prod_1^2 \int d^4 k_i e^{i P_i x_i} \right) \left( \prod_1^2 \int d^4 y_i e^{-i k_i y_i} \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle$$

Isso pode ser bem complicado:



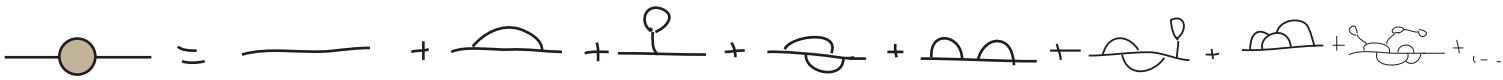
Mas podemos agrupar as correções da seguinte forma



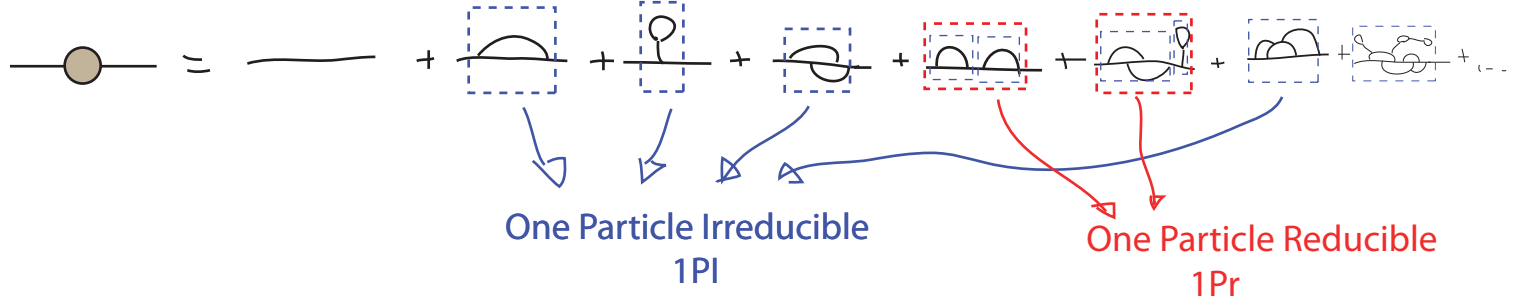
com isso agrupamos todas correções que só modificam o propagador nestas "pernas" - os **Propagadores Vestidos ou Completos**

Resta a parte que modifica o vértice da interação que chamamos de diagrama **Amputado**

Pensemos primeiro na estrutura dos propagadores:



Podemos dividir as correções em dois grupos:



Se definirmos um objeto que coleciona todas as correções 1PI:

$$-i M^2(p^2) = \rightarrow \text{1PI} \rightarrow$$

fica claro que as correções 1Pr serão dadas por:  $\text{1PI} + \text{1PI} \text{1PI} + \text{1PI} \text{1PI} \text{1PI} + \dots$

De forma que a função de dois pontos completa pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \text{Diagrama} = \\
 & = \text{Diagrama} + \text{Diagrama com 1PI} + \text{Diagrama com 2PI} + \text{Diagrama com 3PI} + \dots = \\
 & = \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots = \\
 & = \frac{i}{p^2 - m_0^2} \left( 1 + (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i M^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots \right) = \\
 & = \frac{i}{p^2 - m_0^2} \left( 1 - \frac{M^2}{p^2 - m_0^2} \right)^{-1} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M(p^2)^2}
 \end{aligned}$$

O propagador completo é dado por uma função complicada, que envolve a **auto energia M**. Conforme a discussão das pags 4-5, sabemos que perto de  $p^0 = E_p$  o único polo presente é o da massa física:

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2 - M(p^2)^2} \underset{p^0 \rightarrow E_p}{\sim} \frac{i z}{p^2 - m^2} + (\text{função sem polos})$$

Isso quer dizer que se formos para a região:  $\left. \begin{array}{l} p_1^0 \rightarrow E_{p_1} \\ p_2^0 \rightarrow E_{p_2} \\ k_1^0 \rightarrow E_{k_1} \\ k_2^0 \rightarrow E_{k_2} \end{array} \right\}$

A função de quatro pontos terá o seu termo mais singular na forma:

$$\text{Diagrama de 4 pontos} = \frac{i z}{p_1^2 - m^2} \frac{i z}{p_2^2 - m^2} \frac{i z}{k_1^2 - m^2} \frac{i z}{k_2^2 - m^2} \text{Diagrama Amp.} + \dots$$

+ ... termos regulares

onde, do lado direito, resta apenas o vértice e suas correções (diagramas Amputados)

Comparando isto com o lado direito da fórmula de LSZ (eq. 11.1), reconhecemos os produtos dos polos e vemos que a matriz S deve ser:

$$\langle P_1 P_2 | S | k_1 k_2 \rangle = Z^2 \text{ Amp.}$$

Para fins de ilustração, no caso  $\lambda\phi^4$ , (em teoria de perturbação) tínhamos:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle = \\ = -3 \left[ \text{diagrama desconectado} \right] - \frac{i\lambda}{4!} \left[ \text{diagrama } \Delta_F \Delta_F \Delta_F \Delta_F \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned}$$

desconectados  $(\Delta_F \Delta_F)$   $\Delta_F \Delta_F \Delta_F \Delta_F$

$$\begin{aligned} -i\lambda \int \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(z-x_4) dz \\ = -i\lambda \int dz \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4}{(2\pi)^{16}} \frac{i e^{-ik_1(z-x_1)}}{k_1^2 - m_0^2} \dots \frac{i e^{-ik_4(z-x_4)}}{k_4^2 - m_0^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int dz e^{-iz(\dots)} \rightarrow (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ = -i\lambda \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4}{(2\pi)^{16}} \frac{i}{k_1^2 - m_0^2} \dots \frac{i}{k_4^2 - m_0^2} \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) e^{ik_1 x_1} \dots e^{ik_4 y_4} \end{aligned}$$

que é a função no espaço das posições. Passando para o espaço dos momentos:

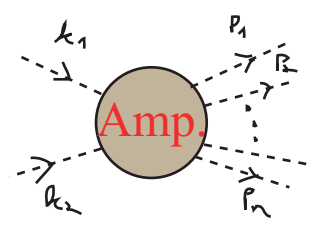
$$\begin{aligned} \int d^4k_1 e^{iP_1 x_1} \int d^4k_2 e^{iP_2 x_2} \int d^4k_3 e^{-ik_3 y_3} \int d^4k_4 e^{-ik_4 y_4} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle = \\ = -i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(-P_1 - P_2 + k_1 + k_2) \frac{i}{P_1^2 - m_0^2} \frac{i}{P_2^2 - m_0^2} \frac{i}{k_1^2 - m_0^2} \frac{i}{k_2^2 - m_0^2} \end{aligned}$$

↑ amputação

notem que nessa caso não temos o Z (pois estamos em Leading Order)

Uma análise equivalente para funções de mais pontos nos leva a:

$$\langle p_1 \dots p_n | S | k_1, k_2 \rangle = (\sqrt{Z})^{n+2}$$



Note que para campos com spin teríamos fatores de polarização no lado direito, tal como  $u_s(k)$  ou  $\epsilon_\mu(k)$

### Funções de Vértice

(Ryder 7.3)

Da mesma forma que fizemos para o propagador, podemos também definir uma soma para todas as correções do vértice (por exemplo em  $\lambda\phi^4$ ):

$$\begin{aligned}
 -i\lambda\Gamma &= \text{[tree]} + \text{[loop]} + \text{[2-loop]} + \text{[3-loop]} + \dots \\
 -i\lambda\Gamma(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -i\lambda + \dots \\
 \Gamma(p_1, p_2, p_3, p_4) &= 1 + \dots
 \end{aligned}$$

}  $\Gamma^{(4)}$

No caso da QED:  $-ie\Gamma^\mu(p', p) = -ie\gamma^\mu + \dots$

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu + \dots$$

}  $\Gamma^{(3)}$

Note que no caso da teoria  $\lambda\phi^4$  temos um vértice com 4 pernas externas e na QED com três. Podemos também (em ambas as teorias) definir uma função de vértice para duas pernas externas.

$$\begin{aligned}
 \Pi^{(2)}(p) &= \text{[tree]} + \text{[loop]} + \dots \\
 \Pi^{(2)}(p) &= \text{[tree]} + \text{[1-loop]} + \text{[2-loop]} + \dots
 \end{aligned}$$

Mais para frente ficará claro porque eu chamei a função com duas pernas externas de  $\Pi^{(2)}$  ao invés de  $\Gamma^{(2)}$

Vamos ver como podemos definir estas funções para qualquer ordem o obter um funcional gerador para elas. Primeiro definimos:

$$\phi_{cl}[J]_{(x)} = \frac{\delta W}{\delta J(x)} = -i \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}$$

}  $\frac{\delta Z[J]}{\delta J} = \langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0$

}  $Z[J] = 1$

} para  $J=0$

$$W = -i \ln[Z[J]]$$

mas estamos pensando em  $J \neq 0$

$$\phi_{ce}(\mathcal{J}(x)) = -i \frac{\langle \Omega | \phi | \Omega \rangle_{\mathcal{J}}}{\langle \Omega | \Omega \rangle_{\mathcal{J}}}$$

Pensemos neste objeto em uma teoria escalar livre:

$$Z = \int d^4x \left( -\frac{1}{2} \phi(\Box + m^2)\phi + \phi \mathcal{J} \right) \rightarrow Z_0[\mathcal{J}] = e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \mathcal{J}(x) \Delta_F(x-y) \mathcal{J}(y)}$$

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{p^2 - m^2}$$

$$W_0 = -i \ln Z_0 = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \mathcal{J}(x) \Delta_F(x-y) \mathcal{J}(y)$$

$$\phi_{ce}(\mathcal{J}(x)) = -\int d^4y \Delta_F(x-y) \mathcal{J}(y) \quad \xrightarrow{\text{DIAGRAMA}} \quad \begin{array}{c} \text{---} \times \\ \color{red}{\kappa} \qquad \color{red}{\gamma} \end{array}$$

↳ que é a solução clássica do sistema

$$d_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \phi \mathcal{J}$$

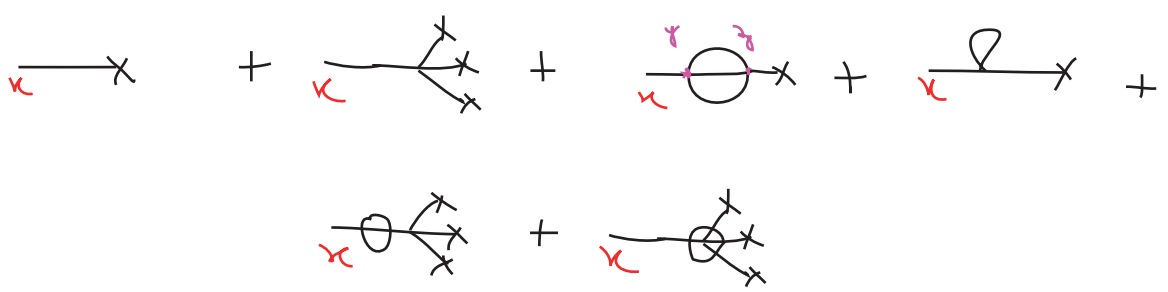
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi + \mathcal{J}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$$

$$\Box \phi - m^2 \phi + \mathcal{J} = 0 \Rightarrow (\Box - m^2) \phi = -\mathcal{J}$$

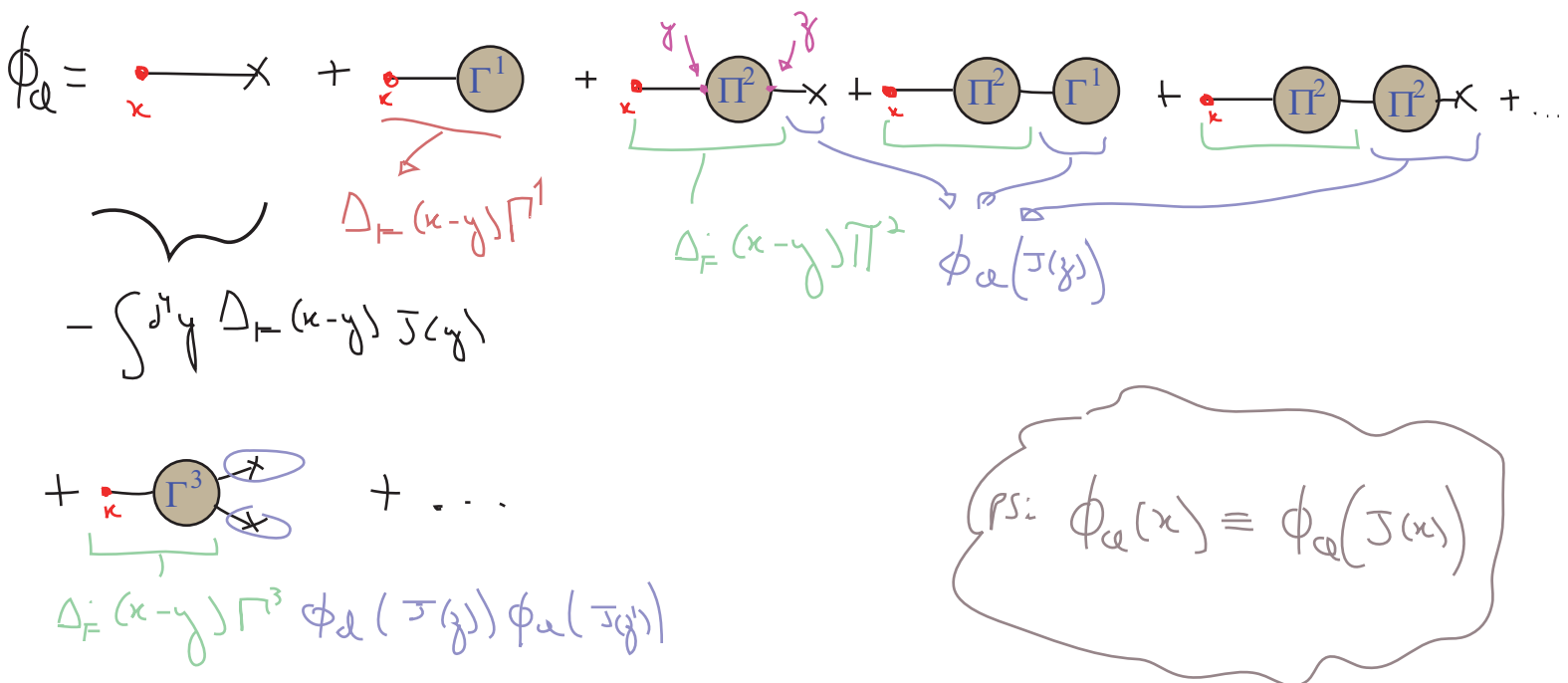
$$\phi_{ce} = -(\Box - m^2)^{-1} \mathcal{J}$$

Supondo agora que eu "ligasse" a interação, as contribuições para esta função de um ponto seriam (pensando em  $\lambda \phi^4$ ):





Pensando em termos de diagramas 1PI (e em uma teoria mais geral):



$$\phi_a(x) = - \int d^4y \Delta_F(x-y) \left\{ J(y) + \left( \Gamma^{(1)}(y) + \int d^4z \Pi^{(2)}(y,z) \phi_a(z) + \frac{1}{2} \int d^4z d^4z' \Pi^{(3)}(y,z,z') \phi_a(z) \phi_a(z') + \dots \right) \right\}$$

(eq. 17.1)

Vamos definir o funcional gerador para estas funções de vértice:

$$\hat{\Gamma}[\phi_a] \equiv \int d^4x \Gamma^{(1)}(x) \phi_a(x) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Pi^{(2)}(x,y) \phi_a(x) \phi_a(y) + \dots$$

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta \phi_a(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_a(x_n)} \hat{\Gamma}[\phi_a] \Big|_{\phi_a=0} \quad (n \neq 2)$$

Comparando isto com 17.1, temos (toda a parte entre parênteses é basicamente isto com uma potência do campo clássico a menos):

$$\frac{\delta W}{\delta J(x)} = \phi_a(J(x)) = - \int d^4y \Delta_F(x-y) \left( J(y) + \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_a]}{\delta \phi_a(y)} \right)$$

$$(\square_x + m^2) \phi_a(\mathcal{J}(x)) = - \int d^4y \underbrace{(\square_x + m^2) \Delta_F(x-y)}_{-\delta(x-y)} \left( \mathcal{J}(y) + \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_a]}{\delta \phi_a(y)} \right)$$

$$(\square_x + m^2) \phi_a(\mathcal{J}(x)) - \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_a]}{\delta \phi_a(x)} = \mathcal{J}(x)$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \left[ \int d^4y \phi_a(y) (\square_y + m^2) \phi_a(y) \right] = \int d^4y \delta(x-y) (\square_y + m^2) \phi_a(y) = (\square_x + m^2) \phi_a(x)$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \left( \underbrace{\hat{\Gamma}[\phi_a] - \frac{1}{2} \int d^4y \phi_a(\mathcal{J}(y)) (\square_y + m^2) \phi_a(\mathcal{J}(y))}_{\Gamma[\phi_a]} \right) = -\mathcal{J}(x) \quad (\text{eq. 18.1})$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_a(x)} = -\mathcal{J}(x)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_a(y)} \Big|_{\phi_a=0} = \underbrace{\Pi^{(2)}(x,y)}_{\Gamma^{(2)}(x,y)} - (\square_x + m^2) \delta(x-y)$$

$$n \geq 2 \Rightarrow \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta \phi_a(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_a(x_n)} \Gamma[\phi_a] \Big|_{\phi_a=0}$$

Suponha que definamos  $\Gamma[\phi_a]$  com a expressão:

$$W[\mathcal{J}] = \Gamma[\phi_a] + \int d^4x \mathcal{J}(x) \phi_a(x) \quad (\text{eq. 18.2})$$

$$\Rightarrow \frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x)} = \phi_a(x) \quad (\text{eq. 18.3})$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(y)} \left( \Gamma[\phi_a] = W[\mathcal{J}] - \int d^4x \mathcal{J}(x) \phi_a(x) \right)$$

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_a]}{\delta \phi_a(y)} = \underbrace{\frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \phi_a(y)}}_{\frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(y)} \frac{\delta \mathcal{J}(y)}{\delta \phi_a(y)}} - \frac{\delta \mathcal{J}(y)}{\delta \phi_a(y)} \phi_a(y) - \mathcal{J}(y)$$



$$\frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(y)} \frac{\delta \mathcal{J}(y)}{\delta \phi_a(y)} \Big|_{\phi_a = \phi_a(y)}$$

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_a]}{\delta \phi_a(y)} = -J(y)$$

que é justamente como o definimos antes (eq. 18.1) - usaremos esta nova definição porque é mais fácil generalizá-la quando tivermos mais campos.

Note que a função 1PI de dois pontos é  $\Pi^{(2)}(x,y)$  e não  $\Gamma^{(2)}(x,y)$

Temos uma interpretação para  $\Gamma^{(2)}$  ?

TEORIA LIVRE  
 $\Delta_F^C(x-y) = i \Delta_F(x-y) = \frac{-i}{p^2 - m^2}$

$$\phi_a(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} \quad \Delta_F^C(x-y) \text{ Propagador completo}$$

$$\frac{\delta \phi_a(x)}{\delta J(y)} = \frac{\delta^2 W}{\delta J(y) \delta J(x)} = i \langle n | T \{ \phi_a(x) \phi(y) \} | n \rangle$$

EQ 17.1

$$- \Delta_F(x-y) \left( 1 + \int d^4z \Pi^{(2)}(y,z) \frac{\delta \phi_a(z)}{\delta J(y)} + \dots \right) = i \Delta_F^C(x-y)$$

$i \Delta_F^C(z-y) \rightarrow 0 \text{ / } J = \phi_a = 0$

Quando faço  $J=0 \rightarrow \phi_a = 0$  (eq 16)

$$- \Delta_F(x-y) - i \Delta_F(x-y) \int d^4z \Pi^{(2)}(y,z) \Delta_F^C(z-y) = i \Delta_F^C(x-y)$$

$$-(\square + m^2)_x \left( \int d^4z \left( \delta^4(z-x) + \Delta_F(x-y) \Pi^{(2)}(y,z) \right) \Delta_F^C(z-y) = i \Delta_F^C(x-y) \right)$$

$$\int d^4z \underbrace{\left( -(\square + m^2)_x \delta^4(z-x) + \delta(x,y) \Pi^{(2)}(y,z) \right)}_{\Gamma^{(2)}(x,z) \text{ (eq 18)}} \Delta_F^C(z-y) = i \Delta_F^C(x-y)$$

$$\int d^4y \Gamma^{(2)}(x,y) \Delta_F^C(y-y) = i \delta(x-y)$$

(eq. 20.1)

$\Gamma^{(2)}(x,y)$  é a inversa do propagador completo! No espaço dos momentos:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^{(2)}(x,y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} \Gamma^{(2)}(p) \\ \Delta_F^C(y,y) &= \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{-i p'(y-y)} \Delta_F^C(p') \end{aligned} \right\} \begin{cases} \int d^4y \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} \Gamma^{(2)}(p) \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{-i p'(y-y)} \Delta_F^C(p') = i \delta(x-y) \\ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \delta^4(p-p') \Gamma^{(2)}(p) \Delta_F^C(p') e^{-i p x} e^{i p' y} = i \delta(x-y) \\ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Gamma^{(2)}(p) \Delta_F^C(p) e^{-i p(x-y)} = i \delta(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} i e^{-i p(x-y)} \end{cases}$$

$$\Gamma^{(2)}(p) \Delta_F^C(p) = i$$

(eq. 20.2)

$$\Delta_F^C(p) = \frac{i}{p^2 - \underbrace{m^2}_{m^2 = m_0^2 + M^2(p^2)}}$$

massa física  $\rightarrow$   $m^2 = m_0^2 + M^2(p^2)$   $\rightarrow$  correções 1PI ao propagador (pg 13)  
 massa livre  $\rightarrow$   $m_0^2$   
 função de Green de 2-pontos completa

$$\Gamma^{(2)}(p) = -i (p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)) = i (M^2(p^2) - (p^2 - m_0^2))$$

$$\Gamma^{(2)}(x,y) = \Gamma^{(2)}(x,y) - (0 + m_0^2) \delta(x-y)$$

Queremos achar relações análogas a 20.1 e 20.2 para vértices de mais pontos. Notando que:

$$\Delta_F^C(y-y) = \left( -i \frac{\delta^2 W}{\delta J(y) \delta J(y)} \right) \stackrel{18.3}{=} -i \frac{\delta \phi_a(y)}{\delta J(y)}$$

Podemos escrever a seguinte derivada

$$\frac{\delta}{\delta J(x'')} = \int d^4z'' \frac{\delta \phi_a(z'')}{\delta J(x'')} \frac{\delta}{\delta \phi_a(z'')} = i \int d^4z'' \Delta_F^C(z'', x'') \frac{\delta}{\delta \phi_a(z'')}$$

(eq. 20.3)

$$\int \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x'')} dz \Delta_F^c(x, z) \Gamma^{(4)}(z, y) = 0$$

$$\int dz \left( \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x'')} \Delta_F^c(x, z) \right) \Gamma^{(4)}(z, y) + \int dz \Delta_F^c(x, z) \left( \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x'')} \Gamma^{(4)}(z, y) \right) = 0$$

20.3

$$\int dz \left( -i \frac{\delta^3 W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x'') \delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(y)} \right) \Gamma^{(4)}(z, y) + i \int dz d z'' \Delta_F^c(x, z) \times \Delta_F^c(z'', x'') \left( \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_\alpha(z'') \delta \phi_\alpha(z) \delta \phi_\alpha(y)} \right) = 0$$

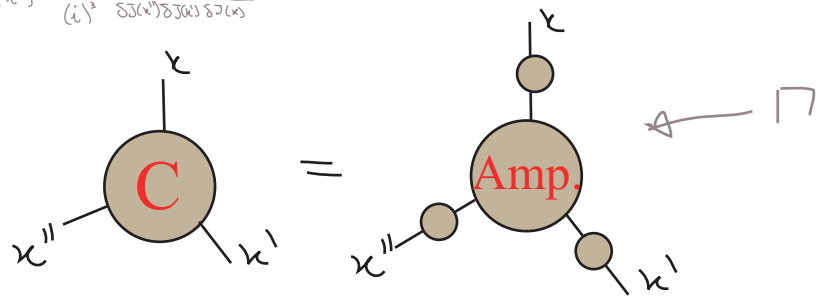
$\times i \Delta_F^c(x', y)$   
 $\int dy$

$$\int dz \frac{\delta^3 W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x'') \delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(y)} \int dy \underbrace{(\Delta_F^c(x', y) \Gamma^{(4)}(z, y))}_{i \delta(x' - y)} + \int dz d z'' dy \Delta_F^c(x, z) \Delta_F^c(z'', x'') \Delta_F^c(x', y) \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_\alpha(z'') \delta \phi_\alpha(z) \delta \phi_\alpha(y)} = 0$$

$y \rightarrow z'$

$$i \frac{\delta^3 W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x'') \delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(z')} = \int dz d z'' dz' \Delta_F^c(x, z) \Delta_F^c(z'', x'') \Delta_F^c(x', z') \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_\alpha(z'') \delta \phi_\alpha(z) \delta \phi_\alpha(z')}$$

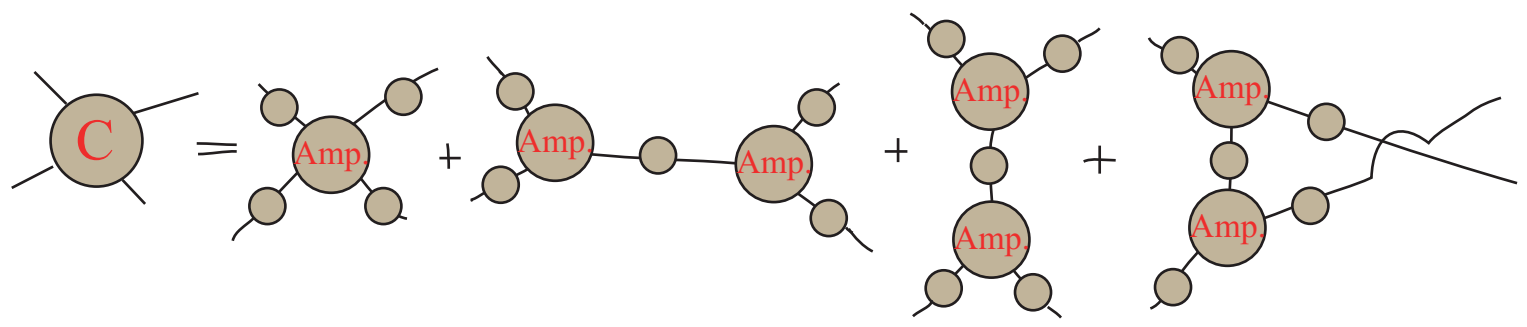
$$\phi(x, x', x'') = \frac{1}{(i)^3} \frac{\delta^3 W}{\delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(x') \delta \mathcal{J}(x')}$$



O que nos mostra que a função de vértice de fato contém os diagramas amputados que queríamos. Outra forma de ver isso é invertendo a expressão acima:

$$\frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta\phi(z'') \delta\phi(z) \delta\phi(z')} = - \int dx dx' dx'' \underbrace{\Gamma^{(A)}(x, z) \Gamma^{(A)}(x', z') \Gamma^{(A)}(x'', z'')}_{\text{como estes são os inversos dos propagadores completos, o efeito deles sobre o correlator será o de "amputar" os propagadores.}} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x'') \delta J(x) \delta J(x')} \quad (\text{eq. 22.1})$$

Podemos continuar derivando para obter expressões para as funções de ordem superior. Em termos de diagramas, a expressão para a função de 4 pontos seria:



Obs: note que na pg 18, trocamos a definição de  $\Gamma[\phi_c]$  dada por 18.1 por:

$$W[J] = \Gamma[\phi_c] + \int dx J(x) \phi_c(x)$$

com  $\boxed{\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \phi_c(x)} \quad \boxed{\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_c(x)} = -J(x)}$

$$f(x) \rightarrow g(\mu) \quad \mu = \frac{df}{dx}$$

$$g(\mu) = f(x) - \mu x$$

o que é uma generalização da transformada de Legendre

### Identidades de Ward-Takahashi na QED

(Ryder 7.4, Peskin 7.4)

Com as definições feitas nas últimas páginas podemos agora provar uma generalização das identidades de Ward para os propagadores e vértices completos, as identidades de Ward-Takahashi. Começemos notando que quando quantizamos o campo eletromagnético fomos obrigado a fixar o gauge, pensando na Lagrangeana da QED:

$$\mathcal{L}_{\text{EFF}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \bar{\psi} \not{\partial} \psi - m \bar{\psi} \psi - \underbrace{\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2}_{\mathcal{L}_{\text{GF}}} \quad (\text{eq. 22.2})$$

A Lagrangeana fixada, no entanto, não é invariante de gauge - mas precisamos que os observáveis da teoria - que vêm das funções de Green - o sejam. Portanto o funcional gerador deve ser invariante. Assim, dada uma transformação de gauge infinitesimal:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha \quad \alpha = \alpha(x)$$

$$\psi \rightarrow \psi - i e \alpha \psi$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} + i e \alpha \bar{\psi}$$

vamos ver o que acontece com Z. Lembrando que no funcional gerador aparece:

$$S = \int d^4x \left( \mathcal{L}_{\text{EFF}} + \bar{J}^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\Psi} \eta \right)$$

Quase toda a lagrangeana efetiva é invariante de gauge, com exceção do termo de gauge-fixing:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 &\rightarrow -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu + \square \alpha) (\partial^\nu A_\nu + \square \alpha) = \\ &= -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{\xi} \underbrace{(\partial^\mu A_\mu)(\square \alpha)}_{\text{integração por partes:}} + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &\quad \int d^4x (\partial^\mu A_\mu)(\square \alpha) = \int d^4x (\square \partial^\mu A_\mu) \alpha(x) \end{aligned}$$

As fontes também contribuem para a variação:

$$\begin{aligned} \underbrace{\bar{J}^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\Psi} \eta}_{\mathcal{L}_F} &\rightarrow \mathcal{L}_F + \underbrace{\bar{J}^\mu \partial_\mu \alpha}_{\text{integração por partes:}} - i e \alpha \bar{\eta} \psi + i e \alpha \bar{\Psi} \eta \\ &\quad \int d^4x \bar{J}^\mu \partial_\mu \alpha = - \int d^4x (\partial_\mu \bar{J}^\mu) \alpha(x) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iS} &\rightarrow N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ -\frac{1}{2\xi} (\square \partial^\mu A_\mu) - \partial_\mu \bar{J}^\mu + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i e \bar{\eta} \psi + i e \bar{\Psi} \eta \right] \alpha(x) \right\} e^{iS} \end{aligned}$$

Considerando que  $\alpha(x)$  é pequeno, podemos expandir a exponencial e obter:

$$Z \rightarrow Z + N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \left\{ \int d^4x \underbrace{\left[ -\frac{1}{\xi} (\square \partial^\nu A_\nu) - \partial_\mu \bar{J}^\mu - i e (\bar{\eta} \Psi - \bar{\Psi} \eta) \right]}_{\mathcal{O}[A_\mu, \bar{\Psi}, \Psi]} \alpha(x) \right\} e^{iS}$$

Uma forma simples de tratar  $\mathcal{O}$  é usar o mesmo método que usamos para tratar interações anteriormente - transformamos ele em um operador diferencial agindo na exponencial da ação, fazendo as substituições:

$$\Psi \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \quad \bar{\Psi} \rightarrow -\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta} \quad A_\mu \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\mu} \quad \boxed{Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{iS_{\text{eff}} + i \int d^4x (\bar{J}^\mu A_\mu + \bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta)}}$$

Então:

$$\hat{\mathcal{O}}[A_\mu, \bar{\Psi}, \Psi] = \left[ +\frac{i}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta}{\delta J^\nu} - \partial^\mu \bar{J}_\mu - e \left( \bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right]$$

$$Z \rightarrow \left( 1 + \int d^4x \alpha(x) \hat{\mathcal{O}} \right) Z$$

Para garantir a invariância de  $Z$ , qualquer que seja  $\alpha$ , precisamos que:  $\hat{\mathcal{O}} Z = 0$  zero!

$$\left[ +\frac{i}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta}{\delta J^\nu} - \partial^\mu \bar{J}_\mu - e \left( \bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right] Z = 0$$

$$Z = e^{iW}$$

$$\left[ -\frac{1}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta W}{\delta J^\nu} - \partial^\mu \bar{J}_\mu - i e \left( \bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta W}{\delta \eta} \right) \right] e^{iW} = 0$$

$$-\frac{1}{\xi} \square \partial^\nu \frac{\delta W}{\delta J^\nu} - \partial^\mu \bar{J}_\mu - i e \left( \bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} + \frac{\delta W}{\delta \eta} \eta \right) = 0$$

Fazemos então uma generalização da definição para as funções de vértice, usando a transformação de Legendre mas três variáveis:

$$\Gamma[\Psi_\mu, \bar{\Psi}_\mu, A_\mu^0] = W[\eta, \bar{\eta}, \bar{J}_\mu] - \int d^4x (\bar{\eta} \Psi_\mu + \bar{\Psi}_\mu \eta + \bar{J}^\mu A_\mu^0)$$



$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} = -J^\mu \quad \frac{\delta W}{\delta \bar{J}} = A_\mu^a$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a} = +\bar{\eta} \quad \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} = \psi_a$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a} = -\eta \quad \frac{\delta W}{\delta \eta} = -\bar{\psi}_a$$

\* parece errado no Ryder

\* tem um i na derivada em A e um sinal errado entre os fermiônicos

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu^a} \left( -\frac{1}{\xi} \square \partial^\nu A_\nu^a + \partial^\nu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} - i e \left( \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a} \psi_a + \bar{\psi}_a \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a} \right) \right) = 0$$

alguns autores se referem a esta equação como Ward Takahashi ou W-T Generalizada

(eq. 25.1)

Esta relação entre os geradores das funções de vértice garante a invariância de gauge de Z em todas as ordens de perturbação. A partir dela podemos obter algumas relações mais conhecidas:

(I) aplicando as derivadas abaixo de ambos os lados de 25.1

$$\frac{\delta}{\delta \psi_a(y)} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \left( \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a(x)} \psi_a(x) \right) = \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \left[ \delta(x-y) \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a(x)} + \dots \right] = -\delta(x-y) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_a(x) \delta \bar{\psi}_a(x)} + \dots$$

$$\frac{\delta}{\delta \psi_a(y)} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \left( \bar{\psi}_a(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \right) = \frac{\delta}{\delta \psi_a(y)} \left[ \delta(x-x_1) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a(x)} + \dots \right] = \delta(x-x_1) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_a(y) \delta \bar{\psi}_a(x)}$$

e então fazemos:  $\psi_a = \bar{\psi}_a = A_\mu^a = 0$

$$\partial_x^\mu \frac{\delta^3 \Gamma[0]}{\delta \psi_a(y) \delta \bar{\psi}_a(x_1) \delta A_\mu^a(x)} = +i e \left( -\delta(x-y) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \psi_a(x) \delta \bar{\psi}_a(x_1)} + \delta(x-x_1) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \psi_a(y) \delta \bar{\psi}_a(x)} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Gamma_{ijN}^{(3)}(y_1, x_1, x)}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{[S_F^c(x-x_1)]^{-1}}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{[S_F^c(y_1-x)]^{-1}}$

$$\partial_x^\mu \Gamma_{ijN}^{(3)}(y_1, x_1, x) = i e \delta(x-x_1) [S_F^c(y_1-x)]^{-1} - i e \delta(x-y) [S_F^c(x-x_1)]^{-1}$$

(eq. 25.2)

Passando para o espaço dos momentos temos:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-x_1) \left[ \Sigma_F^<(y_1-x) \right]^{-1} = \\ & = \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-x_1) \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(y_1-x)} \left[ \Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = \\ & = \int d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx_1} \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(y_1-x_1)} \left[ \Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = \\ & = (2\pi)^4 \int d^4P_1' \, \delta(P_1 - P_1') \, \delta(P_2 + k + P_1') \left[ \Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = (2\pi)^4 \delta(k + P_1 - P_2) \left[ \Sigma_F^<(P_1) \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-y_1) \left[ \Sigma_F^<(x-x_1) \right]^{-1} = \\ & = \int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, \delta(x-y_1) \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(x-x_1)} \left[ \Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = \\ & = \int d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{iky_1} \int \frac{d^4P_1'}{(2\pi)^4} e^{-iP_1'(y_1-x_1)} \left[ \Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = \\ & = (2\pi)^4 \int d^4P_1' \, \delta(P_1 + k - P_1') \, \delta(-P_2 + P_1') \left[ \Sigma_F^<(P_1') \right]^{-1} = (2\pi)^4 \delta(P_1 + k - P_2) \left[ \Sigma_F^<(P_2) \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$\int d^4x \, d^4y_1 \, d^4x_1 \, e^{iP_1 y_1} e^{-iP_2 x_1} e^{ikx} \, d_x^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(y_1, x_1, x) = -k^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(P_1, -P_2, k)$$

$$\begin{aligned} -k^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(P_1, -P_2, k) &= i e (2\pi)^4 \delta(k + P_1 - P_2) \left\{ \left[ \Sigma_F^<(P_1) \right]^{-1} - \left[ \Sigma_F^<(P_2) \right]^{-1} \right\} \\ -i k^N \Gamma_{ijN}^{(3)}(P_1, -P_2, k) &= e (2\pi)^4 \delta(k + P_1 - P_2) \left\{ \left[ \Sigma_F^<(P_1 + k) \right]^{-1} - \left[ \Sigma_F^<(P_1) \right]^{-1} \right\} \end{aligned}$$

Da forma como está definida,  $\Gamma_{ijN}^{(3)}$  contém a carga e conservação de momento, para separar estes de forma explícita:

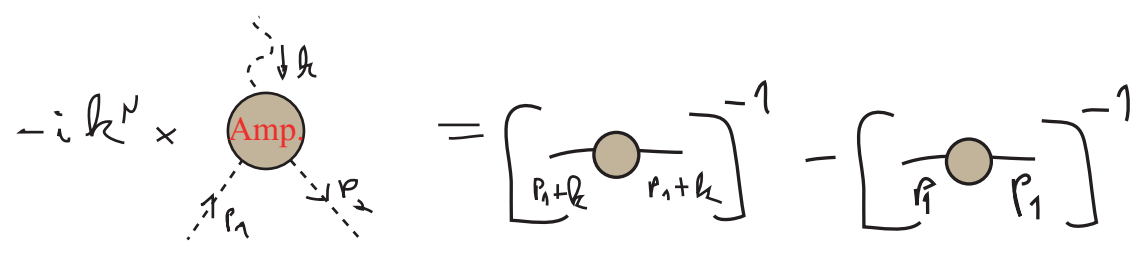
$$\Gamma_{ij;N}^{(3)}(p_1, p_2; k) \equiv e (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k - p_2) \Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; k)$$

$$-i k^N \Gamma_{ij;N}^{QED(3)}(p_1, p_2; k) = \left[ \Sigma_F^<(p_1+k) \right]^{-1} - \left[ \Sigma_F^<(p_1) \right]^{-1}$$

(eq. 27.1)

**Identidade de Ward-Takahashi**

Que, em diagramas, fica:

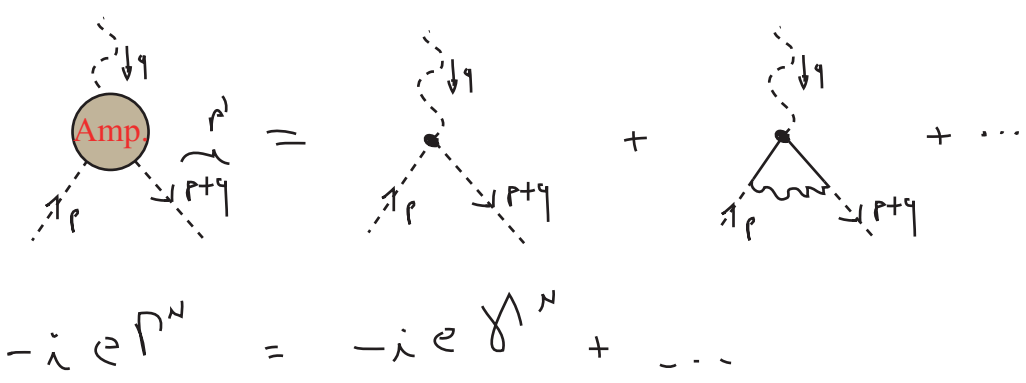


A partir da equação 25.1 podemos fazer outras combinações de derivações funcionais para obter relações entre diagramas com mais pontos ou diferentes campos.

## Correções Radiativas na QED

### Função de Vértice

(Peskin secs 6.2 e 6.3)



Considerando simplesmente a estrutura de Lorentz e a restrição oriunda da indentidade de Ward, podemos escrever uma forma geral para a função de vértice (veja Peskin, pg 186)

$$\Gamma^N = \gamma^N F_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

L.O.  $\rightarrow$   $F_1^{LO}(q^2) = 1$   
 $F_2^{LO}(q^2) = 0$  (eq. 27.2)

Fatores de Forma

L.O. - leading order (primeira contrib. não nula em teoria de perturbação)

Tanto  $F_1$  quanto  $F_2$  têm interpretação física. O espalhamento em um potencial eletrostático é dado por:

$$A_{\mu}^{EXT}(x) = (\phi(\vec{x}), 0, 0, 0) \quad A_{\mu}^{EXT}(q) = (2\pi \delta(q^0) \tilde{\phi}(\vec{q}), 0, 0, 0)$$

estático e varia muito pouco no espaço

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}(p') \Gamma^0 u(p) \tilde{\phi}(\vec{q})$$

(para lembrar como tratamos um potencial externo clássico, ver problema 4.4 do Peskin)

$\hookrightarrow \sim S(q)$

$q \rightarrow 0 \Rightarrow \Gamma^0 = \gamma^0 F_1(0)$

$$i\mathcal{M} = -ie F_1(0) \bar{u}(p') \gamma^0 u(p)$$

De onde vemos que  $F_1(0)$  é a carga do elétron, em unidades de  $e$ .  $\Rightarrow \boxed{F_1(0) = 1}$

(eq. 28.2)

$$\left( \begin{array}{l} F_1(q) = F_1^{LO}(q^2) + F_1^{>LO}(q^2) \\ F_1(0) = 1 + F_1^{>LO}(0) \end{array} \right)$$

Como ele já é 1 em primeira ordem pert., vemos que as correções a este fator devem ser 0 para  $q^2 = 0$

O mesmo pode ser feito para  $F_2$  em um campo vetorial constante:

$$A_{\mu}^{EXT}(x) = (0, \vec{A}(\vec{x}))$$

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}(p') \Gamma^i u(p) A^i(\vec{q})$$

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}(p') \Gamma^i u(p) A^i(\vec{q})$$

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix}$$

$q \rightarrow 0$   
 $\sim$  RELATIVIST.

$$i\mathcal{M} = -ie (2m) \cdot e \xi'^T \left( -\frac{1}{2m} \sigma^k [F_1(0) + F_2(0)] \right) \xi \underbrace{(-ie \epsilon^{ijk} q^i A^j(\vec{q}))}_{B^k(\vec{q})}$$

comparando com a aprox. de Born

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-p') i\mathcal{M} = \langle p' | iT | p \rangle = -ie \tilde{V}(q) 2\pi \delta(E_{p'} - E_p)$$

$\hookrightarrow$  A MENOS DE UM FATOR  $(2m) \delta^{(3)}(p-p')$

$$V(\vec{x}) = - \underbrace{\langle \vec{\mu} \rangle}_{\substack{\text{Momento} \\ \text{magnético} \\ \text{do elétron}}} \cdot \vec{B}^p(x)$$

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{e}{m} [1 + F_2(0)] \left\{ \vec{L} + \frac{\sigma}{2} \right\}$$

Spin do  $e^-$

Se escrevermos o momento magnético da forma usual:  $\vec{\mu} = g \left( \frac{e}{2m} \right) \vec{S}$

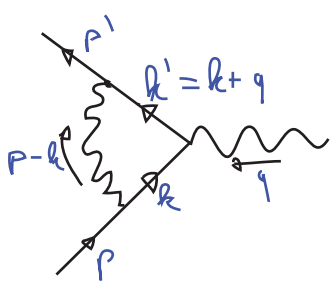
$$g = 2 + 2 F_2(0)$$

Vimos (eq 27.2) que  $F_2 = 0$  em primeira ordem pert. portanto  $g = 2$  nesta ordem. Mas ele será corrigido em ordens superiores:

$$g = 2 + \underbrace{O(\alpha)}_{\substack{\text{Momento} \\ \text{magnético} \\ \text{anômalo} \\ \text{do elétron}}} + \dots$$

Vamos calcular as correções de primeira ordem ao vértice:  $\Gamma^N = \gamma^N + \delta \Gamma^N$

Lembrando sempre que isto aparece em:



$$\bar{u}(p') (-ie \delta \Gamma^N) u(p) \frac{(-i) \not{q}}{q^2} \dots$$

$$\delta \Gamma^N = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ie \not{\epsilon}_\nu \gamma^N}{(k-p)^2 + i\epsilon} (-ie \not{\epsilon}^\nu) i \frac{(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^N i \frac{(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie \not{\epsilon}^\rho) =$$

$$\not{\epsilon}_\rho \gamma^\mu \gamma^\rho = -2 \gamma^\mu$$

$$\gamma^\nu \not{k} = \gamma^\nu \gamma^\rho k_\rho = [2g^{\nu\rho} - \gamma^\nu \gamma^\rho] k_\rho = 2k^\nu - \not{k} \gamma^\nu$$

$$-m (\gamma^\mu \not{k} + \not{k} \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k}' + \not{k}' \gamma^\mu) = -m (2k^\mu + 2k'^\mu) = -2m (k + k')^\mu$$

$$= 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[\not{k} \gamma^\mu \not{k}' + m^2 \not{0} - 2m(\not{k} + \not{k}')^\mu]}{[(k-p)^2 + i\epsilon][k^2 - m^2 + i\epsilon][k'^2 - m^2 + i\epsilon]} \quad (\text{eq. 30.1})$$

Para fazer esta integral usaremos o método conhecido como **parametrização de Feynman**. A idéia é transformar o denominador acima em um único polinômio de grau 2 em  $k$  (que por sua vez estará elevado a 3). Fica fácil ver com fazemos isso no caso da integral simples:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[xA + yB]^2}$$

Que poderia ser usada para integrar:

parâmetros de Feynman

$$\int d^4k \frac{1}{(k-p)^2 (k^2 - m^2)} = \int d^4k \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[x(k-p)^2 + y(k^2 - m^2)]^2} =$$

$$= \int d^4k \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[(x+y)k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - m^2 y]^2}$$

$$l \equiv k - xp \Rightarrow [l^2 - m^2 y]$$

$$d^4k = d^4l$$

ficaria bem fácil fazer a integral em  $L$ , uma vez que é esfericamente simétrica

Temos uma identidade mais geral para o caso de vários fatores no denominador:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n]^n} \quad (\text{eq. 30.2})$$

Aplicando isso ao denominador de 30.1 temos:

$$\frac{1}{[(k-p)^2 + i\epsilon][\underbrace{k^2 - m^2 + i\epsilon}_{(k+q)^2}][k^2 - m^2 + i\epsilon]} = \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3}$$

$$\begin{aligned} D &= x[k^2 - m^2 + i\epsilon] + y[\underbrace{k^2 - m^2 + i\epsilon}_{(k+q)^2}] + z[(k-p)^2 + i\epsilon] = \\ &= x(k^2 - m^2) + y(k^2 + 2k \cdot q + q^2 - m^2) + z(k-p)^2 + \underbrace{(x+y+z)}_1 i\epsilon = \\ &= xk^2 - xm^2 + yk^2 + 2yk \cdot q + yq^2 - ym^2 + zk^2 - 2zk \cdot p + zp^2 + i\epsilon = \\ &= \underbrace{k^2 + 2yk \cdot q - 2zk \cdot p + zp^2}_{\ell^2} + yq^2 - xm^2 - ym^2 + i\epsilon = \\ &\quad \downarrow \ell = k + yq - zp \\ &= \underbrace{\ell^2 + 2yq \cdot p - y^2 p^2 - y^2 q^2 + zp^2 + yq^2 - xm^2 - ym^2}_{\ell^2 + i\epsilon - \Delta} = \\ &= \ell^2 + i\epsilon - \Delta \end{aligned}$$

"a bit of algebra"

$$\begin{aligned} -\Delta &= 2yq \cdot p - \underbrace{y^2 p^2}_{m^2} - \underbrace{y^2 q^2}_{m^2} + zp^2 + yq^2 - xm^2 - ym^2 = \\ &= p \cdot q = p \cdot (p' - p) = p \cdot p' - p^2 = p \cdot p' - m^2 \\ &= 2yq \cdot p \cdot p' - 2yq \cdot m^2 - \underbrace{y^2 m^2}_{m^2} - y^2 q^2 + zm^2 + yq^2 - xm^2 - ym^2 = \\ &= m^2(-2yq + z - x - y - y^2) + \underbrace{2yq \cdot p \cdot p'}_{\substack{\uparrow \\ \text{Lo } 2p \cdot p' = 2m^2 - q^2}} - y^2 q^2 + yq^2 = \\ &= q^2 = (p' - p)^2 = \underbrace{p'^2 + p^2}_{2m^2} - 2p \cdot p' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= m^2 \left( \underbrace{-2xy + z^2}_{-(1-z)^2} - x - y - z^2 + 2yz \right) + \underbrace{(-xy - y^2 + y)}_{xy} q^2 = \\
 &= -(1-z)^2 m^2 + xy q^2
 \end{aligned}$$

$q^2 < 0$

$$\Delta = -xy q^2 + (1-z)^2 m^2 > 0$$

$$D = \not{\partial}^2 + i\varepsilon - \Delta = \not{\partial}^2 + i\varepsilon + xy q^2 - (1-z)^2 m^2$$

$$\int \pi^N = 2i e^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} [\not{m}]$$

Falta fazer a mudança de variáveis no numerador

$$[\not{m}] = [\not{\epsilon} \not{\gamma}^N \not{\epsilon}' + m^2 \not{\sigma}^N - 2m(\not{\epsilon} + \not{\epsilon}')^N]$$

Isso envolve um bocado de álgebra, é necessário lembrar que:

$$\text{(I)} \quad D = D(\ell^2) \Rightarrow \begin{cases} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^N}{D^3} = 0 \\ \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^N \ell^\nu}{D^3} = \frac{1}{4} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{g^{\nu N} \ell^2}{D^3} \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad [\not{m}] \text{ está entre espinores: } \bar{u}(p') [\not{m}] u(p)$$

portanto podemos trocar  $\not{p} u(p) = m u(p)$

De resto é só usar relações de comutação e as relações entre os momentos para chegar em:

$$[\not{m}] = \left[ \not{\gamma}^N \left( -\frac{1}{2} \ell^2 + (1-x)(1-y) q^2 + (1-2z-z^2) m^2 \right) + (\not{p}' + \not{p}) \cdot m z (z-1) - \right.$$



$$+ \gamma^\mu \cdot m (z-2)(x-y) ]$$

pois é ímpar sobre a troca  $x \leftrightarrow y$  (todo o resto da integral é par)

Usando a identidade de Gordon:

$$\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[ \frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p)$$

podemos fazer:  $p'^\mu + p^\mu \rightarrow 2m \delta^\mu - i \sigma^{\mu\nu} q_\nu$

obtendo:

$$\Gamma^\mu = 2i e^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} x$$

$$x \left[ \gamma^\mu \left( -\frac{1}{2} \ell^2 + (1-x)(1-y) q^2 + (1-y) z + z^2 \right) m^2 + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} (2m^2 z(1-z)) \right]$$

(eq. 33.1)

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2)$$

Fica bem mais fácil fazer a integral em 4D caso possamos passar para coordenadas esféricas em 4D, podemos fazer isso se passarmos para o espaço Euclidiano por meio de uma **rotação de Wick**

$$l^0 = i l_E^0$$

$$d^4 l = i d^4 l_E \quad d^3 \vec{l}_E = i d^3 \vec{l}$$

$$\vec{l} = \vec{l}_E$$

$$l^2 = - (l_E^0)^2 - (\vec{l}_E)^2 = - l_E^2$$

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \Delta]^m} = i \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[-l_E^2 - \Delta]^m} = \frac{i}{(-1)^m} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 l_E \frac{1}{[l_E^2 + \Delta]^m}$$

$$= \frac{\lambda(-1)^m}{(2\pi)^4} \underbrace{\int d^4 \ell}_{2\pi^2} \underbrace{\int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^3}{[\ell_E^2 + \Delta]^m}}_{\substack{\mu = \ell_E^2 + \Delta \\ d\mu = 2\ell_E d\ell_E}} = \int_\Delta^{\infty} \frac{d\mu}{2} \frac{\mu - \Delta}{(\mu)^m} = \frac{1}{2} \frac{\Delta^{2-m}}{(m-1)(m-2)}$$

$m \geq 3$

$$= \frac{\lambda(-1)^m}{(2\pi)^4} \cdot 2\pi^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\Delta^{2-m}}{(m-1)(m-2)} = \frac{\lambda(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-1)(m-2)} \frac{1}{\Delta^{m-2}}$$

(eq. 34.1)

$m \geq 3$

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta]^m} = i \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \frac{-\ell_E^2}{[-\ell_E^2 - \Delta]^m} = \frac{\lambda(-1)^{m+1}}{2^3 \pi^2} \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^5}{[\ell_E^2 + \Delta]^m} =$$

$$\int_\Delta^{\infty} \frac{d\mu}{2} \frac{(\mu - \Delta)^2}{\mu^m} = \frac{\Delta^{3-m}}{(m-3)(m-2)(m-1)}$$

$m \geq 4$

$$= \frac{\lambda(-1)^{m+1}}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-3)(m-2)(m-1)} \frac{1}{\Delta^{m-3}}$$

(eq. 34.2)

Aqui temos um problema, já que estamos justamente interessados em integrar termos com  $D^3$  no denominador e a integral é divergente neste caso

$$\int_\Delta^\infty \frac{d\mu}{2} \frac{\mu^2 - 2\mu\Delta + \Delta^2}{\mu^3} = \lim_{K \rightarrow \infty} \ln \left[ \frac{K}{\Delta} \right]$$

Estudaremos o significado desta divergência em breve. Por enquanto vamos dar um jeito de isolar esta divergência na integral, este procedimento é chamado de **regularização** e existem muitas técnicas diferentes para executá-la. O importante é não confundir este procedimento com a renormalização, tudo que a regularização faz é colocar a resposta numa forma em que a divergência fique mais fácil de analisar, separada de uma parte finita (o que ajuda muito na hora de renormalizar). O método que usaremos é conhecido como **regularização de Pauli-Villars** e consiste em introduzir uma nova partícula fictícia de massa  $\Lambda$ . Nosso objetivo é fazer a seguinte modificação no propagador do fóton que está no loop:

$$\frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(k-p)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}$$

Note que recuperamos o propagador usual fazendo  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$

mas para  $k^2 \gg \Lambda^2$  podemos desprezar  $\Lambda^2$  e os dois propagadores se cancelam.

Se voltarmos na pg 31 vemos que ganhamos uma nova contribuição em que a única mudança introduzida é (nada muda nos numeradores):

$$\Delta_\lambda = -xyq^2 + (1-z)^2 m^2 + z\Lambda^2$$

De forma que agora temos:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left( \frac{l^2}{[l^2 - \Delta]^3} - \frac{l^2}{[l^2 - \Delta_\lambda]^3} \right) = \frac{2i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty dl_E \left( \frac{l_E^5}{[l_E^2 + \Delta]^3} - \frac{l_E^5}{[l_E^2 + \Delta_\lambda]^3} \right) = \\ & = \frac{2i}{(4\pi)^2} \lim_{K \rightarrow \infty} \left[ \int_\Delta^K \frac{d\mu}{2} \left( \frac{\mu^2 - 2\mu\Delta + \Delta^2}{\mu^3} \right) - \int_{\Delta_\lambda}^K \frac{d\mu}{2} \left( \frac{\mu^2 - 2\mu\Delta_\lambda + \Delta_\lambda^2}{\mu^3} \right) \right] = \\ & = \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{K \rightarrow \infty} \left[ \ln \left[ \frac{K}{\Delta} \right] + \frac{3}{2} - 2 \frac{\Delta}{K} + \frac{\Delta^2}{2K^2} - \left( \ln \left[ \frac{K}{\Delta_\lambda} \right] + \frac{3}{2} - 2 \frac{\Delta_\lambda}{K} + \frac{\Delta_\lambda^2}{2K^2} \right) \right] = \\ & = \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \left[ \frac{\Delta_\lambda}{\Delta} \right] \end{aligned}$$

As integrais finitas mudam da seguinte forma:

$$\int \frac{d^3 \ell}{(2\pi)^3} \left( \frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^3} - \frac{1}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda]^3} \right) \stackrel{\text{eq 34.1 / } m=3}{=} -\frac{i}{2(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta_\Lambda} \right)$$

$\mathcal{O}(\Lambda^2)$  ←

podemos ignorar esta modificação se  $\Lambda \gg 1 \Delta$

Voltando com os resultados das integrais na equação 33.1, temos:

$$\delta \Gamma^N = 2i e^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \gamma^\mu \left[ \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\Delta_\Lambda}{\Delta} \right] + \frac{1}{2\Delta} \left( (1-x)(1-y)q^2 + (1-yz + yz^2) m^2 \right) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\Delta} \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu (2m^2 z(1-z))}{2m} \right]$$

$\rightarrow F_2$

$$\Delta_\Lambda \underset{\Lambda \gg 1}{\sim} \approx \Lambda^2$$

$$\frac{e^2}{4\pi} = \alpha$$

constante de estrutura fina

$$\delta \Gamma^N = \gamma^\mu \delta F_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta F_2(q^2)$$

(eq. 36.1)

$$\delta F_1(q^2) = \left( \frac{\alpha}{2\pi} \right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[ \frac{\Lambda^2}{\Delta} \right] + \frac{1}{\Delta} \left[ (1-x)(1-y)q^2 + (1-yz + yz^2) m^2 \right] \right\}$$

(eq. 36.2)

$$\delta F_2(q^2) = \left( \frac{\alpha}{2\pi} \right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{\Delta} 2m^2 z(1-z)$$

(eq. 36.3)

### Recapitulando o método usado:

- (1) Usamos os **diagramas de Feynman** para escrever a amplitude
- (2) Combinamos os denominadores dos propagadores usando os **parâmetros de Feynman**
- (3) Completamos quadrados no denominador, mudando a variável de integração para  $\ell$  (somando uma constante a  $k$ )
- (4) Passamos uma **numerador para  $\ell$**  e notamos que as integrais das potências ímpares são nulas. As potências pares são escritas em termos de  $\ell^2, \ell^4, \dots$  (o uso da equação de movimento ajuda muito a simplificação do numerador)
- (5) fazemos a **rotação de Wick** e integramos no espaço Euclideano. Caso as integrais sejam divergentes, usamos algum tipo de **regularização**.

Notamos que  $\int \bar{F}_2$  não tem qualquer divergência, de fato podemos calculá-lo:

$$\begin{aligned} \int \bar{F}_2(0) &= \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2k^2 y(1-z)}{(1-y)^2 m^2} = \\ & \quad \swarrow x_0 = 1-y-z \\ & \quad 0 < x_0 < 1 \Rightarrow 0 < 1-y-z < 1 \Rightarrow 1-z > y > -z \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{2y}{1-y} = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0,0011617 \end{aligned}$$

O valor experimental atual é 0,00115965218073 (28) - tão preciso que é necessário considerar as correções  $O(\alpha^4)$ . Uma vez consideradas, estas correções concordam com este valor em  $1/10^8$

$\int \bar{F}_1$ , no entanto, contém divergências de dois tipos. A primeira, e mais óbvia, está ligada a grandes momentos no loop e é chamada de **divergência ultravioleta**. Na expressão que obtivemos ela aparece quando retiramos a partícula fictícia da teoria, fazendo:

$$\Lambda \rightarrow \infty$$

$$\int \bar{F}_1 \sim L_N \left[ \frac{\Lambda}{\Delta} \right]$$

A outra está associada a momentos muito pequenos do fóton no loop, e é chamada de **divergência no infravermelho**. Ela fica evidente se tomarmos, por exemplo, o seguinte termo de  $F_1$  e fizermos  $q = 0$

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{\Delta} \left[ (1-y+z^2) m^2 \right] \quad \Delta = -2xy q^2 + (1-z)^2 m^2$$

$$q^2=0 \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{(1-y+z)^2}{(1-y)^2} =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{-2 + (1-z)(3-z)}{(1-y)^2} = \int_0^1 dz \frac{-2 + (1-z)(3-z)}{(1-z)}$$

→ problema em  $z=1$

É relevante notar que esta divergência não existiria caso o fóton tivesse uma massa  $\mu$ , já que nesse caso teríamos:

$$\Delta(q^2) = -xy q^2 + (1-y)m^2 + y\mu^2 \Rightarrow \Delta(q^2=0) = (1-y)m^2 + y\mu^2$$

De fato, divergências infravermelhas estão ligadas a partículas sem massa (e o quão fácil é produzi-las) e aparecerão em teorias que as contenham.

### Divergência Infravermelha

Começaremos pela divergência de baixas energias. Para facilitar a discussão, vamos assumir que a divergência ultravioleta foi devidamente "resolvida", por enquanto isso significa forçar a condição da eq. 28.2:

$$F_1(0) = 1$$

$$\text{Como: } F_1(q^2) = \underbrace{F_1^e(q^2)}_1 + \underbrace{\delta F_1(q^2)}_{O(\epsilon^3)} + \dots$$

Precisamos que a correção se anule para  $q^2=0$ . O jeito mais rápido de conseguir isso é redefinindo a correção para subtrair o infinito:

$$\delta F_1'(q^2) = \delta F_1(q^2) - \delta F_1(0)$$

Com isso obtemos

$$\delta F_1'(q^2) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{\Delta} \right] + \frac{1}{\Delta} \left[ (1-x)(1-y)q^2 + (1-y+z)^2 m^2 \right] \right.$$

$$\left. - \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{\Delta_0} \right] - \frac{1}{\Delta_0} \left[ (1-y+z)^2 m^2 \right] \right\} =$$

$$\Delta_0 = (1-y)^2 m^2$$

$$= \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[ \frac{\Delta_0}{\Delta} \right] + \frac{(1-x)(1-y)q^2 + (1-yz+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 - xyq^2} + \right. \\ \left. - \frac{(1-yz+z^2)m^2}{m^2(1-z)^2} \right\}$$

É claro que a esta altura esta subtração "a força" é totalmente arbitrária e nos deixa com uma profunda sensação de injustiça, mas quando tratarmos da divergência ultravioleta veremos que ela é justificada. Portanto aguarde mais um pouco.

Voltando à divergência infravermelha, vimos que esta não existe no caso de um fóton com massa. Portanto, uma forma de "regularizar" esta divergência é dar uma pequena massa  $\mu$  para o fóton depois ver o que acontece quando fazemos o limite  $\mu \rightarrow 0$

Temos:

$$SF_1' = \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[ \frac{\Delta_0 + \mu^2 z}{\Delta + \mu^2 z} \right] + \frac{(1-x)(1-y)q^2 + (1-yz+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 - xyq^2 + \mu^2 z} + \right. \\ \left. - \frac{(1-yz+z^2)m^2}{m^2(1-z)^2 + \mu^2 z} \right\}$$

REGULAR  
EM  $\mu \rightarrow 0$

Como estamos apenas interessados no limite  $\mu \rightarrow 0$  desprezaremos tudo que não diverge neste limite. A divergência vem dos termos  $(1-z)^2$ , portanto ela ocorre em um "canto" do espaço de parâmetros de Feynman:

$$\left. \begin{array}{l} z \sim 1 \\ x \sim 0 \\ y \sim 0 \end{array} \right\} \text{podemos fazer estas substituições no numerador e no } z \text{ que multiplica } \mu$$

$$SF_1' = \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{(1-z)^2 m^2 - xyq^2 + \mu^2} - \frac{-2m^2}{m^2(1-z)^2 + \mu^2} \right\} = \\ = \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right) \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{(1-z)^2 m^2 - (1-z-y)yq^2 + \mu^2} + \frac{2m^2}{m^2(1-z)^2 + \mu^2} \right\} =$$

$$y = (1-z)\xi = w\xi$$

$$w = (1-z)$$

$$z = 1-w$$

$$dz dy = -w dw d\xi$$

$$\begin{aligned} z=0 \rightarrow w=1 & \Rightarrow \int_1^0 dw \int_0^1 d\xi \Rightarrow y=w \rightarrow \xi=1 \\ z=1 \rightarrow w=0 & \Rightarrow y=0 \rightarrow \xi=0 \end{aligned}$$

$$= \left( \frac{\alpha}{2\pi} \right) \int_0^1 w dw \int_0^1 d\xi \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{w^2 m^2 - w(1-\xi)\xi q^2 + N^2} + \frac{2m^2}{m^2 w^2 + N^2} \right\} =$$

$$= \left( \frac{\alpha}{4\pi} \right) \int_0^1 d\xi \int_0^1 dw^2 \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{w^2(m^2 - (1-\xi)\xi q^2) + N^2} + \frac{2m^2}{m^2 w^2 + N^2} \right\} =$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 d\xi \left[ \frac{-2m^2 + q^2}{m^2 - q^2 \xi(1-\xi)} \text{Log} \left( \frac{m^2 - q^2 \xi(1-\xi) + N^2}{N^2} \right) + 2m^2 \frac{1}{m^2} \text{Log} \left( \frac{m^2 + N^2}{N^2} \right) \right] =$$

Para  $N^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \text{LN} \left( \frac{m^2 - q^2 \xi(1-\xi)}{N^2} \right) \equiv \text{LN} \left( \frac{m^2 - q^2}{N^2} \right)$

$$= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 d\xi \left[ \frac{-2m^2 + q^2}{m^2 - q^2 \xi(1-\xi)} + 2 \right] \text{LN} \left( \frac{m^2 - q^2}{N^2} \right) =$$

Os detalhes do numerador não interessam, indicaremos desta forma

$$\Delta F_1 = - \frac{\alpha}{2\pi} \underbrace{\int_0^1 d\xi \left[ \frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2 \xi(1-\xi)} - 1 \right]}_{f_{\text{IR}}(q^2)} \text{LN} \left( \frac{m^2 - q^2}{N^2} \right)$$

Este fator de forma modifica a carga, então ele é transportado diretamente para a seção de choque:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{L.O.}} \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \text{LN} \left( \frac{m^2 - q^2}{N^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right]$$

↳ Resultado em "Leading Order" (primeira ordem na expansão pert.)



Como  $\begin{cases} q^2 < 0 \\ 0 < \int (1-\xi) < \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow 1 < \frac{m^2 + 1q^{3/2}}{m^2 + 1q^{3/4}} < \frac{m^2 + 1q^{3/2}}{m^2 + 1q^{3/2}(1-\xi)} = \frac{m^2 - q^2}{m^2 - q^2(1-\xi)}$

$\therefore \rho_{\text{IR}}(q^2) > 0$

Portanto, não só temos uma seção de choque enorme, mas ainda por cima ela é negativa. Para entender melhor o que está acontecendo, vamos calcular  $f_{\text{IR}}$  no limite de alto  $q^2$

$$\int_0^1 d\xi \left[ \frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} - 1 \right] \xrightarrow{q^2 \rightarrow -\infty} \int_0^1 d\xi \left( \frac{-q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} - 1 \right) =$$

$$= \frac{2(-q^2)}{\sqrt{(-q^2)(-q^2+4m^2)}} \text{COTH}^{-1} \left( \sqrt{\frac{1 + \frac{4m^2}{(-q^2)}}{(-q^2)}} \right) - 1 =$$

$$= \text{LN} \left( \frac{1 - 2\frac{m^2}{q^2} + 1}{1 - 2\frac{m^2}{q^2} - 1} \right) - 1 = \text{LN} \left( -\frac{q^2}{m^2} \right) - 1$$

*note que abandonamos a notação  $\text{LN}(-q^2/m^2)$  porque no limite de grandes  $-q^2$ , só estamos interessados nos coeficientes de  $\text{LN}(-\frac{q^2}{m^2}) \approx \text{LN}(-q^2)$*

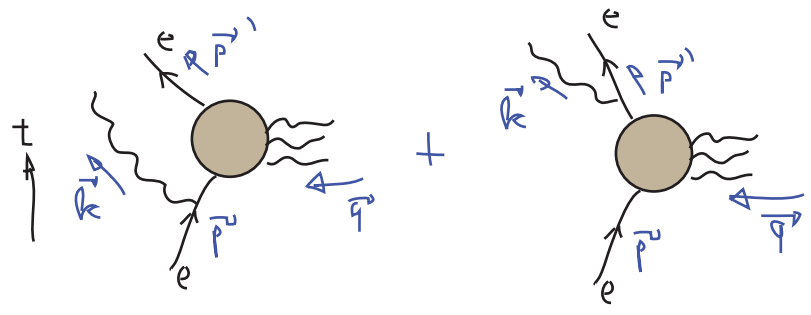
*O  $\text{LN}(m^2)$  é justamente o "1" que foi desprezado aqui*

Temos enfim:

$$F_1(-q^2 \rightarrow \infty) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left( -\frac{q^2}{m^2} \right) \ln \left( -\frac{q^2}{\mu^2} \right) + O(\alpha^2)$$

(eq. 41.1)

Esta estrutura de dois logaritmos (chamada de "Sudakov double logarithm,") aparece em outro cálculo famoso de QED, o "soft bremsstrahlung", a radiação emitida em baixas frequências por um eletron acelerado. Do ponto de vista de diagramas de Feynman, estamos falando do seguinte processo:



Não calcularemos isto em detalhes (se estiver interessado, olhe a sec 6.1 do Peskin) - o importante é saber que, no limite em que os fotons emitidos tem pouco momento:

$$|k^\nu| \ll |p' - p| = |q^\nu|$$

$$\underbrace{i\mathcal{M}}_{\text{amplitude total}} = \underbrace{i\mathcal{M}_{\text{el}}}_{\text{amplitude do espalhamento elástico (sem emissão de fóton)}} \cdot \underbrace{f_r}_{\text{fator que dá conta da emissão de 1 fóton}}$$

na seção de choque ocorre algo semelhante

$$d\sigma(p \rightarrow p' + \gamma) = d\sigma(p \rightarrow p') \cdot \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} \sum_{\lambda=1,2} e^2 \left| \frac{p' \cdot \epsilon^{(\lambda)}}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon^{(\lambda)}}{p \cdot k} \right|^2$$

polarizações do fóton

densidade de probabilidade para emissão de um fóton com momento k

Esta probabilidade não pode ser integrada para qualquer k, precisamos respeitar a premissa de que k é pequeno colocando um limite superior na integral:

$$|\vec{k}| < |\vec{q}| = |\vec{p} - \vec{p}'|$$

Com um pouco de álgebra, conseguimos colocar a integral na forma:

$$P_{\text{prob}} \approx \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{|\vec{q}|} dk \frac{1}{k} I(\vec{v}, \vec{v}')$$

velocidades associadas a  $\vec{p}, \vec{p}'$

função que não depende de k

probabilidade total de emitir um fóton com  $0 < |\vec{k}| < |\vec{q}|$

Esta probabilidade diverge! Temos uma **infinita probabilidade de emitir um fóton de baixo momento** ("soft photons"). Este fato é conhecido como divergência infravermelha da QED. A regularização possível é novamente introduzir uma pequena massa para o fóton, neste caso obtemos:

$$\int_0^{|\vec{q}|} d|\vec{k}| \frac{1}{|\vec{k}|} = \int_0^{|\vec{q}|} \frac{d|\vec{k}|^2}{2|\vec{k}|^2} = \int_{\mu^2}^{|\vec{q}|^2 + \mu^2} \frac{dE^2}{2E^2} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{|\vec{q}|^2 + \mu^2}{\mu^2} \right)$$

No limite:  $|\vec{q}|^2 \rightarrow \infty$   $\left\{ \begin{array}{l} |\vec{q}|^2 \approx -q^2 \end{array} \right.$  (Peskin pg 201)

queremos comparar com 41.1, onde também tomamos este limite. Isto significa olhar a região em que o elétron sofreu uma grande mudança de momento.

$$I(\vec{v}, \vec{v}') = 2 \ln \left( \frac{q^2}{m^2} \right) \approx 2 \ln \left( -\frac{q^2}{m^2} \right)$$

Assim, temos:

$$d\sigma(p \rightarrow p' + \gamma) \underset{-q^2 \rightarrow \infty}{\sim} d\sigma_0(p \rightarrow p') \cdot \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(-\frac{q^2}{\nu^2}\right) \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right)$$

(eq. 43.1)

que é a expressão que queríamos, comparemos isto com o que obtivemos em 41.1

$$(41.1) \rightarrow F_1(-q^2 \rightarrow \infty) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) \ln\left(-\frac{q^2}{\nu^2}\right) + O(\alpha^2)$$

Que modifica a seção de choque de forma que:

$$d\sigma \underset{-q^2 \rightarrow \infty}{\sim} d\sigma_0(p \rightarrow p') \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(-\frac{q^2}{\nu^2}\right) \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) + O(\alpha^2) \right]$$

$d\sigma \sim e^2 \rightarrow d\sigma \sim e^2 F_1^2 \sim \left[ 1 + 2 \frac{\alpha}{\pi} \ln \ln + \alpha^2 \ln^2 \ln + \dots \right]$

Vemos que, pelo menos até ordem  $\alpha$ , a soma destas duas seções de choque está livre de divergências já que as contribuições se cancelam. Mas o que uma tem a ver com a outra? O fato é que, do ponto de vista prático, não faz muito sentido diferenciar "medi um elétron" de "medi um elétron + um fóton quase sem energia", até porque fótons de energia infinitamente pequena são objetos estranhos (sem momento, nem energia e nem massa). Qualquer medida vai ter uma sensibilidade máxima a fótons "soft", que podemos expressar em termos de uma energia limite  $E_\ell$ , abaixo da qual o fóton não é observado. Assim, a seção de choque total de espalhamento de elétrons é dada por:

$$\frac{d\sigma_{\text{Exp}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p') + \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p' + \gamma(\ell < E_\ell))$$

Se abandonamos o limite  $-q^2 \rightarrow \infty$  obtemos:

A integral em  $k$  na página 42 é feita só até  $E_\ell$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{Exp}}}{d\Omega} &= \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(-\frac{q^2/m^2}{\nu^2}\right) P_{\text{IR}}(q^2) + \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{E_\ell^2}{\nu^2}\right) P_{\text{IR}}(q^2) + \dots \right] \\ &= \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} P_{\text{IR}}(q^2) \ln\left(\frac{-q^2/m^2}{E_\ell^2}\right) + O(\alpha^2) \right] \end{aligned}$$

(eq. 43.2)

Onde já não temos mais  $\mu$ , e podemos tomar o limite  $\nu \rightarrow 0$  sem medo de divergências

É possível mostrar que este cancelamento ocorre para todas as ordens de perturbação (Peskin sec 6.5), neste caso a seção de choque medida é:

$$\frac{d\sigma_{\text{Exp}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \text{EXP} \left[ -\frac{\alpha}{\pi} \ln(q^2) L_N \left( -\frac{q^2}{E_e^2} \right) \right]$$

### Auto-energia do elétron

(Peskin 7.1)

Resta tratar a divergência ultravioleta do vértice elétron-elétron-fóton, veremos agora que ela está ligada às correções radiativas do propagador do elétron. Vamos a elas:

Primeiramente vale lembrar o resultado obtido na pag 5:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle = i \frac{Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

$$\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2} u^s(p)$$

↳  $m^2 = m_0^2 + \delta m^2$

↳  $1 + \delta Z_2$

Nosso objetivo é agora obter as contribuições perturbativas para  $Z_2$  e  $m$

$$\langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | \Omega \rangle = \underbrace{\text{---} \text{---}}_p + \underbrace{\text{---} \text{---} \text{---} \text{---}}_{k \quad p-k \quad p} + \dots$$

$$\frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left[ -i \Sigma_2(p) \right] \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

basicamente é a contribuição de ordem  $e^2$  para um objeto análogo ao que chamamos de  $M^2$  na pág 13

$$-i \Sigma_2(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m_0)}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \gamma_\mu \frac{-i}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

"massa" do fóton no fim faremos:  $\mu^2 \rightarrow 0$

↳ ordem perturbativa

Temos, novamente, que usar o maquinário desenvolvido para o cálculo de loops. A parametrização de Feynman fornece (já integrando em  $y$  com o uso da delta):

$$\frac{1}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - 2xkp + x^2p^2 - x\mu^2 - (1-x)m_0^2 + i\epsilon]^2}$$

o termo linear em  $\ell$  no numerador já foi cancelado

$$\ell = k - \kappa p$$

$$-i \Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2\kappa \not{p} + 4m_0}{[\ell^2 - \Delta_\nu + i\epsilon]^2}$$

$$\Delta_\nu = -\kappa(1-\kappa)p^2 + \kappa\nu^2 + (1-\kappa)m_0^2$$

Podemos usar a regularização de Pauli-Villars:

$$\frac{1}{(p-k)^2 - \nu^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{(p-k)^2 - \nu^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(p-k)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}$$

$$-i \Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2\kappa \not{p} + 4m_0}{[\ell^2 - \Delta_\nu + i\epsilon]^2} - e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2\kappa \not{p} + 4m_0}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda + i\epsilon]^2}$$

E fazendo a rotação de Wick:

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{\ell^2 - \Delta_\nu} - \frac{1}{\ell^2 - \Delta_\Lambda} \right] = \frac{i}{(4\pi)^2} \text{Ln} \left( \frac{\Delta_\Lambda}{\Delta_\nu} \right)$$

$$\Delta_\Lambda \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \kappa \Lambda^2$$

$$\Sigma_2(p) = \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^1 dx (2m_0 - \kappa \not{p}) \text{Ln} \left( \frac{\kappa \Lambda^2}{(1-\kappa)m_0^2 + \kappa\nu^2 - \kappa(1-\kappa)p^2} \right)$$

(eq. 45.1)

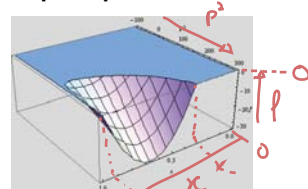
Podemos entender a estrutura analítica desta correção. A função Ln tem uma ramificação a partir do ponto em que seu argumento fica negativo, como o numerador é positivo a condição é:

$$f(\kappa, p^2) = (1-\kappa)m_0^2 + \kappa\nu^2 - \kappa(1-\kappa)p^2 < 0$$

$0 < \kappa < 1 \Rightarrow (>0) (>0) \rightarrow$  só será possível acima de algum valor mínimo de  $p^2 > 0$

Em termos de  $\kappa$ , a função  $f$  é uma parábola cujo mínimo é determinado por  $p^2$

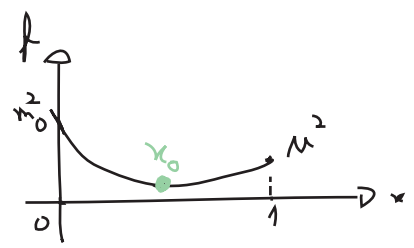
$$f(\kappa, p^2) = p^2 \kappa^2 + (\nu^2 - p^2 - m_0^2) \kappa + m_0^2$$



$$\frac{d}{dx} f(x, p^2) = 2x p^2 + m_0^2 - p^2 - m_0^2 = 0$$

$$\hookrightarrow x_0 = \frac{m_0^2 + p^2 - \mu^2}{2p^2}$$

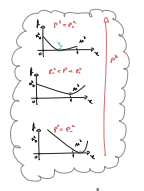
$$f(x_0, p^2) = -\frac{(m_0^2 - \mu^2)^2}{4p^2} + \frac{1}{2}(m_0^2 + \mu^2) - \frac{1}{4}p^2$$



O mínimo passa para baixo de zero em:

$$f(x_0, p^2) = 0 \rightarrow p_{\pm}^2 = (m_0 \pm \mu)^2$$

$$f < 0 \leftrightarrow \begin{cases} p^2 > p_+^2 \\ p^2 < p_-^2 \end{cases}$$



$$x_0(p_-^2) = \frac{m_0}{m_0 - \mu} \Rightarrow x = \frac{m_0}{m_0 - \mu} > 1$$

$$x_0(p_+^2) = \frac{m_0}{m_0 + \mu} \Rightarrow x = \frac{m_0}{m_0 + \mu} < 1$$

como  $f(1, p^2) = \mu^2 > 0 \forall p^2$  não há como uma região negativa passar de  $x > 1$  para  $x < 1$

Logo, para  $0 < x < 1$  temos uma ramificação que em:  $p^2 \geq (m_0 + \mu)^2$

o que está de acordo com o que vimos na pg 5 - temos uma ramificação a partir da energia em que podemos produzir duas partículas reais (nessa caso um elétron de massa  $m_0$  e um fóton de massa  $\mu$ )

Também é possível encontrar o polo, basta seguir o mesmo procedimento que usamos no caso do campo escalar para somar as contribuições 1PI (pg 13)

$$-i \Sigma(p) = -i \bar{\Sigma}(p) = \text{1PI} = \dots = 0$$

$\text{com } \langle \Omega | T \{ \bar{\psi}(x) \psi(x) \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T \{ j(x) \} | \Omega \rangle$

$$= \text{---} + \underbrace{\text{---} + \text{---}}_{-i \Sigma_x} + \underbrace{\text{---} + \text{---}}_{-i \Sigma_y} + \dots =$$

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(x) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \text{---} \rightarrow \text{---} =$$

$$= \text{---} + \text{---} \text{1PI} + \text{---} \text{1PI} \text{1PI} + \text{---} \text{1PI} \text{1PI} \text{1PI} + \dots =$$

$$= \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(p)} \rightarrow$$

A massa física é dada por:

$$\left[ \not{p} - m_0 - \Sigma(p) \right]_{\not{p} = m} = 0 \quad (\text{eq. 46.1})$$

$$\delta m = m - m_0 = \sum (\not{p} = m)$$

Bem perto do polo vale:

$$\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p}) \approx (\not{p} - m) \cdot \left( 1 - \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} \right) + \mathcal{O}((\not{p} - m)^2)$$

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \frac{i \left( 1 - \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} \right)^{-1}}{\not{p} - m} = \frac{i (\not{p} + m) \left( 1 - \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}} \right)^{-1}}{p^2 - m^2}$$

Comparando com o resultado obtido para o propagador completo (pg 5):

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{i p x} = \frac{i Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$$

$$Z_2^{-1} = 1 - \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} \quad (\text{eq. 47.1})$$

rigorosamente seria  $m$ , mas a diferença entre  $m$  e  $m_0$  é proporcional a  $\alpha$ , o que já é uma correção superior (uma vez que já temos  $\alpha$  na frente de tudo)

Em ordem  $\alpha$ , as correções são:

$$\delta m = \sum_2 (\not{p} = m_0) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (2m_0 - x m_0) L_N \left( \frac{x \Lambda^2}{(1-x)m_0^2 + x \Lambda^2 - x(1-x)m_0^2} \right) =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi} m_0 \int_0^1 dx (2-x) L_N \left( \frac{x \Lambda^2}{(1-x)^2 m_0^2 + x \Lambda^2} \right)$$

$I_\Lambda$

mathematica  
Integrate[(Alpha)/2/Pi\*m0\*(2-x)\*Log[x\*(CapitalLambda)^2/(1-x)^2\*m0^2+x\*(Mu)^2],{x,0,1},Assumptions->{CapitalLambda>0, m0>0, Mu>0}]

$$I_\Lambda = \frac{1}{8 m_0^3 \pi \sqrt{4 m_0^2 - \mu^2}}$$

$$\alpha \left( 2 \mu (-8 m_0^4 - 2 m_0^2 \mu^2 + \mu^4) \text{ArcTan} \left[ \frac{\mu}{\sqrt{4 m_0^2 - \mu^2}} \right] - \right.$$

$$\left. 2 \mu (-8 m_0^4 - 2 m_0^2 \mu^2 + \mu^4) \text{ArcTan} \left[ \frac{-2 m_0^2 + \mu^2}{\mu \sqrt{4 m_0^2 - \mu^2}} \right] + \right.$$

$$\left. \sqrt{4 m_0^2 - \mu^2} \left( 3 m_0^4 + 2 m_0^2 \mu^2 - 12 m_0^4 \text{Log} \left[ \frac{m_0}{\Lambda} \right] - 2 \mu^4 \text{Log} \left[ \frac{\mu}{m_0} \right] \right) \right)$$

Primeiramente, notemos que não há divergência quando  $\Lambda \rightarrow 0$

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} \delta m = \frac{3 \alpha m_0}{8 \pi} \left( 1 + 2 \log \left[ \frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right] \right) \quad \text{... } \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\Lambda} \right) = \frac{\pi}{2}$$

E que, de qualquer forma, a divergência ultravioleta está em um termo que independe de  $\mu$

$$\delta m \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{3 \alpha m_0}{4 \pi} \log \left[ \frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right]$$

Temos então a massa do eletron sendo corrigida por uma grandeza divergente. Isto não é novidade, classicamente temos a energia de repouso de uma partícula dada pelo potencial eletrostático da seguinte forma (carga pontual):

$$\int d^3R \frac{1}{2} |\vec{E}|^2 = \int d^3R \frac{1}{2} \left( \frac{e}{4 \pi R^2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{(4 \pi)^2} \int d\Omega \int \frac{1}{R^2} dR$$

$\dim[R] = GeV^{-1}$   
 $\dim \left[ \frac{1}{R^2} \right] = GeV^2$

$$= \frac{\alpha}{2} \int_0^\infty \frac{1}{R^2} dR \sim \alpha \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{R} \right] = \alpha \Lambda$$

Nota-se de fato que a divergência quântica é menos forte que a clássica, quanticamente temos uma divergência logarítmica com a escala de energia, classicamente ela é linear. Dá para entender que não poderia ser diferente por análise dimensional: suponha que  $m_0 = 0$ , pense no termo de massa:

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R \Rightarrow m_0 \bar{\Psi} \Psi = m_0 (\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L)$$

$$\bar{\Psi} \Psi = \bar{\Psi}_R \Psi_R + \bar{\Psi}_L \Psi_L$$

se este termo é zero, não temos mais nada na Lagrangeana que "acople"  $\Psi_L$  e  $\Psi_R$ . Com isso obtemos duas teorias separadas, uma para cada quiralidade, e não há correção radiativa que vá produzir um termo de massa.

$$\delta m \sim m_0 \quad (\text{note que isso quer dizer que um eletron de massa zero nunca ganharia massa})$$

Portanto a única dependência possível com a energia é logarítmica. Essa "pequena correção infinita" parece invalidar todo o procedimento perturbativo, mas logo veremos que podemos reescrever nossa lagrangeana em termos de parâmetros físicos finitos desde o começo, evitando assim o problema. Por enquanto assumiremos que já fizemos isso e trocar  $m_0$  por  $m$  nas contas que seguem

No caso de  $Z_2$  temos:



$$Z_2 = 1 + \delta Z_2$$

$$(1-x)^{-1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1+x+O(x^2)$$

$$\delta Z_2 = Z_2 - 1 = \left( 1 - \frac{d\Sigma}{d\phi} \Big|_{\phi=m} \right)^{-1} - 1 \underset{\text{Lim } x \rightarrow 0}{\sim} \frac{d\Sigma_2}{d\phi} \Big|_{\phi=m}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\phi} \left[ \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^1 dx (2m-x\phi) L_v \left( \frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2} \right) \right] = \\ &= \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^1 dx (-x) L_v \left( \frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2} \right) + \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^1 dx (2m-x\phi) \frac{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2}{x\Lambda^2} \cdot \frac{-x\Lambda^2}{[(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2]^2} \cdot (-2x(1-x)\phi) = \\ &= \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^1 dx \left[ -x L_v \left( \frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2} \right) + (2m-x\phi) \frac{2x(1-x)\phi}{[(1-x)m^2 + x\nu^2 - x(1-x)\phi^2]} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d\Sigma_2}{d\phi} \Big|_{\phi=m} = \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^1 dx \left[ -x L_v \left( \frac{x\Lambda^2}{(1-x)m^2 + x\nu^2} \right) + (2-x) \frac{2x(1-x)m^2}{[(1-x)m^2 + x\nu^2]} \right]$$

O que nos dá a primeira contribuição perturbativa à "field strength renormalization"  $Z_2$ , do elétron. Com isso podemos, finalmente, voltar a questão da divergência ultravioleta do vértice da QED (se você já não lembra o que estamos fazendo, volte na página 44 e leia a introdução desta seção). Na pg 38 eliminamos a divergência ultravioleta do vértice fazendo uma subtração "força bruta", o que subtraímos foi:

$$\delta \bar{F}_1(0) = \left( \frac{\kappa}{2\pi} \right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right] + \frac{(1-4y+z^2)m^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right\} =$$

na pg 38 fizemos a subtração antes de introduzir  $\mu$ , mas é mais geral pensar na introdução de  $\mu$  antes

$$= \left( \frac{\kappa}{2\pi} \right) \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left\{ \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right] + \frac{(1-4y+z^2)m^2}{(1-y)^2 m^2 + z\nu^2} \right\} = \left( \frac{\kappa}{2\pi} \right) \int_0^1 dz (1-z) \left\{ \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\nu^2} \right] + \frac{(1-4z+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 + z\nu^2} \right\} =$$

Calculamos a soma destas duas expressões ( $x \rightarrow z$  em  $\delta Z_2$ ):

$$\delta \bar{F}_1(0) + \delta Z_2 = \left( \frac{\kappa}{2\pi} \right) \int_0^1 dz \left\{ (1-2z) \ln \left[ \frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\nu^2} \right] + \frac{P(z)}{(1-z)^2 m^2 + z\nu^2} \right\}$$

$$\begin{aligned} P(z) &= (2-z) 2z(1-z)m^2 + (1-z)(1-4z+z^2)m^2 = \\ &= m^2(1-z)^2(z+1) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 dz (1-2z) \ln \left[ \frac{z \Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z \mu^2} \right] = \int_0^1 \underbrace{dz (1-2z)}_{d\mu} \underbrace{\ln[z]}_{\mu'} +$$

$$\mu = z(1-z)$$

$$d\mu = \frac{1}{z}$$

$$d\mu = \frac{2m^2(1-z) - \mu^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2}$$

$$+ \int_0^1 \underbrace{dz (1-2z)}_{d\mu} \underbrace{\ln \left[ \frac{\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z \mu^2} \right]}_{\mu} =$$

$$= \underbrace{(z-z^2) \ln z} \Big|_0^1 + \underbrace{(z-z^2) \ln \left[ \frac{\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z \mu^2} \right]} \Big|_0^1 - \int_0^1 dz (1-z) +$$

$$- \int_0^1 dz z(1-z) \frac{2m^2(1-z) - \mu^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} =$$

$$= - \int_0^1 dz (1-z) - \int_0^1 dz \frac{(1-z) [2m^2(1-z)z - z\mu^2] + (1-z)(1-z^2)m^2 - (1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} =$$

$$= - \int_0^1 dz (1-z) - \int_0^1 dz \frac{(1-z) [2m^2(1-z)z - \underbrace{(1-z^2)m^2}_{\text{green}} - z\mu^2] + (1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} =$$

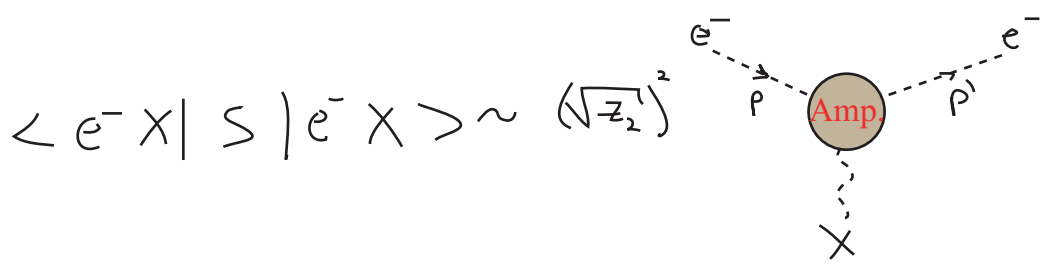
$$= - \int_0^1 dz (1-z) - \int_0^1 dz \left[ (1-z)(-1) + \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} \right] = - \int_0^1 dz \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2}$$

$$\Delta F_1(0) + \Delta Z_2 = \left( \frac{\mu}{2\pi} \right) \int_0^1 dz \left\{ - \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{m^2(z-1)^2 + z\mu^2} + \overbrace{\frac{m^2(1-z)^2(z+1)}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2}}^{P(z)} \right\} = 0$$

$$(1-z)^2(z+1) - (1-z)(1-z^2) = 0$$

$$\delta \bar{F}_1(0) + \delta Z_2 = 0$$

Agora, considerando a fórmula de LSZ (eq. 11.1), sabemos que:



Por isso, em qualquer espalhamento que envolva este vértice, teremos não apenas  $-i e \Gamma^\mu$  mas sim:

$$-i e \Gamma^\mu \rightarrow -i e \Gamma^\mu Z_2$$

Considerando isso na definição dos fatores de forma obtemos:

$$Z_2 \Gamma^\mu = \gamma^\mu \bar{F}_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \bar{F}_2(q^2)$$

a "linha" é para indicar a nova correção, agora que consideramos  $Z_2$

todos os  $\delta$  são em ordem  $\alpha$

$$1 + \gamma^\mu \delta Z_2 + \delta \Gamma^\mu + \mathcal{O}(\alpha^2) = \gamma^\mu + \gamma^\mu \delta \bar{F}_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta \bar{F}_2(q^2)$$

$$\gamma^\mu \delta \bar{F}_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta \bar{F}_2(q^2)$$

$$\sigma^{\mu\nu} q_\nu \Rightarrow \delta \bar{F}_2(q^2) = \delta \bar{F}_2(0) \quad (\text{nada muda para esta estrutura})$$

$$\gamma^\mu \Rightarrow \delta \bar{F}_1(q^2) = \delta \bar{F}_1(q^2) + \delta Z_2 = \delta \bar{F}_1(q^2) - \delta \bar{F}_1(0)$$

que é exatamente a subtração que fizemos na pg 38

Isto nos mostra que, apesar de termos estas divergências circulando pela teoria, pelo menos nessa grandeza observável (o fator de forma elétrico) as divergências se cancelam. É claro que, feito desta forma, parece apenas um milagre numérico com pouca chance de se sustentar em ordens superiores de  $\alpha$ .

De uma forma mais geral, para que o fator de forma satisfaça as condições que desejamos:

$$\bar{F}_1(0) = 1$$

representa o que tínhamos antes da subtração na pg 38

podemos introduzir um novo fator Z no vértice, definido por:  $\Gamma^\mu(q^2=0) \equiv Z_1^{-1} \gamma^\mu$  (eq. 51.1)



A primeira correção obtida perturbativamente é:

$$= (-ie)^2 (-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\nu \frac{i}{k-m} \gamma^\nu \frac{i}{k+q-m} \right] \equiv i\Pi^{\nu\nu}(q)$$

Dada sua estrutura de Lorentz:  $\Pi^{\nu\nu}(q) = \Pi_A(q^2) g^{\nu\nu} + \Pi_B(q^2) q^\nu q^\nu$

mas também sabemos que (identidade de Ward):  $q_\nu \Pi^{\nu\nu}(q) = 0$

$$q_\nu \Pi^{\nu\nu}(q) = \Pi_A(q^2) q^\nu + \Pi_B(q^2) q^2 q^\nu = 0$$

$$\Pi_A(q^2) = -\Pi_B(q^2) q^2 \equiv \Pi(q^2) q^2$$

$$\Pi^{\nu\nu}(q) = (q^2 g^{\nu\nu} - q^\nu q^\nu) \Pi(q^2)$$

(eq. 53.1)

Não esperamos que haja um polo em  $q^2 = 0$ , já que a QED não tem nenhum estado de uma partícula que contribua para este diagrama, então assumiremos que  $\Pi(q^2)$  é regular em  $q^2 = 0$ .

Podemos somar todas as contribuições 1PI para obter:

gauge de Feynman

$$= -\frac{i g^{\mu\nu}}{q^2} + -\frac{i g^{\mu\rho}}{q^2} \left[ i(q^2 g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma) \Pi(q^2) \right] \frac{-i g^{\sigma\nu}}{q^2} + \dots =$$

$$\left( g^{\mu\rho} g^{\rho\sigma} \frac{g_{\sigma\nu}}{q^2} - \frac{q^\rho q^\sigma}{q^2} \right) \Pi(q^2) = \delta_\nu^\mu - \frac{q^\mu q_\nu}{q^2} \Pi(q^2) \equiv \Delta_\nu^\mu \Pi(q^2)$$

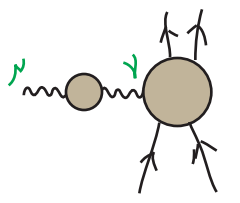
$$\Delta_\nu^\mu \Delta_\beta^\nu = \left( \delta_\nu^\mu - \frac{q^\mu q_\nu}{q^2} \right) \left( \delta_\beta^\nu - \frac{q^\nu q_\beta}{q^2} \right) = \delta_\beta^\mu - \frac{q^\mu q_\beta}{q^2} - \frac{q^\mu q_\beta}{q^2} + \frac{q^\mu q^2 q_\beta}{q^4} = \Delta_\beta^\mu$$

$$= -\frac{i g^{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g^{\mu\rho}}{q^2} \underbrace{\Delta_\sigma^\rho \Delta_\nu^\sigma}_{\Delta_\nu^\mu} \Pi(q^2) \Pi(q^2) + \dots =$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \Delta^\rho_\nu \left[ \Pi^1(q^2) + \Pi^2(q^2) + \Pi^3(q^2) + \dots \right] =$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \left( \delta^\rho_\nu - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} \right) \left( \frac{1}{1 - \Pi(q^2)} - 1 \right) = \frac{-i}{q^2(1 - \Pi(q^2))} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) - \frac{i}{q^2} \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right)$$

Na prática, para o cálculo de elementos da matriz S, este propagador deverá estar conectado a uma linha fermiônica de um diagrama mais complicado:



$$= \frac{-i}{q^2(1 - \Pi(q^2))} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) - \frac{i}{q^2} \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \cdot \mathcal{M}^\nu(q)$$

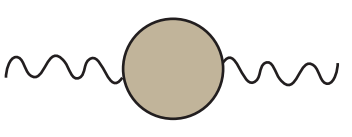
em algum lugar neste elemento de matriz temos:

$$\dots \frac{i}{\not{p}_1 + \not{q} - m} (-i e \not{\gamma}^\nu) \frac{i}{\not{p}_2 - m} \dots$$

E neste caso as identidades de WT nos garantem que:  $q_\nu \mathcal{M}^\nu(q) = 0$

É fácil obter isso a partir da eq. 27.1, basta notar o que ocorre se usarmos LSZ do dois lados da equação, buscando um elemento de matriz com dois elétrons reais. Do lado esquerdo temos dois polos, mas cada termo do lado direito tem apenas um, de forma que este não contribui para o elemento de matriz. Para mais detalhes veja a seção 7.4 do Peskin.

Portanto, para fim de cálculo de elementos de matriz S:

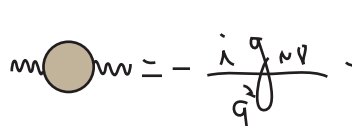


$$= \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 \left( 1 - \frac{\Pi(q^2)}{1} \right)}$$

REGULAR EM  $q^2 = 0$

Continuamos tendo um polo  $q^2 = 0$ , portanto a massa do fóton não muda. Note que as identidades de Ward-Takahashi (e portanto a simetria de gauge) estão por trás disso. Suponha que fosse possível ter uma correção com a forma proibida por WT, por exemplo:

$$i \Pi^{\mu\nu}(q) = i M^2 g^{\mu\nu} \left( \text{onde falta um termo } -\frac{M^2}{q^2} q^\mu q^\nu \text{ que garantiria WT} \right)$$



$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} + -\frac{i g_{\mu\rho}}{q^2} \left[ i M^2 g^{\rho\sigma} \right] \frac{-i g_{\sigma\nu}}{q^2} + \dots =$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} - i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left( \frac{M^2}{q^2} \right) - i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left( \frac{M^2}{q^2} \right)^2 =$$

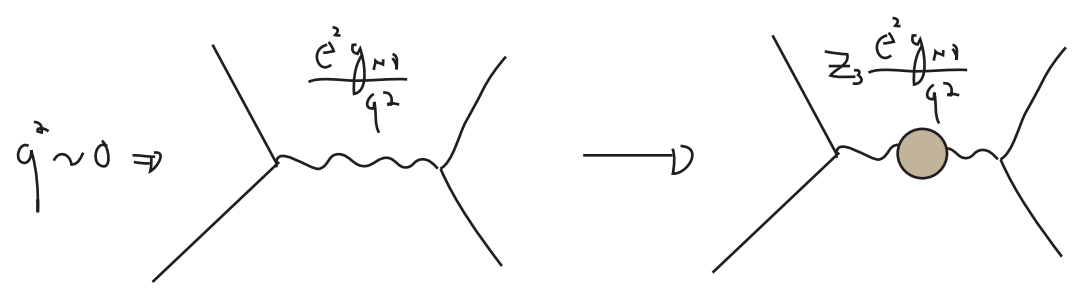
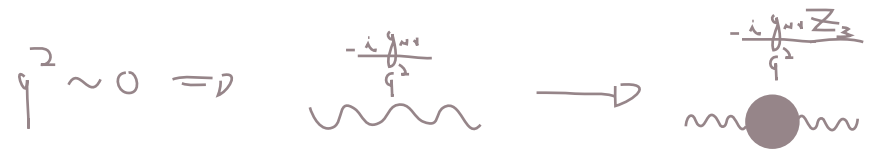
$$= -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left( 1 + \left( \frac{M^2}{q^2} \right) + \left( \frac{M^2}{q^2} \right)^2 + \dots \right) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{1}{1 - \frac{M^2}{q^2}} = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2 - M^2}$$

polo em M (desastre!)  
↓

O resíduo do polo em  $q^2 = 0$  é basicamente dado por:

$$Z_3 = \frac{1}{1 - \Pi(0)}$$

Qualquer espalhamento "soft" (com baixa troca de energia e momento) entre dois elétrons será modificado justamente por este fator:



Como temos um  $e^2$  acompanhando este fator  $Z_3$  podemos vê-lo como uma redefinição da carga:

$$e_r = \sqrt{Z_3} e$$

⇓ mudamos a notação (assim como fizemos com a massa)

$$e = \sqrt{Z_3} e_0$$

⇓ carga que aparece na lagrangeana (carga "nua")  
 ⇓ carga vestida ou física (o que medimos)

Mais uma vez temos a condição advinda da série perturbativa:

$$\begin{cases} e = e_0 + \mathcal{O}(\alpha) \\ Z_3 = 1 + \mathcal{O}(\alpha) \end{cases}$$

$\Pi(q^2)$  tem outro efeito:

$$q^2 \neq 0 \Rightarrow \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{(1 - \Pi(q^2))} \approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2 (1 - \Pi_2(0))}{(1 - \Pi_2(q^2))} \approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{1 + \kappa}$$

$\frac{1}{1 + \kappa} \approx 1 - \kappa + \kappa^2 + \dots$   
 $\frac{1}{1 - \kappa} \approx 1 + \kappa + \kappa^2 + \dots$

$$e_0^2 = \frac{e^2}{Z_3} = e^2 (1 - \Pi(0)) \approx e^2 (1 - \Pi_2(0))$$

$$\approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{(1 - \Pi_2(q^2))(1 + \Pi_2(0))} \approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{[1 - (\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))]}$$

$\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0) \sim \mathcal{O}(\alpha^2)$

esta grandeza funciona como uma carga elétrica dependente do momento

Em suma, o efeito das correções ao propagador do fóton é o de mudar o acomplamento da teoria e torná-lo dependente de energia (passa a ser um running coupling):

$$\alpha_0 \rightarrow \alpha_{\text{EFF}}(q^2) = \frac{e_0^2/4\pi}{1 - \Pi(q^2)} \stackrel{\text{O}(\alpha)}{\approx} \frac{\alpha}{[1 - (\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))]} \quad (\text{eq. 56.1})$$

$$\alpha_{\text{EFF}}(0) \equiv \alpha$$

Calculemos rapidamente  $\Pi(q^2)$ :

$$i\Pi_2^{\text{NN}}(q) = -(-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{i}{k-m} \gamma^\nu \frac{i}{k+q-m} \right]$$

rigorosamente teríamos que usar  $e_0$  e  $m_0$ , mas trocar por  $e$  e  $m$  só introduz um erro de ordem  $\alpha^2$

$$e = e_0(1 + \mathcal{O}(\alpha)) \Rightarrow (e - e_0)^2 = \mathcal{O}(\alpha^2)$$

Seguindo o procedimento usual (parametriz. de Feynman, rotação de Wick), chegamos a:

$$i\Pi_2^{\text{NN}}(q) = -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l_E}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} l_E^2 + g^{\mu\nu} l_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2)}{(l_E^2 + \Delta)^2}$$

(eq. 56.2)

$$\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$$

Que obviamente diverge (temos  $l^5$  no numerador). Temos que escolher algum método de regularização. Neste caso a escolha apresenta sutilezas devidas ao fato de estarmos lidando com uma função cuja forma está restrita pela identidade de WT. Se fizéssemos por exemplo a regularização por cut-off (que consiste simplesmente em não integrar no módulo do momento euclidiano até infinito, mas sim até uma escala máxima  $\Lambda$ ):

$$\int_0^\infty dl_E \rightarrow \int_0^\Lambda dl_E \Rightarrow i\Pi_2^{\text{NN}}(q) \propto e^2 \Lambda^2 g^{\mu\nu}$$

falta um termo  $-\frac{e^2 \Lambda^2}{q^2} q^\mu q^\nu$   
para satisfazer WT

$$\hookrightarrow q_\mu \Pi_2^{\text{NN}} \sim e^2 \Lambda^2 q^\nu \neq 0$$

Este resultado viola a identidade de Ward e daria uma massa para o fóton



De fato não é a divergência em si que está violando a invariância de gauge (as id. WT.) mas sim a forma como escolhemos regularizá-la, a prova disso é que podemos encontrar outras regularizações que preservam as identidades de WT. De uma forma geral, o resultado deve independer da regularização escolhida e quando duas regularizações dão resultados diferentes é porque uma delas (ou as duas) está violando alguma(s) das simetrias da teoria. Se elevarmos as simetrias a categoria de axiomas da teoria, então temos um critério para escolher a regularização correta.

Dentro desta lógica concluímos que a regularização por cut-off feita acima não é boa. Uma outra opção é usar Pauli-Villars, como fizemos nas pgs 34-35, o que preservaria WT mas é um tanto complicado. Felizmente temos uma outra opção, a **regularização dimensional**.

A idéia da **regularização dimensional** é calcular os diagramas como função do número  $d$  de dimensões do espaço tempo. Para  $d$  suficientemente pequeno as integrais são finitas, e então voltamos para o mundo real fazendo  $d \rightarrow 4$

Um exemplo:

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = \int \frac{d\mathcal{R}_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi})^d &= \left( \int dx e^{-x^2} \right)^d = \int d^d x e^{-\sum_{i=1}^d x_i^2} = \int d\mathcal{R}_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} = \\ &= \left( \int d\mathcal{R}_d \right) \frac{1}{2} \int_0^\infty d(x^2) (x^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-x^2} = \left( \int d\mathcal{R}_d \right) \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \end{aligned}$$

$x^{d-2} = (x^2)^{\frac{d}{2}-1}$

$$\therefore \int d\mathcal{R}_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (\text{eq. 57.1})$$

$$\int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d(\ell_E^2) \frac{(\ell_E^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = -\frac{1}{2} \int_1^0 dx \frac{x^{1-\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}$$

$x = \frac{\Delta}{(\ell_E^2 + \Delta)} \quad dx = -\frac{\Delta}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} d\ell_E^2$

$(\ell_E^2)^{\frac{d}{2}-1} = \left( \frac{\Delta - \Delta x}{x} \right)^{\frac{d}{2}-1} = x^{1-\frac{d}{2}} \Delta^{\frac{d}{2}-1} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}$

Usando então a definição da função beta:

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \frac{\Gamma(2-d/2)\Gamma(d/2)}{\Gamma(2)} \underset{1!}{}$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \Gamma(2-d/2)\Gamma(d/2)$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \Gamma(2-d/2)$$

(eq. 58.1)

$\Gamma(z)$  tem polos em todos os números inteiros negativos e em zero, logo teremos polos em

$$d = 4, 6, 8, \dots$$

Como estamos interessados no comportamento perto de  $d = 4$ , podemos definir:  $\epsilon = 4 - d$

$$\Gamma(2-d/2) = \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)$$

const. de Euler

$$-\frac{d}{2} = \frac{\epsilon}{2} - 2$$

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} = \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\epsilon/2} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon \ln\left(\frac{1}{\Delta}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$(4\pi)^{-d/2} = (4\pi)^{\frac{\epsilon-4}{2}} = (4\pi)^{-2} (4\pi)^{\frac{\epsilon}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ 1 + \frac{1}{2}\epsilon \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right]$$

O produto das três expansões acima nos dá:

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \underset{\substack{d \rightarrow 4 \\ \epsilon \rightarrow 0}}{\sim} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) + \ln(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

Comparemos com o que teríamos obtido via regularização de Pauli-Villars

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ L_N\left(\frac{\Lambda^2}{\Delta}\right) + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}) \right]$$

Reg. Dimensional      Pauli-Villars

De onde vemos que:  $\frac{2}{\epsilon} \longleftrightarrow L_N(\Lambda^2)$

Isso também explica porque temos um logaritmo de algo com dimensão  $(\ln[\Delta])$ , a escala deste logaritmo está escondida no  $2/\epsilon$

Podemos também provar algumas fórmulas mais gerais:

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2} \frac{\Gamma(n-d/2)}{\Gamma(n)} \quad (\text{eq. 59.1})$$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2-1} \frac{\Gamma(n-d/2-1)}{\Gamma(n)} \quad (\text{eq. 59.2})$$

Além disso é importante lembrar que:  $\begin{cases} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = d \\ \text{portanto a substituição nas integrais (pg 32) fica: } \ell^\mu \ell^\nu \rightarrow \frac{1}{d} \ell^2 g^{\mu\nu} \\ \delta^\mu \delta^\nu \delta_\mu = -(2-\epsilon) \delta^\nu \\ \delta^\mu \delta^\nu \delta^\rho \delta_\mu = 4 \delta^{\nu\rho} - \epsilon \delta^{\nu\rho} \\ \delta^\mu \delta^\nu \delta^\rho \delta^\sigma \delta_\mu = -2 \delta^{\rho\sigma} \delta^\nu + \epsilon \delta^{\nu\rho} \delta^\sigma \end{cases}$

Voltando ao cálculo de  $\Pi_2^{\mu\nu}(q)$  (eq. 56.2 - com pequenas mudanças para dar conta da mudança de dimensão), os termos com  $\ell^2$  no numerador nos dão:

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{(1 - \frac{2}{d}) g^{\mu\nu} \ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = (1 - \frac{2}{d}) g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-d/2} \Gamma(1-d/2) =$$

$$= - \underbrace{\left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma(1-d/2)}^{\Gamma(2-d/2)} g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \Delta = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2-d/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} (-\Delta g^{\mu\nu})$$

Calculando o termos restantes de 56.2 temos (fica como exercício):

$$i\tilde{\Pi}_2(q^2) = (q^2 g^{NV} - g^N g^V) i \Pi_2(q^2) \quad (\text{eq. 60.1})$$

Onde:

$$\Pi_2(q^2) = -\frac{8e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \, x(1-x) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \quad (\text{eq. 60.2})$$

De forma que, fazendo a regularização dimensional, obtemos exatamente a forma exigida pelas identidades de WT.

Fazendo o limite  $d \rightarrow 4$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ ):

$$\Pi_2(q^2) \rightarrow -\frac{8e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) + \ln(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

$-\frac{2\alpha}{\pi}$

a integral da parte divergente nos dá:  $-\frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{3\epsilon}$

Podemos obter a correção na carga:

$$\frac{e^2 - e_0^2}{e_0^2} = \frac{Z_3 e_0^2 - e_0^2}{e_0^2} = Z_3 - 1 = \frac{1}{1 - \Pi(0)} - 1 = \Pi_2(0) \approx -\frac{2\alpha}{3\pi\epsilon}$$

$\uparrow$   
 $\mathcal{O}(\epsilon)$

Temos mais uma vez uma diferença infinita entre o que observamos ( $e^2$ ) e o que aparece na lagrangeana ( $e_0^2$ ), mas essa diferença não é observável. O que é **realmente observável** é a dependência com  $q^2$  desta carga. É fácil ver que esta está livre de divergências:

$$(\text{eq. 56.1}) \Rightarrow \alpha_{\text{FFF}}(q^2) = \frac{\alpha}{[1 - \underbrace{(\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))}_{\tilde{\Pi}_2(q^2)}]}$$

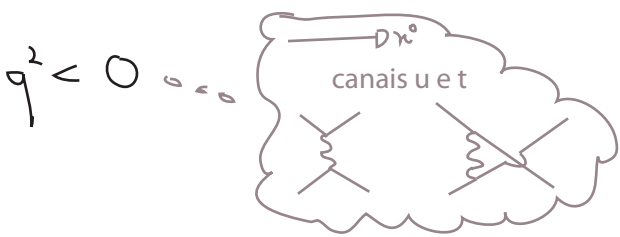
$$\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$$

$$\tilde{\Pi}_2(q^2) = -\frac{8e^2}{2\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) + \ln(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) + \right. \\ \left. -\frac{2}{\epsilon} + \ln(m^2) - \ln(4\pi) + \gamma - \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

$$\tilde{\Pi}_2(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln\left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2}\right)$$

(eq. 60.3)

Primeiro consideremos o caso em que  $q^2 < 0$



neste caso o argumento do logaritmo é positivo e  $\hat{\Pi}_2(q^2)$  é real e analítica em  $q^2$  o que está de acordo com o que assumimos na pg 53.



No caso em que  $q^2 > 0$  (canais s) a função é analítica até  $q^2 = 4m^2$ , e depois disso desenvolve um corte de ramificação (a partir deste ponto é possível produzir um par elétron-pósitron)

Vejamos como isto afeta o potencial elétrico entre cargas opostas (no limite não relativístico):

$$V(\vec{x}) = -\frac{e_0^2}{4\pi|\vec{x}|} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{-e_0^2}{|\vec{q}|^2} \rightarrow \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{-e^2}{|\vec{q}|^2 [1 - \hat{\Pi}_2(-|\vec{q}|^2)]}$$

$|\vec{q}|^2 \ll m^2$  → massa do elétron



$$\hat{\Pi}_2(-|\vec{q}|^2) \approx -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[ -\frac{x(1-x)|\vec{q}|^2}{m^2} + O\left(\frac{|\vec{q}|^2}{m^2}\right) \right] = -\frac{2\alpha}{\pi} \left( -\frac{|\vec{q}|^2}{30m^2} \right)$$

$$V(\vec{x}) = -e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{q}|^2 \left[ 1 - \frac{\alpha|\vec{q}|^2}{15\pi m^2} \right]} \approx -e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{q}|^2} \left[ 1 + \frac{\alpha|\vec{q}|^2}{15\pi m^2} \right]$$

$$= -e^2 \left[ \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} + \frac{\alpha}{15\pi m^2} \int d^3(\vec{x}^0) \right] = -\frac{\alpha}{|\vec{x}|} - \frac{4\alpha^2}{15m^2} \int d^3(\vec{x}^0)$$

O potencial muda para pequenas distâncias 4

Isto muda os níveis de energia do átomo de hidrogênio:

$$\Delta E = \int d^3x |\psi(\vec{x})|^2 \left( -\frac{\gamma \alpha^2}{15 m^2} \delta^3(\vec{x}) \right) = -\frac{\gamma \alpha^2}{15 m^2} |\psi(0)|^2$$

só estados de onda s tem  $\psi(0) \neq 0$

$$\Delta E_{2s} = -1,123 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$$

A função delta no potencial é fruto de uma aproximação um pouco grosseira (quando expandimos em  $|\vec{q}|^2/m^2$ , podemos fazer melhor escrevendo:

$$|\vec{q}| \equiv Q$$

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-e^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} = \frac{-e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dQ \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) Q^2 \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} =$$

$$= \frac{+e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dQ \int_1^{-1} d(\cos(\theta)) Q^2 \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} = \frac{+e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dQ \frac{Q}{i\kappa} \frac{[e^{-iQx} - e^{iQx}]}{Q^2 [1 - \hat{\pi}_2(-Q^2)]} =$$

$$= \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \int_0^\infty dQ \frac{Q e^{iQx}}{Q^2 + \mu^2} [1 + \hat{\pi}_2(-Q^2)]$$

inserido para regularizar o polo em  $Q^2=0$

$\int_0^\infty dQ Q \rightarrow -\int_{-\infty}^0 dQ Q$

$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$

$\frac{i\alpha}{\pi\kappa} \oint = \frac{i\alpha}{\pi\kappa} 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \left[ 1 + \hat{\pi}_2(-iN) \right] \stackrel{N \rightarrow 0}{=} -\frac{\alpha}{\kappa}$

$\oint = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3+C_4} \Rightarrow \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \int_{C_1} = -\frac{\alpha}{\kappa} - \frac{i\alpha}{\pi\kappa} \int_{C_3+C_4}$

$\hat{\pi}_2(Q^2)$  tem um Branch Cut para  $\begin{cases} -Q^2 > 4m^2 & \text{Im}[Q] > 2m \\ Q^2 \in \mathbb{R} & \text{Re}[Q] = 0 \end{cases}$

As integrais perto do corte (curvas  $C_3$  e  $C_4$ ) nos dão a correção do potencial:

$$\int_{C_3+C_4} = \int_{i\mu+\epsilon}^{i2m+\epsilon} dQ F(Q) + \int_{i2m-\epsilon}^{i\mu-\epsilon} dQ F(Q) = -\int_{i2m}^{i\mu} dQ F(Q+\epsilon) + \int_{i2m}^{i\mu} dQ F(Q-\epsilon) = 2i \text{Im} \left[ \int_{i2m}^{i\mu} dQ F(Q-\epsilon) \right]$$

$$F(Q) = \frac{Q e^{iQx}}{Q^2 + \mu^2} [1 + \hat{\pi}_2(-Q^2)]$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Re}[F(Q+\epsilon)] &= \text{Re}[F(Q-\epsilon)] \\ \text{Im}[F(Q+\epsilon)] &= -\text{Im}[F(Q-\epsilon)] \end{aligned} \right\}$$

$$SV(x) = \frac{2\alpha}{\pi\kappa} 2i \operatorname{Im} \left[ \int_{i2m}^{i\infty} \frac{Q e^{iQx}}{Q^2 + \mu^2} \left[ 1 + \hat{\Pi}_2(-(\mathcal{Q}-\epsilon)^2) \right] \right] =$$

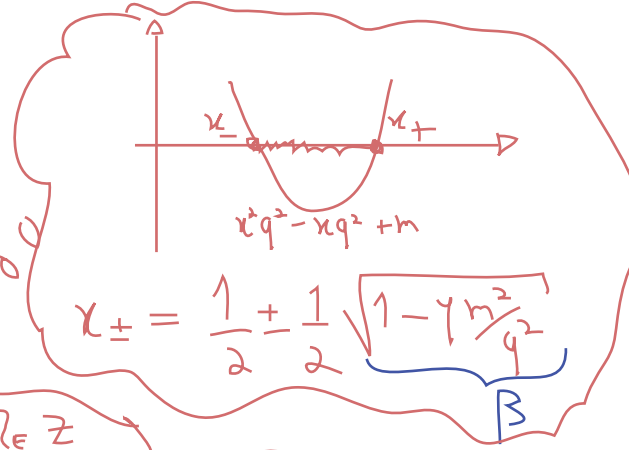
$Q - \epsilon \sim Q$        $q \equiv -iQ$

$$= \frac{2\alpha}{\pi\kappa} \operatorname{Im} \left[ \int_{2m}^{\infty} \frac{dq}{q} e^{-qx} \left[ 1 + \hat{\Pi}_2(-(\lambda q - \epsilon)^2) \right] \right] = \frac{2\alpha}{\pi\kappa} \int_{2m}^{\infty} \frac{dq}{q} e^{-qx} \operatorname{Im} \left[ \hat{\Pi}_2(q^2 + i\epsilon) \right]$$

Vamos obter a parte imaginária desta função para  $q^2 > 4m^2$  partindo de 60.3:

$$\int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \left( \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right)$$

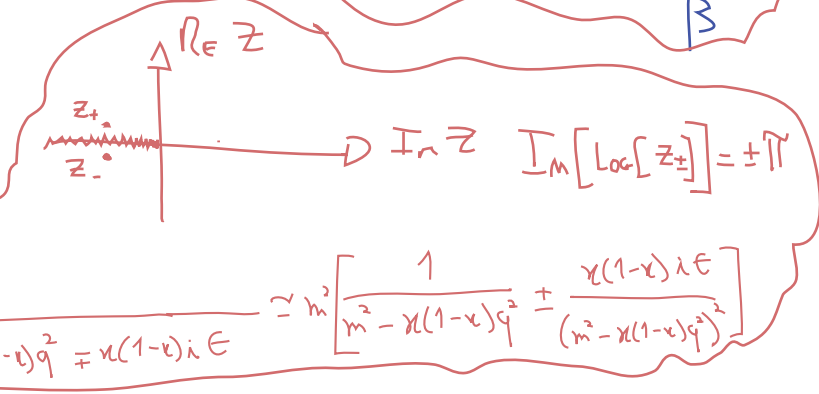
$\rho(x, q^2)$



$$\operatorname{Im}[\rho(x, q^2)] \neq 0 \iff m^2 - x(1-x)q^2 < 0$$

$x_- < x < x_+$

$\sqrt{1 - 4m^2/q^2} \in \mathbb{R} \quad (\forall q^2 > 4m^2)$



$$z_{\pm} = \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2 \pm x(1-x)\lambda\epsilon} \approx m^2 \left[ \frac{1}{m^2 - x(1-x)q^2} \pm \frac{x(1-x)\lambda\epsilon}{(m^2 - x(1-x)q^2)^2} \right]$$

$$\operatorname{Im} \left[ \hat{\Pi}_2(q^2 + i\epsilon) \right] = -\frac{2\alpha}{\pi} (-\pi) \int_{x_-}^{x_+} dx (1-x)x =$$

$y \equiv x - \frac{1}{2}$

$$= +2\alpha \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dy \left( \frac{1}{4} - y^2 \right) = +\frac{2\alpha}{3} \sqrt{1 - 4m^2/q^2} \left( 1 + \frac{2m^2}{q^2} \right)$$

$$SV(x) = \frac{-2\alpha}{\pi\kappa} \int_{2m}^{\infty} \frac{dq}{q} e^{-qx} \frac{2\alpha}{3} \sqrt{1 - 4m^2/q^2} \left( 1 + \frac{2m^2}{q^2} \right)$$

Estudemos isto em duas regiões:

(I)  $x \gg 1/m \implies$  Neste caso a exponencial  $e^{-qx}$  suprime fortemente o integrando e a principal contribuição vem do limite inferior. Neste caso:  $q \approx 2m$

$$\delta V(x) = \frac{-2\alpha}{\pi x} \int_0^\infty dt \frac{e^{-(t+2m)x}}{(t+2m)} \approx \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t}{t+4m}} \frac{(t+2m)^2 + 2m^2}{(t+2m)^2}$$

$t = q - 2m$

$$\approx \frac{-2\alpha}{\pi x} \int_0^\infty dt \frac{e^{-(t+2m)x}}{2m} \approx \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t}{4m}} \frac{1}{2} + \mathcal{O}(t)$$

$$x \gg \frac{1}{m} \rightarrow \delta V(x) \approx -\frac{\alpha}{x} \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mx}}{(mx)^{3/2}}$$

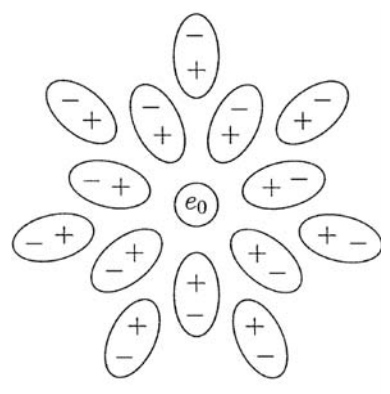
(eq. 64.1)

$$V(x) = -\frac{\alpha}{x} \left( 1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mx}}{(mx)^{3/2}} + \dots \right)$$

Potencial de Uehling

O importante é notar que a correção é suprimida exponencialmente para grandes distâncias e a escala é dada pelo comprimento de onda Compton do elétron (de fato  $1/2m$ ). A interpretação é de que a distâncias menores que  $1/2m$  temos uma densidade considerável de pares virtuais elétron-pósitron, isto funciona como um dielétrico que esconde parte da carga.

Polarização do Vácuo:



Vejamos o que acontece quando vamos para o limite oposto:

$$\textcircled{II} -q^2 \gg m^2 \Rightarrow \frac{1}{\Pi_2(q^2)} \approx -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left( \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right)$$

(eq. 60.3)

$+ \ln(m^2) - \ln(x(1-x)) - \ln(-q^2)$

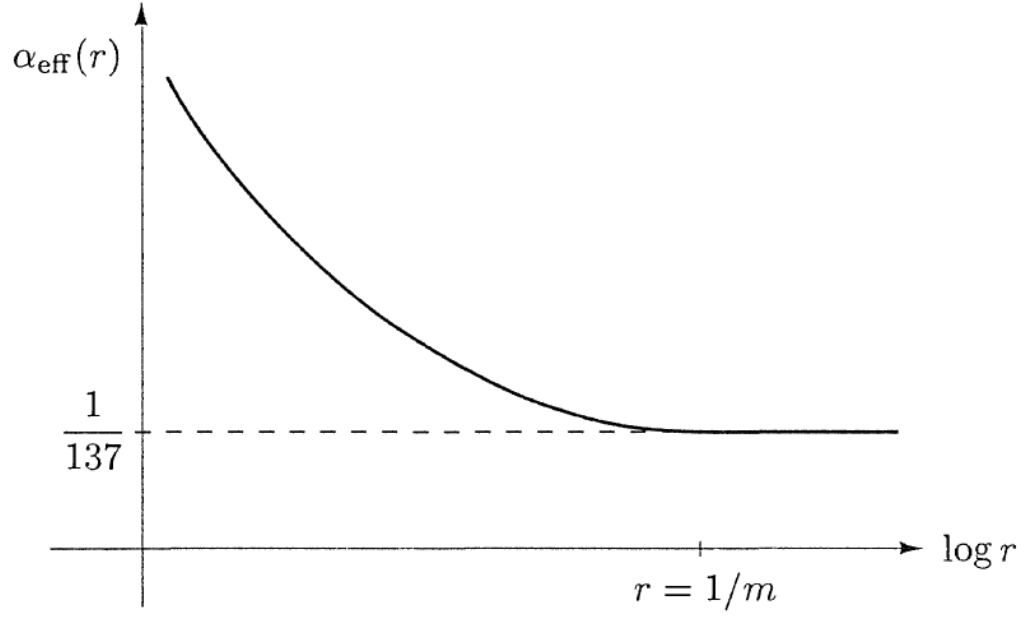
$$\approx \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left\{ \ln \left[ \frac{-q^2}{m^2} \right] + \ln(x(1-x)) \right\} = \frac{\alpha}{3\pi} \left[ \ln \left[ \frac{-q^2}{m^2} \right] - \frac{5}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{q^2}\right) \right]$$

O que na constante de acoplamento nos dá (eq. 56.1):

$$\alpha_{\text{EFF}}^2(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left[ -\frac{q^2}{m^2} e^{5/3} \right]}$$



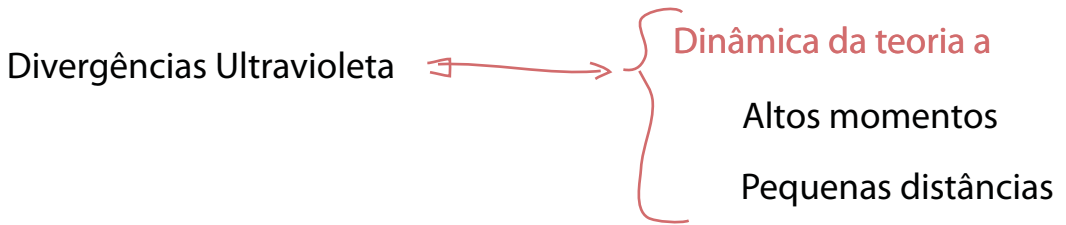
Para espalhamentos muito duros (ou seja, distância de interação pequenas),  $-q^2$  fica grande e o acoplamento efetivo aumenta. Podemos fazer uma imagem qualitativa disto fazendo  $q = 1/r$  e obtendo o gráfico abaixo:



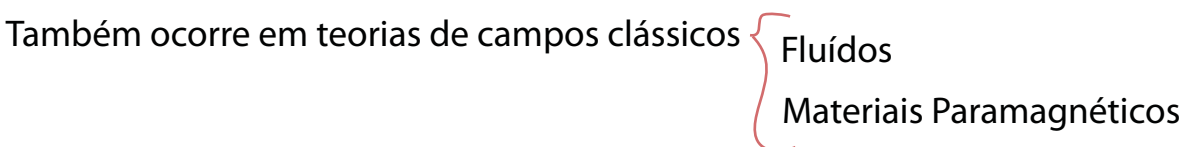
## Renormalização

(Peskin 10.1)

Vimos alguns cancelamentos de divergências no caso da QED, mas por enquanto pode parecer complicado descobrir quais diagramas temos que considerar para que estes cancelamentos ocorram. Além disso a presença de divergências põe em dúvida a validade da série perturbativa. Veremos agora como é possível modificar a teoria para escrevê-la em termos de grandezas físicas finitas desde o princípio de forma que tenhamos uma teoria que possa ser expandida perturbativamente. Começamos pensando um pouco sobre estas divergências.



deve existir um cut-off a partir do qual preciso de uma descrição mais fundamental



Posso estudar ondas sonoras (ou de spin) e fluxos

↳ Esperamos que esta descrição falhe quando chegamos a tamanhos e velocidades típicos dos átomos. Ou seja, quando a descrição contínua falha.



Esta análise simplista pode falhar por três motivos:

- (1) Diagramas sem loops nem propagadores tem  $D = 0$ , mas são convergentes
- (2) Se um diagrama contém um subdiagrama divergente, a divergência pode ser pior do que parece:

$L = 1$   
 $P_e = 2$   
 $P_f = 2$

$D = 4 - 2 - 2 = -2$

no entanto este diagrama  $\sim L_n(\Lambda)$

diverge  $\sim L_n(\Lambda)$

os momentos colocados no denominador por estes propagadores nada tem a ver com o que está sendo integrado no loop. Logo não contribuem para cancelar a divergência

- (3) Se alguns termos do diagrama são cancelados por força de alguma simetria (identidades de WT, por exemplo), a divergência pode ser menor ou nem existir:

$L = 1$   
 $P_e = 2$   
 $P_f = 0$

$D = 4 - 2 = 2$

no entanto:  $\sim L_n(\Lambda)$

Note que (pg 56) quando fizemos regularização por cut-off (que viola WT) obtivemos  $\sim \Lambda^2$  mas o resultado que obedece WT (Pauli-Villars) nos dá  $L_n(\Lambda)$

Ainda assim  $D$  é útil, veja que podemos escrevê-lo em função das pernas externas usando:

$$L = P_e + P_f - V + 1 \quad (\text{eq. 67.1})$$

ex: para  $V = 4$ , preciso de 4 propagadores para fechar o loop:

$V = 4$   
 $P_e + P_f = 4$   
 $L = 1$

diminuindo o número de propagadores, não consigo fechar o loop

$V = 4$   
 $P_e + P_f = 3$   
 $L = 0$

se aumento o número de propagadores fica inevitável aparecer mais loops:

$V = 4$   
 $P_e + P_f = 5$   
 $L = 2$

e também, que:



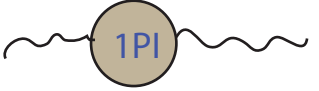
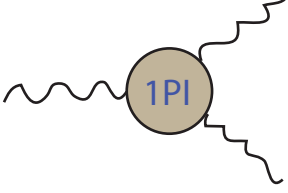
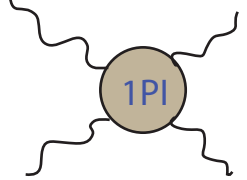
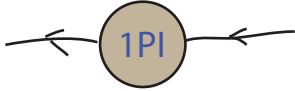
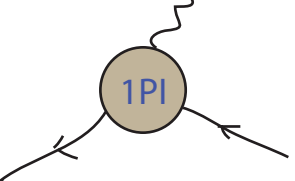
$$V = 2 P_f + N_f = \frac{1}{2} (2 P_e + N_e) \quad (\text{cada vértice tem 1 fóton e 2 elétrons, propagadores tem dois vértices e pernas externas apenas um}) \quad (\text{eq. 67.2})$$

$$D = 4(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma = 4P_e + 4P_\gamma - 2P_\gamma - N_\gamma - 3P_e - \frac{3}{2}N_e + 4 - P_e - 2P_\gamma =$$

$$\hookrightarrow \frac{V}{4} + \frac{3V}{4} = \frac{P_\gamma}{2} + \frac{N_\gamma}{4} + 3\frac{P_e}{4} + \frac{3N_e}{8}$$

$D = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2} N_e$  (eq. 68.1)

O que nos mostra que a divergência superficial só depende do número de pernas externas. Somente diagramas com poucas pernas tem  $D \geq 0$ . Temos poucas possibilidades na QED, de fato sete combinações (abaixo). E como as pernas externas não entram na integral de loop, podemos considerar a soma de todos os diagramas 1PI que contribuem para cada combinação de pernas externas. Qualquer diagrama que contenha divergências vai ter um destes como sub-diagrama:

A		$D = 4$	B		$D = 3$
	$N_e = N_\gamma = 0$				
C		$D = 2$	D		$D = 1$
E		$D = 0$	F		$D = 1$
G		$D = 0$			

O diagrama A é o mais divergente, mas não contribui para elementos de matriz S e nem pode estar contido em outros diagramas porque não tem pernas externas (de fato nem para Z ele contribui pois é cancelado na normalização).

Para cada linha externa de fóton, devemos ter dentro do produto temporalmente ordenado uma corrente eletromagnética:


$$j^\mu(z) = \bar{\psi}(z) \gamma^\mu \psi(z)$$

$$\langle \Omega | A_\mu(x) | \Omega \rangle \sim \langle 0 | A_\mu(x) | 0 \rangle + K_1 \langle 0 | T \{ A_\mu(x) A^\nu(z) j_\nu(z) \} | 0 \rangle +$$

$$+ K_2 \langle 0 | T \{ A_\mu(x) A^\nu(z) j_\nu(z) A^\rho(z') j_\rho(z') \} | 0 \rangle +$$

$$+ K_3 \langle 0 | T \{ A_\mu(x) A^\nu(z) j_\nu(z) A^\rho(z') j_\rho(z') A^\sigma(z'') j_\sigma(z'') \} | 0 \rangle + \dots =$$

$K_n =$  constantes e integrais em z

$$\sim K_1^D \langle 0 | T \{ j_\mu(z) \} | 0 \rangle + K_3^D \langle 0 | T \{ j_\mu(z) \overbrace{j_\nu(z')}^{c} j_\rho(z'') \} | 0 \rangle + \dots \sim$$


$$\sim K \int d^4z \langle \Omega | T \{ j_\mu(z) \} | \Omega \rangle$$

$$\langle \Omega | A_\mu(x) A_\nu(x') A_\rho(x'') | \Omega \rangle \sim \iiint \langle \Omega | j_\mu(x) j_\nu(x') j_\rho(x'') | \Omega \rangle$$

Como a QED é invariante por conjugação de carga:  $C | \Omega \rangle = | \Omega \rangle$

e temos:  $C \bar{\psi} \gamma^\mu \psi C^\dagger = - \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

então:  $\langle \Omega | T \{ j_\mu(z) \} | \Omega \rangle = - \langle \Omega | T \{ j_\mu(z) \} | \Omega \rangle = 0$

$$\langle \Omega | T \{ j_{\mu_1}(z_1) \dots j_{\mu_n}(z_n) \} | \Omega \rangle = (-1)^n \langle \Omega | T \{ j_{\mu_1}(z_1) \dots j_{\mu_n}(z_n) \} | \Omega \rangle$$

Qualquer correlator com um número ímpar de fótons externos é zero. Isto elimina os diagramas B e D acima. O restante dos diagramas acima é diferente de zero, comecemos pensando sobre o diagrama F (auto energia do elétron) - ele é função do momento do elétron (p), a série em torno de p = 0 fica:

$$\leftarrow \text{1PI} \leftarrow = A_0 + A_1 \not{p} + A_2 p^2 + \dots$$

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d p^n} \left( \leftarrow \text{1PI} \leftarrow \right) \Big|_{p=0}$$

↳ não estamos nos preocupando com as divergências infravermelhas, assumimos que foram devidamente regularizadas, como fizemos na pg 39.

O momento p vai estar no denominador dos propagadores aparecendo na soma 1PI, quando calculamos os coeficientes fazemos:

$$\frac{d}{d p} \left( \frac{1}{\not{p} + \not{p} - m} \right) = - \frac{1}{(\not{p} + \not{p} - m)^2} \Rightarrow \text{coeficientes com n maior tem o grau de divergência menor}$$

↳ momento integrado

A divergência superficial de  $A_0$  (que é a maior) deve ser  $D = 1$ , isto quer dizer que a divergência de  $A_1$  é logarítmica e o restante dos coeficientes não diverge (é preciso cuidado aqui - pode

haver subdiagramas com divergências mais altas - veremos como tratar isso em breve). Além disso vimos que (pg 48) que correções radiativas não podem dar massa ao elétron quiral (que não tem uma massa nua) e que a correção deve ser proporcional a massa, por análise dimensional vemos que a divergência é logarítmica. Temos portanto o caso em que uma simetria torna a divergência menor que a divergência superficial:

$$\leftarrow \text{1PI} \leftarrow = a_0 m L_N(\Lambda) + a_1 \not{v} L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

(compare com a eq. 45.1)

Podemos seguir a mesma lógica no caso do diagrama G, neste caso, como a divergência superficial já é 0, qualquer derivada em qualquer um dos momentos externos já nos dá algo finito. Portanto a expansão nestas três variáveis só tem divergências no coeficiente  $A_0$ :

$$\text{1PI} \sim -i e \not{v} L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

Como já discutimos (pg 53) a auto-energia do fóton (diagrama C) deve ter a forma:

$$\text{1PI} = (\delta^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2)$$

o que já é a série de Taylor que procuramos, dentro de  $\Pi(q^2)$  temos os coeficientes  $A_n$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Os coeficientes  $A_0$  e  $A_1$  são zero, e a divergência superficial cai de 2 para 0 nos termos de  $\Pi(q^2)$  que não dependem do momento (os termos de  $\Pi(q^2)$  que dependem de  $q$  são finitos) - exatamente o que obtivemos na página 60.

### Observação importante:

Temos aqui dois exemplos importantes do que chamamos de "massas protegidas" por simetrias. A simetria de gauge da QED impede o fóton de ter massa nua e impede, via WT, que ele ganhe massa a qualquer ordem de perturbação. Este mecanismo continua útil mesmo quando a simetria é **quebrada explicitamente!** A simetria quiral impede o elétron de ter massa nua e de ganhar via correções, mas de fato o elétron tem massa. No entanto o conhecimento de que no limite em que a massa nua vai para zero, todas as correções radiativas também devem ir, nos diz que estas devem ser proporcionais a massa. Esta simetria quebrada protege a massa de divergências mais intensas (em vez de lineares são logarítmicas).

Nos resta apenas o espalhamento fóton-fóton (diagrama E). Sabemos que (identidade de Ward):

$$k^\mu \left( \text{1PI} \right) = 0$$

É possível mostrar que isto implica na seguinte estrutura para a amplitude deste diagrama:

$$(g^{\mu\nu} k_1^\sigma - g^{\nu\sigma} k_1^\mu) \times (g^{\alpha\beta} k_2^\gamma - g^{\beta\gamma} k_2^\alpha) (g^{\delta\epsilon} k_3^\zeta - g^{\epsilon\zeta} k_3^\delta) (g^{\eta\theta} k_4^\iota - g^{\theta\iota} k_4^\eta)$$

Como há uma potência do momento em cada termo, temos que todos os coeficientes da série com  $n < 4$  devem ser zero. O primeiro termo diferente de zero tem quatro derivadas o que leva a  $D = -4$ .

O que concluímos é que só existem três blocos básicos divergentes na QED, os diagramas **C** (auto-energia do fóton), **F** (auto-energia do elétron) e **G** (vértice). Os diagramas **G** e **C**, de fato possuem apenas um coeficiente divergente, ao passo que o diagrama **F** contém dois. Isto quer dizer que a QED tem um total de **quatro grandezas divergentes** que temos que absorver em redefinições de parâmetros para obter uma teoria finita. Veremos isto mais a frente

Suponha que seguíssemos o mesmo procedimento para QED em  $d$  dimensões. Neste caso:

$$D_d = \underbrace{dL - P_e - 2P_\gamma}_{\text{agora cada loop contribui com uma integral de momento d-dimensional}}$$

agora cada loop contribui com uma integral de momento  $d$ -dimensional

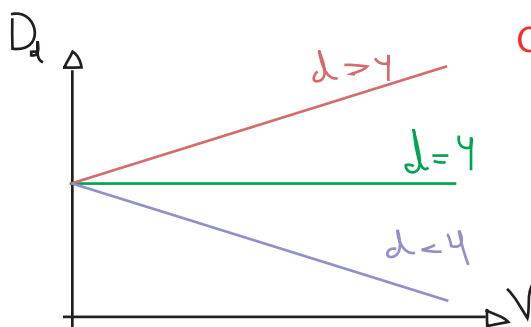
usando as eqs. 67.1 e 67.2 temos:

$$(67.2) \Rightarrow \left. \begin{aligned} P_\gamma &= \frac{V - N_\gamma}{2} \\ P_e &= \frac{2V - N_e}{2} \end{aligned} \right\} D_d = d(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma = (d-1)P_e + (d-2)P_\gamma - dV + d =$$

$$= (d-1)V - \frac{(d-1)N_e}{2} + \frac{(d-2)V}{2} - \frac{(d-2)N_\gamma}{2} - dV + d =$$

$$= d + \underbrace{\left(\frac{d-4}{2}\right)V}_{\text{O número de vértices só é cancelado em } d=4} - \left(\frac{d-2}{2}\right)N_\gamma - \left(\frac{d-1}{2}\right)N_e$$

O número de vértices só é cancelado em  $d = 4$



$d < 4 \Rightarrow$  somente diagramas de ordem baixa (na expansão perturbativa) divergem superficialmente

A QED é uma **Teoria Super-Renormalizável**

$d = 4 \Rightarrow$  há um número finito de amplitudes divergentes, mas há um infinidade de diagramas contribuindo para cada uma destas divergências, já que as divergências ocorrem a todas as ordens na expansão perturbativa

A QED é uma **Teoria Renormalizável**

$d > 4 \Rightarrow$  qualquer amplitude é divergente, já que se formos mais longe na expansão perturbativa ( $V$  cresce) encontraremos divergências

A QED é uma **Teoria Não-Renormalizável**

Contagem de Divergências Ultravioleta - Campo Escalar  $\lambda\phi^n$

(Peskin 10.1, Ryder 9.1 ~ 9.5)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{n!} \phi^n \quad (\text{EM } d \text{ DIMENSÕES})$$

$n \geq 3$

$N$  = número de linhas externas       $V$  = número de vértices  
 $P$  = número de propagadores       $L$  = número de loops

Assim como antes (eq. 67.1):  $L = P - V + 1$

De cada vértice saem  $n$  linhas, então 67.2 fica:  $V = \frac{N + 2P}{n}$

$$D = dL - 2P = d(P - V + 1) - 2P = d + \left[ n \left( \frac{d-2}{2} \right) - d \right] V - \left( \frac{d-2}{2} \right) N \quad (\text{eq. 72.1})$$

Não-Renormalizável  $\left\{ \begin{array}{l} > 0 \Leftrightarrow n > \frac{2d}{d-2} \\ = 0 \Leftrightarrow n = \frac{2d}{d-2} \\ < 0 \Leftrightarrow n < \frac{2d}{d-2} \end{array} \right.$

$d > 2$

$d \leq 2 \Rightarrow \forall$  Teoria é Super-Renormalizável

$d=4 \left\{ \begin{array}{l} \lambda\phi^4 \text{ renormalizável} \\ \lambda\phi^6 \text{ não-renormalizável} \end{array} \right.$ $\frac{2d}{d-2} = 4$	$d=3 \left\{ \begin{array}{l} \lambda\phi^4 \text{ super-renormalizável} \\ \lambda\phi^6 \text{ renormalizável} \end{array} \right.$ $\frac{2d}{d-2} = 6$
---	---

Outra forma de chegar a 72.1 é analisando a dimensão da lagrangeana. Em unidades naturais a ação tem que ser adimensional:

$$Dim[S] = 0 \dots 0 \quad \text{GeV}^0$$

$$S = \int d^d x \mathcal{L} \Rightarrow \underbrace{Dim[d^d x]}_{\text{GeV}^{-d}} + Dim[\mathcal{L}] = 0$$

$$\therefore Dim[\mathcal{L}] = d$$



Voltando a lagrangeana do campo escalar podemos ver que:

$$\text{Dim} \left[ \frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)^2 \right] = d = 2 \underbrace{\text{Dim}[\partial_\nu \phi]}_{\text{Dim}[\phi] + 1}$$

$$\boxed{\text{Dim}[\phi] = \frac{d-2}{2}} \quad (\text{eq. 73.1})$$

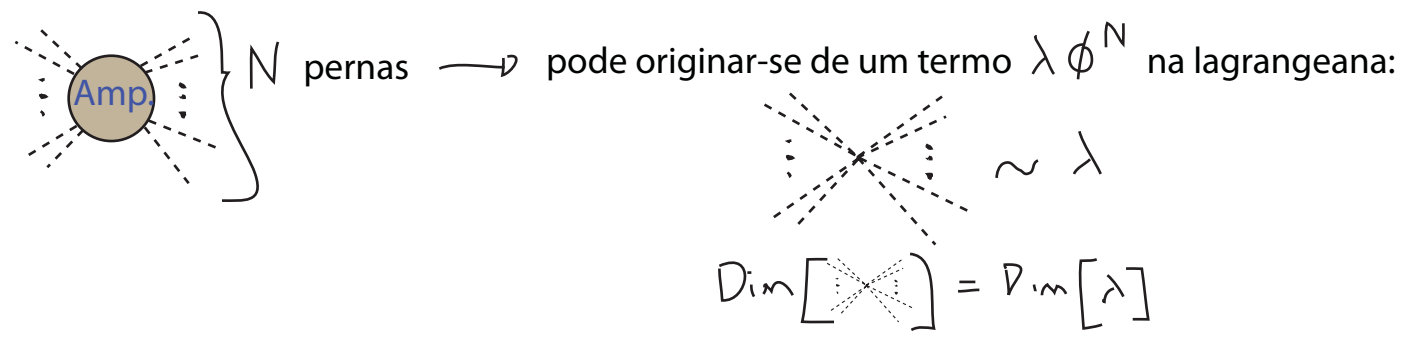
$$\text{Dim}[m^2 \phi^2] = d = 2 \text{Dim}[m] + 2 \underbrace{\text{Dim}[\phi]}_{d-2}$$

$$\text{Dim}[m] = 1 \quad (\text{para nossa sorte! 😊})$$

$$\text{Dim} \left[ \frac{\lambda}{n!} \phi^n \right] = d = \text{Dim}[\lambda] + n \text{Dim}[\phi]$$

$$\boxed{\text{Dim}[\lambda] = d - \frac{n(d-2)}{2}} \quad (\text{eq. 73.2})$$

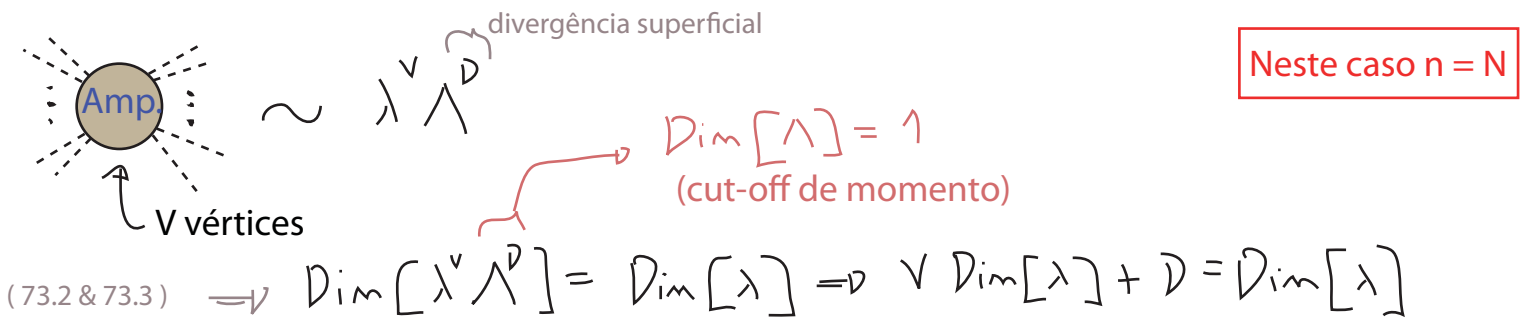
Suponha agora o seguinte diagrama:



Como devo somar sobre todas as possibilidades, qualquer diagrama com N linhas externas terá:

$$\boxed{\text{Dim} \left[ \text{diagram with N lines} \right] = d - \frac{N(d-2)}{2}} \quad (\text{eq. 73.3})$$

Em uma teoria apenas com o vértice  $\lambda \phi^N$  um diagrama com V vértices será proporcional a:



(73.2 & 73.3)  $\Rightarrow \text{Dim}[\lambda^V \Lambda^D] = \text{Dim}[\lambda] \Rightarrow V \text{Dim}[\lambda] + D = \text{Dim}[\lambda]$

$$\boxed{V \left( d - \frac{N(d-2)}{2} \right) + D = d - \frac{N(d-2)}{2}} \quad \begin{matrix} (\text{que concorda com 72.1} \\ \text{para } n = N) \\ (\text{eq. 73.4}) \end{matrix}$$

Aqui fica claro que o que multiplica  $V$  é  $-\text{Dim}[\lambda]$ :

$$D = -\text{Dim}[\lambda] V + \text{Dim}[\lambda]$$

podemos então dizer que:

$$\begin{aligned} \text{Dim}[\lambda] > 0 &\Rightarrow \text{Super-Renormalizável} \\ \text{Dim}[\lambda] = 0 &\Rightarrow \text{Renormalizável} \\ \text{Dim}[\lambda] < 0 &\Rightarrow \text{Não-Renormalizável} \end{aligned} \quad (74.1)$$

Esta análise poderia ter sido feita também para a QED ou qualquer outra teoria, com a mesma conclusão.

### Teoria Perturbativa Renormalizada

(Peskin 10.2, Ryder 9.3)

Nos preocuparemos agora em achar métodos gerais para redefinir nossa teoria em termos de grandezas observáveis e finitas. Note que no caso das correções radiativas para QED foi possível, uma vez que consideramos todos os diagramas e redefinimos as constantes, ter observáveis finitos. Essencialmente o que fizemos foi a troca:

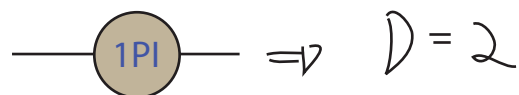
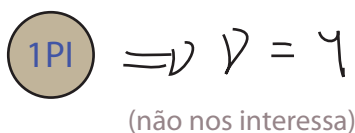


Colocando de forma simples: isto é a renormalização! Daqui para frente o que faremos é encontrar métodos práticos e confiáveis de fazer esta troca (já que até agora fomos fazendo de forma um tanto caso a caso).

Vejamos como fica a teoria  $\lambda\phi^4$ , analisando

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4$$

Analisemos quais são os diagramas divergentes desta teoria. Como ela é simétrica por  $\phi \rightarrow -\phi$  todos os diagramas com um número ímpar de linhas externas dão zero. Segundo a eq. 72.1 (para  $d = 4$ , quando não importa o número de vértices):



$$\text{Diagram} \Rightarrow D = 0$$

Escrevendo uma série de Taylor (agora em  $p^2$ ) e estudando a divergência dos coeficientes (como fizemos na pg 69 para QED) obtemos:

$$\sim \Lambda^2 + p^2 L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

$$\sim L_N(\Lambda) + (\text{Termos Finitos})$$

São três constantes divergentes que precisamos "absorver" em redefinições. Faremos isso redefinindo a constante de acoplamento, a massa e o campo em si. Lembrando que:

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | \Omega \rangle e^{i p \cdot x} = \frac{i Z}{p^2 - m^2} + (\text{termos sem polo em } m^2)$$

Se quisermos obter um propagador próximo ao polo que seja parecido com o de uma partícula livre (só que com a massa física) devemos remover este Z. É possível fazer isso definindo:

$$\boxed{\phi \equiv Z^{1/2} \phi_r} \rightarrow \phi_r = Z^{-1/2} \phi \quad (\text{eq. 75.1})$$

O resultado desta substituição na dedução das pgs 2 e 3 será o de fazer sumir o fator Z em toda a conta. O mesmo ocorrerá com todos os Z's que aparecem na fórmula de LSZ (eq. 11.1).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z (d_\nu \phi_r)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 Z \phi_r^2 - \frac{\lambda_0}{4!} Z^2 \phi_r^4$$

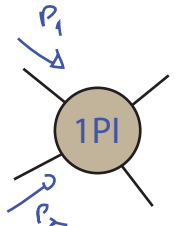
Ainda precisamos nos livrar de  $m_0$  e  $\lambda_0$ . Para tanto definamos:

$$\delta Z = Z - 1 \quad \delta m = m_0^2 Z - m^2 \quad \delta \lambda = \lambda_0 Z^2 - \lambda$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (d_\nu \phi_r)^2 + \underbrace{\delta Z \frac{1}{2} (d_\nu \phi_r)^2 - \frac{m^2}{2} \phi_r^2 - \frac{\delta m}{2} \phi_r^2}_{\text{contratermos}} - \frac{\lambda}{4!} \phi_r^4 - \frac{\delta \lambda}{4!} \phi_r^4$$

Importante: note que não somamos estes novos termos, apenas re-escrevemos a lagrangeana em função de novos campos e parâmetros.

Os parâmetros físicos,  $m$  e  $\lambda$ . A massa já está bem definida como a localização do menor polo da função de dois pontos. No caso de  $\lambda$ , temos liberdade de escolha. Escolheremos definir:



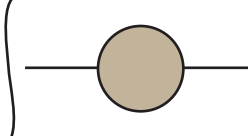
$$p = p_1 + p_2$$

$$\Rightarrow i \Gamma^{(2)}(p^2)$$

$$p^2 = 0 \Rightarrow i \Gamma^{(2)}(p^2) = -i \lambda$$

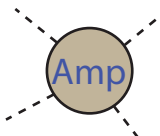
$$\lambda \equiv -\Gamma^{(2)}(p^2 = 0)$$

Essas definições podem ser resumidas em duas equações, chamadas de **condições de renormalização**:



$$\left[ \text{Diagram} = \frac{i}{p^2 - m^2} \right]_{p^2 = m^2}$$

esta equação fixa duas grandezas, a posição do polo e o seu resíduo ( $m$  e  $Z$ ).





$$= -i \lambda$$

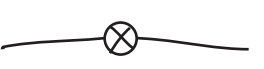
$p^2 = 0 \left\{ \begin{array}{l} s = 4m^2 \\ t = u = 0 \end{array} \right.$


(eq. 76.1)

Esta "nova" lagrangeana tem as seguintes regras de Feynman:



$$= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$


$$= -i \lambda$$


$$= i (p^2 \delta Z - \delta m)$$


$$= -i \delta \lambda$$

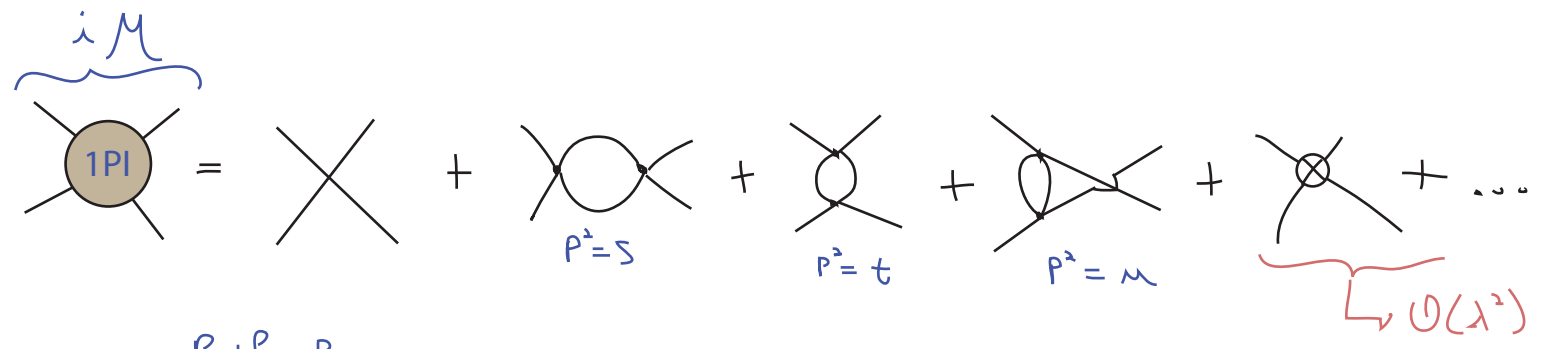
(notem que tratamos os contra termos como novas interações) e a utilização desta lagrangeana com contratermos é chamada de **Teoria de Perturbação Renormalizada**.

O procedimento a seguir é então o seguinte:

- (1) calculamos a amplitude desejada com as regras de Feynman novas
- (2) seguimos o procedimento usual para tratar loops (parametrização de Feynman, regularizações, etc...)
- (3) o resultado vai ser função dos parâmetros nos contratermos ( $\delta Z$ ,  $\delta m$  e  $\delta \lambda$  no caso escalar)
- (4) usamos as condições de renormalização (eq 76.1) para encontrar os parâmetros

As amplitudes resultantes devem ser finitas e independentes do regulador

Vejamos como ficam as divergências de  $\lambda \phi^4$ :



$$i\mathcal{M} = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} = (-i\lambda)^2 i V(P^2)$$

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + (-i\lambda)^2 [iV(s) + iV(t) + iV(u)] - i\delta_\lambda \quad (\text{eq. 77.1})$$

condição de normalização (eq. 76.1)  $\Rightarrow \left. \begin{matrix} s = 4m^2 \\ u = t = 0 \end{matrix} \right\} i\mathcal{M} = -i\lambda$   
 $\hookrightarrow (-i\lambda)^2 [iV(4m^2) + 2iV(0)] - i\delta_\lambda = 0$

$$\delta_\lambda = -\lambda^2 [V(4m^2) + 2V(0)] \quad (\text{eq. 77.2})$$

nesta ordem de perturbação

$$V(s) = \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2} =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dy \frac{1}{[m^2 - y(1-y)P^2]^{2-d/2}} \right\} =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dy \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \text{Li}[4\pi] - \text{Li}[m^2 - y(1-y)s] \right) \right\} =$$

(eq. 77.3)

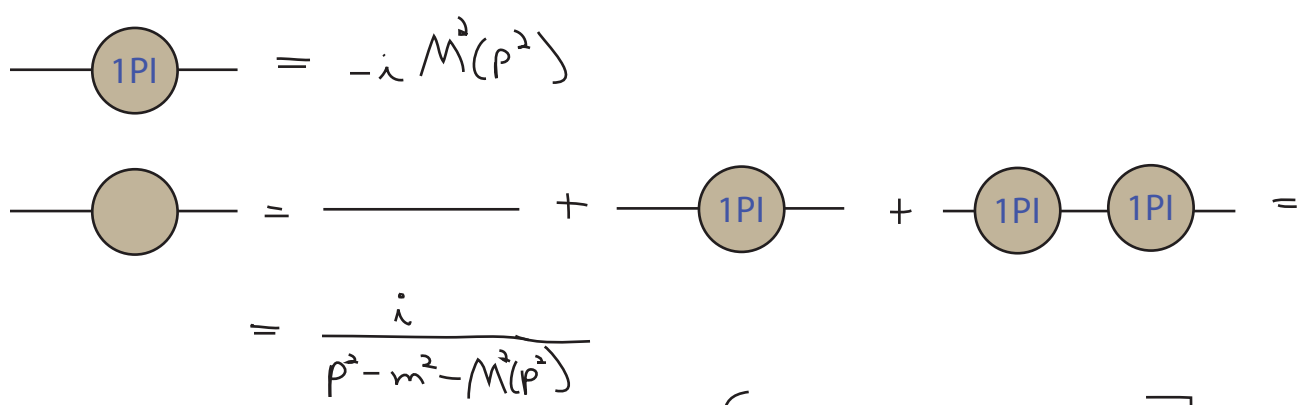
$$\delta_\lambda = \frac{\lambda^2}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dy \left\{ \frac{1}{[m^2 - y(1-y)4m^2]^{2-d/2}} + \frac{2}{[m^2]^{2-d/2}} \right\} =$$

$$= \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left( \frac{6}{\epsilon} - 3\delta + 3L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)4m^2] - 2L_N[m^2] \right)$$

Juntando este resultado ao de 77.1, temos

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left\{ \left( \frac{2}{\epsilon} - \delta + L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)S] \right) + \left( \frac{2}{\epsilon} - \delta + L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)u] \right) \right. \\ &+ \left. \left( \frac{2}{\epsilon} - \delta + L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)t] \right) \right\} - i\frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left( \frac{6}{\epsilon} - 3\delta + 3L_N[4\pi] - L_N[m^2 - \gamma(1-\gamma)4m^2] - 2L_N[m^2] \right) \\ &= -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\gamma \left\{ L_N\left(\frac{m^2 - \gamma(1-\gamma)S}{m^2 - \gamma(1-\gamma)4m^2}\right) + L_N\left(\frac{m^2 - \gamma(1-\gamma)u}{m^2}\right) + L_N\left(\frac{m^2 - \gamma(1-\gamma)t}{m^2}\right) \right\} \end{aligned}$$

$\delta_z$  e  $\delta_m$  vêm da função de dois pontos:



A condição de normalização é (76.1):

$$\left[ \text{tadpole diagram} = \frac{i}{p^2 - m^2} \right]_{p^2 \approx m^2}$$

portanto:  $M^2(p^2) \Big|_{p^2=m^2} = 0$  (eq. 78.1)

e também (expandindo o propagador em torno do polo):

$$p^2 - m^2 - M^2(p^2) = -M^2(p^2) \Big|_{p^2=m^2} + \left( 1 - \frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right) (p^2 - m^2) + \mathcal{O}(p^2 - m^2)^2$$

(eq. 78.2)

$$\frac{i}{p^2 - m^2 - M^2(p^2)} = \frac{i \left( 1 - \frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right)^{-1}}{p^2 - m^2} = 1 \Rightarrow \frac{dM^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} = 0$$



$\hookrightarrow n=2 \Rightarrow \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \rightarrow 2 - \frac{d}{2} \leq 0 \quad d \geq 4$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \sim \text{Log} \Lambda \iff \begin{cases} \text{apena um polo em } d \leq 4 \\ \epsilon = 4 - d \Rightarrow \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) \sim \frac{2}{\epsilon} + \dots \end{cases}$$

$$-i M^2(p^2) = \left( -\frac{i\lambda}{2} \right) \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1 - 1/2}} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m)$$

como esta parte não depende de  $p^2$ , fica fácil satisfazer ambas as condições (78.1 e 78.2)

basta que:

$$\delta_Z = 0 \quad (\text{eq. 80.1})$$

$$\delta_m = -\frac{\lambda}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1 - 1/2}} \quad (\text{eq. 80.2})$$

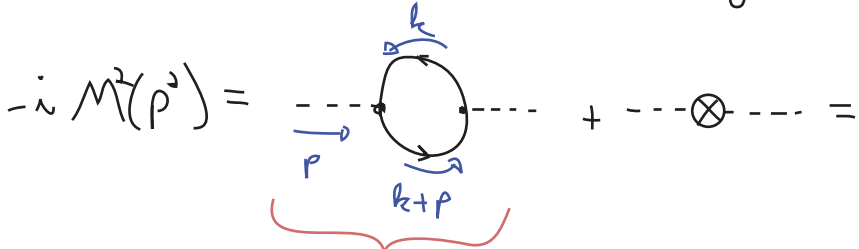
e teremos:  $M^2(p^2) = 0 \quad \forall p^2$

( $\delta_Z$  não é zero em ordens superiores de perturbação, veremos isso mais adiante)

Note que a correção para a massa do escalar é quadraticamente divergente!

Esse cancelamento de  $\delta_Z$  em L.O. é uma peculiaridade de  $\lambda\phi^4$ , outras teorias escalares não terão esta propriedade. Tomemos, por exemplo, uma teoria escalar com acoplamentos de Yukawa:

$$\mathcal{L}_Y = -\gamma \bar{\psi} \psi \phi$$



$$\Delta = m_\phi^2 - \kappa(1-\kappa) p^2$$

$$-i M^2(p^2) = -\gamma^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2 - \kappa(1-\kappa)p^2 + m^2}{(\ell^2 + \kappa(1-\kappa)p^2 - m_\phi^2)^2} = \frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx (d-1) \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{\Delta^{1-1/2}}$$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{\ell_E^2} \sim \int d\ell_E \frac{\ell_E^3}{\ell_E^2} \sim \Lambda^2$$



$$M^{\lambda}(p^2) = \frac{-4g^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx (d-1) \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Delta^{1-d/2}} - (p^2 \delta Z - \delta m)$$

$$\frac{d}{dp^2} M^{\lambda}(p^2) = -\frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left[ \underbrace{-x(1-x) \left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma(1-d/2)}_{-\Gamma(2-d/2)} (m^2 - x(1-x)p^2)^{d/2-2} \right] - \delta Z$$

$$\left. \frac{d}{dp^2} M^{\lambda}(p^2) \right|_{p^2=m^2} = 0 \Rightarrow \delta Z = -\frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{x(1-x) \Gamma(2-d/2)}{(m^2 - x(1-x)m^2)^{2-d/2}} \quad (\text{eq. 81.1})$$

→ ~ L<sub>N</sub>(Λ<sup>2</sup>)

$$M^{\lambda}(m^2) = \frac{-4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1-d/2)}{(m^2 - x(1-x)m^2)^{1-d/2}} - (m^2 \delta Z - \delta m)$$

$$M^{\lambda}(m^2) = 0 \Rightarrow \delta m = \frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1-d/2)}{(m^2 - x(1-x)m^2)^{1-d/2}} + m^2 \delta Z \quad (\text{eq. 81.2})$$

→ Λ<sup>2</sup>

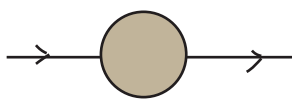
### Renormalização da QED

(Peskin 10.3, Ryder 9.5 a 9.7)

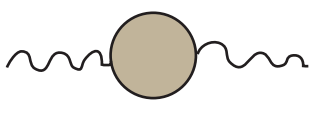
Tentemos agora repetir o processo acima para a QED

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi} (i\not{\partial} - m_0) \Psi - e_0 \bar{\Psi} \not{A} \Psi$$

Vimos que a partir desta lagrangeana obtemos:



$$= \frac{i Z_2}{\not{p} - m} + \dots \quad (\text{pg 5})$$



$$= -\frac{i Z_3 g_{\mu\nu}}{q^2} + \dots \quad (\text{pg 55})$$

Começamos então com a renormalização dos campos:

$$\Psi \equiv Z_2^{1/2} \Psi_R \quad (\text{eq. 82.1})$$

$$A^\mu \equiv Z_3^{1/2} A_{R\mu} \quad (\text{eq. 82.2})$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 (F_{\mu\nu})^2 + Z_2 \bar{\Psi}_R (i\not{\partial} - m_0) \Psi_R - e_0 Z_2 Z_3^{1/2} \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu}$$

A primeira condição de renormalização é a que define a carga física:

$$(e_0 Z_2 Z_3^{1/2} = e Z_1)_{q=0} \quad (\text{eq. 82.3})$$

isto é equivalente a definição de  $Z_1$  que usamos na eq 51.1 já que este é o fator que aparece no vértice (multiplicando a carga) quando  $q = 0$ . Ademais lembre que:

$$(\text{pg 55}) \Rightarrow Z_3^{1/2} e_0 = e$$

$$(\text{pg 52}) \Rightarrow Z_2 = Z_1$$

de forma que as definições dos  $Z$ 's que já vínhamos usando se mantêm.

Fazendo então as definições adicionais:

$$\begin{cases} \delta_3 = Z_3 - 1 \\ \delta_2 = Z_2 - 1 \\ \delta_m = Z_2 m_0 - m \\ \delta_1 = Z_1 - 1 = \frac{e_0}{e} Z_2 Z_3^{1/2} - 1 \end{cases}$$

(eq. 82.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} \underbrace{Z_3}_{1+\delta_3} (F_{\mu\nu})^2 + \underbrace{Z_2}_{1+\delta_2} \bar{\Psi}_R (i\not{\partial} - \underbrace{m_0}_{Z_2 m_0 = m + \delta_m}) \Psi_R - \underbrace{e_0 Z_2 Z_3^{1/2}}_{e Z_1 = e(1+\delta_1)} \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu} = \\ &= -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi}_R (i\not{\partial} - m) \Psi_R - e \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu} + \\ &\quad -\frac{1}{4} \delta_3 (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi}_R (i\delta_2 \not{\partial} - \delta_m) \Psi_R - \delta_1 e \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu} \end{aligned}$$

cujas regras de Feynman são:

$$\begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \xrightarrow{q} \end{array} = \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{solid line} \\ \xrightarrow{q} \end{array} = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$$

$$\text{Diagram} = -ie\gamma^\mu$$

$$\text{Diagram} = i(\not{p}\delta_2 - \delta_1 m)$$

$$\text{Diagram} = -i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\delta_3$$

$$\text{Diagram} = -ie\gamma^\mu\delta_4$$

$$\int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] = \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} A_\mu (-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu \right]$$

As condições que fixam as normalizações dos propagadores e definem a carga e a massa do férmion podem ser escritas usando as definições que fizemos anteriormente:

$$\text{Diagram (1PI)} = i\Pi^{\mu\nu}(q) = i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2)$$

$$\text{Diagram (1PI)} = -i\Sigma(\not{p})$$

$$\text{Diagram (Amp)} = -ie\Gamma^\mu(p,p)$$

Só que agora estou REDEFININDO estas grandezas, todas incluem agora as contribuições que vem dos contratermos  
 A definição de  $\Gamma$  agora é feita com a carga física

Como discutido na página 71, temos quatro grandezas divergentes na QED, isto levou aos quatro  $\delta$ 's nos contratermos, as quatro condições que usamos para obtê-los são:

(eq. 83.1)  $\Sigma(\not{p}=m) = 0$  (a)

$$\Pi(q^2=0) = 0$$
 (b)

$$\frac{d}{d\not{p}} \Sigma(\not{p}) \Big|_{\not{p}=m} = 0$$
 (c)

$$-ie\Gamma^\mu(p'-p=0) = -ie\gamma^\mu$$
 (d)

Vejamos a aplicação destas condições e o valor dos contratermos em um loop. Já obtivemos a expressão para a auto-energia do elétron usando regularização de Pauli-Villars (eq. 45.1), se tivéssemos feito regularização dimensional, chegaríamos a:

antes da inclusão dos contratermos

$$-i \sum_2^* (\rho) = -i \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\rho^2]^{2-d/2}} \times$$

$$\times [dm - (d-2)x\rho]$$

Levando em conta a contribuição do contratermo ( $\rightarrow \otimes \rightarrow$ ) e usando a condição 83.1(a), temos:

$$(m \delta_2 - \delta m) = \frac{e^2 m}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2}) (d - (d-2)x)}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)m^2]^{2-d/2}} =$$

$$= \frac{e^2 m}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2}) [(1-x)d + 2x]}{[(1-x)^2 m^2 + x\mu^2]^{2-d/2}} \quad (\text{eq. 84.1})$$

Para utilizar a condição 83.1(c) precisamos calcular:

$$\frac{d}{d\rho} \sum_2^* (\rho) = \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\rho^2]^{2-d/2}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{-2x(1-x)\rho \left(\frac{d}{2} - 2\right)}{[(1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)\rho^2]} [dm - (d-2)x\rho] - (d-2)x \right\}$$

$\epsilon = d - 4$

$$\frac{d}{d\rho} \sum_2^* (\rho) \Big|_{\rho=m} = \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{4-\epsilon}{2}}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]^{2-d/2}} \left\{ - (2-\epsilon)x + \right.$$

$$\left. + \frac{\epsilon}{2} \frac{2x(1-x)m}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]} m [4 - 2x + \epsilon(x-1)] \right\}$$

\* a divergência vem toda desta parte, todo o resto é proporcional a  $\epsilon$  e dá uma contribuição finita quando multiplicado por  $1/\epsilon$  que vem da função  $\Gamma$ .

Levando em conta a contribuição do contratermo  $(\rightarrow \otimes \rightarrow)$  e usando a condição 83.1(c), temos:

$$\delta_2 = \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{d-4}{2}}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]^{2-\frac{d}{2}}} \left\{ (2-\epsilon)x - \epsilon \frac{x(1-x)m^2}{[m^2(1-x)^2 + x\mu^2]} \left[ 4 - 2x + \epsilon(x-1) \right] \right\} \quad (\text{eq. 85.1})$$

Incluindo  $(\nu \rightsquigarrow \otimes \nu)$  na contribuição à auto-energia do fóton que calculamos em 60.2 e usando 83.1(b) temos:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = (q^\mu q^\nu - q^\nu q^\mu) i\Pi_2^*(q^2) - i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\delta_3 = i(q^\mu q^\nu - q^\nu q^\mu) (\Pi_2^* - \delta_3)$$

antes da inclusão dos contratermos

$$\Pi_2(q^2) = \Pi_2^*(q^2) - \delta_3 \xrightarrow{83.1(b)} \delta_3 = \Pi_2^*(0) \quad 60.2$$

$$\delta_3 = -\frac{8e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx \left[ x(1-x) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{[m^2]^{2-\frac{d}{2}}} \right] \quad (\text{eq. 85.2})$$

Para o vértice da QED, temos agora:

$$-ie\Gamma^\mu = -ie\Gamma^{*\mu} - ie\gamma^\mu\delta_1$$

antes da inclusão dos contratermos (mas sem  $Z_2$  na LSZ!)

A condição 83.1(d) nos dá:  $(1-\delta_1)\Gamma^\mu = \Gamma^{*\mu} (p'=p=0)$  (pg 27)

$$\delta_1 = -\delta F_1(0) \quad \rightarrow \quad F_1 = 1 + \delta F_1(0)$$

$\gamma^\mu F_1(0) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2(q^2) \xrightarrow{q=0} \gamma^\mu F_1(0)$

Como estamos fazendo tudo em regularização dimensional, precisamos escrever o resultado obtido em 36.2 nesse método, obtemos:

$$\delta F_1(q^2) = \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \frac{(2-\epsilon)^2}{2} + \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Delta^{3-\frac{d}{2}}} \left[ q^2 [2(1-x)(1-y) - \epsilon xy] + m^2 [2(1-y+z)^2 - \epsilon(1-z)^2] \right] \right\}$$

Onde:  $\Delta = (1 - \gamma^2)m^2 + z\nu^2 - \kappa\gamma^2$

$$\delta_1 = -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{[(1-\gamma^2)m^2 + z\nu^2]^{2-d/2}} \frac{(2-\epsilon)^2}{2} \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{[(1-\gamma^2)m^2 + z\nu^2]^{3-d/2}} m^2 [2(1-\gamma^2) + z^2] - \epsilon(1-z)^2 \right\}$$

$\int dz (1-z)$

(eq. 86.1)

As equações 84.1, 85.1, 85.2 e 86.1 fixam todos os coeficientes dos contratermos em ordem  $\alpha$ .

É possível mostrar (via integração por partes) que  $\delta_1 = \delta_2$  e que, portanto,  $z_1 = z_2$  (em ordem  $\alpha$ ). Podemos provar que isto continua valendo para qualquer ordem  $\alpha$  (o que não faremos aqui). Como um comentário final note o que aconteceria se pensarmos não apenas no elétron, mas também no muon, interagindo via QED. A equação 82.3 nos diz que:

elétron -  $e = e_0 \frac{z_2 z_3^{1/2}}{z_1}$

muon -  $e' = e_0 \frac{z_2' z_3^{1/2}}{z_1'}$

auto-energia do muon e correção do vértice, ambas dependem da massa do muon

Corremos o risco do muon sentir uma carga física diferente da do elétron, mesmo que comecemos com a mesma carga nua. No entanto como  $Z_1 = Z_2$  eles se cancelam, e temos:

$$e = e' = e_0 z_3^{1/2}$$

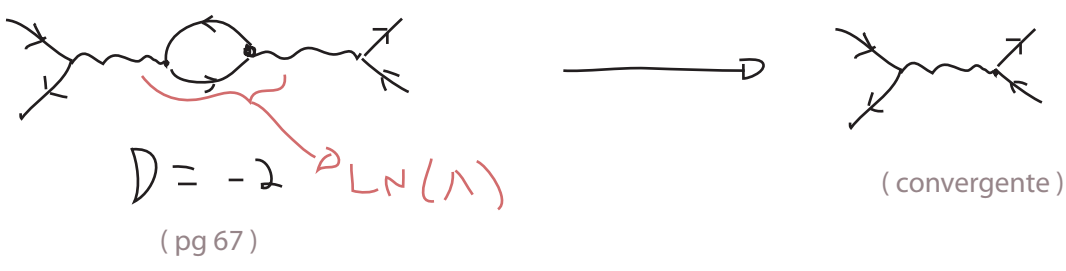
As identidades de WT (ou seja, a simetria de Gauge) garantem que a correção à carga venham somente do fóton, independente de qual partícula esta interagindo. Isto garante que o acoplamento de gauge da teoria continue universal, e que todas as partículas sintam o mesmo "running" deste acoplamento.

## Renormalização em ordem superior

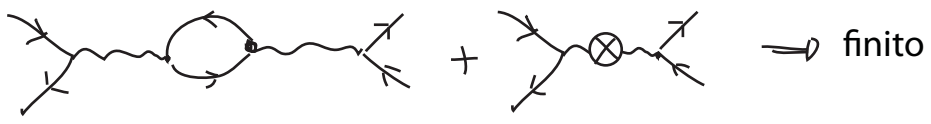
(Peskin 10.4, Ryder 9.7)

Vejam agora as sutilezas que aparecem quando consideramos diagramas com mais de um loop. Vimos que a divergência superficial de um diagrama pode nos enganar quando ele contém subdiagramas divergentes. No caso em que o diagrama que queremos calcular é convergente caso remo-

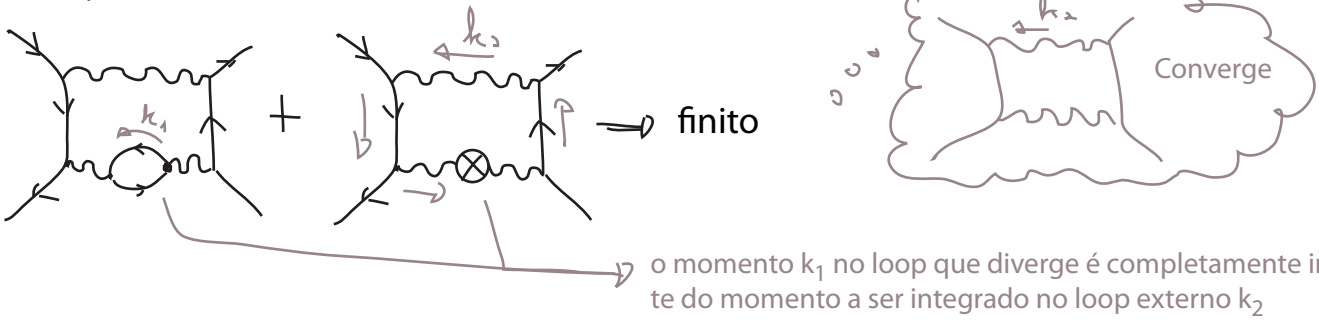
vamos o sub-diagrama divergente, fica relativamente simples:



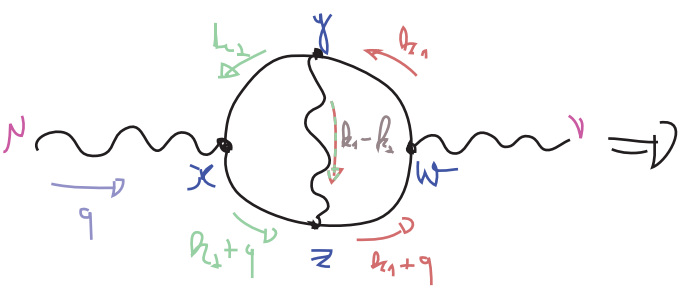
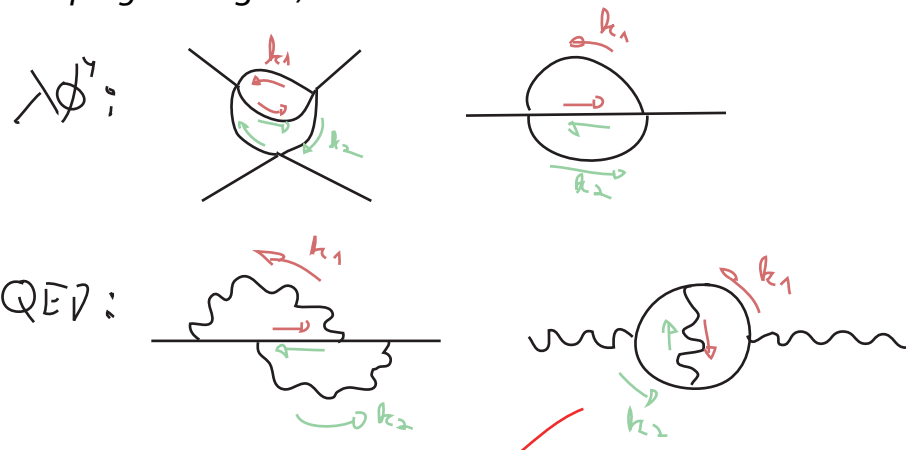
neste caso a divergência é cancelada pelo mesmo contratermo que cancelou a divergência do sub-diagrama:



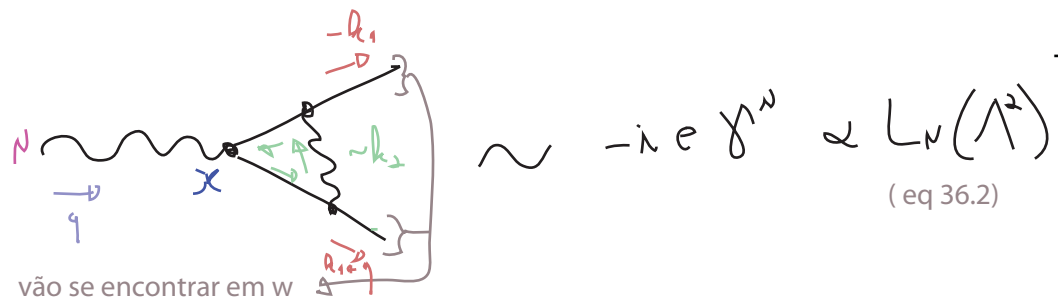
O mesmo vale para diagramas mais complicados. No exemplo abaixo basta somar os dois diagramas para cancelar a divergência na auto energia do fóton antes de fazer a integral no loop mais externo (que é finita)



A situação começa a ficar complicada quando temos diagramas em que dois loops divergentes compartilham um mesmo propagador, chamamos isto de **divergências sobrepostas** (*nested* ou *overlapping* em inglês)



Pensemos primeiro na região em que  $k_2$  é grande. Neste caso  $x, y$  e  $z$  tem que estar próximos (tanto o fóton quanto os eletrons no loop são muito virtuais) mas  $w$  pode ser mais distante. Podemos pensar nisso como uma correção de um fóton ao vértice em  $x$ :



Se voltamos com este vértice no diagrama completo antes de integrar em  $k_1$ , obteremos:

$$\text{Diagram} \sim \alpha (\gamma^\mu q^\nu - q^\mu \gamma^\nu) \Pi_2(q^2) \cdot \alpha L_N(\Lambda^2)$$

(pg 60)

$$\Pi_2(q^2) \sim \int_0^1 dx \, x(1-x) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \Delta^{\frac{d}{2}-2}$$

$\sim L_N(\Lambda^2) + L_N(\Delta) + \dots$   
 $\Delta \rightarrow m^2 - x(1-x)q^2$   
 $\frac{1}{\Delta} \sim L_N(\Lambda^2)$

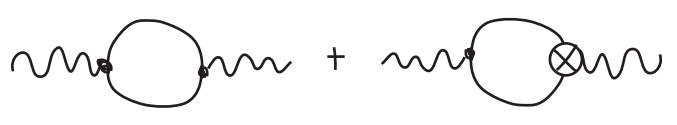
$$\text{Diagram} \sim \alpha^2 (L_N(\Lambda^2) + \frac{L_N(q^2)}{m^2}) L_N(\Lambda^2)$$

$q^2 \gg m^2$

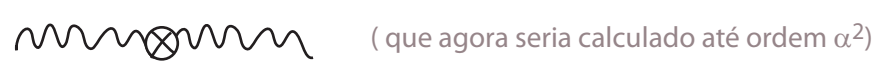
domina quando  $k_1$  ou  $k_2$  é pequeno  
 domina quando  $k_1$  também é grande

Estes termos proporcionais a  $L_N(q^2) L_N(\Lambda^2)$  vão contra nossa expectativa de que as divergências aparecem multiplicando simples polinômios em  $q^2$  (pense no que fizemos na pag 70). Chamamos as divergências que de fato multiplicam polinômios em  $q^2$  de **divergências locais**, essas divergências que não multiplicam polinômios são chamadas de **divergências não locais**.  
 pois no espaço das posições são funções delta (ou derivadas da delta)

A aproximação acima indica que, na região em que um dos momentos é pequeno e o outro grande, o que temos é uma divergência local dentro de um loop não divergente. Isso sugere que os diagramas necessários para corrigir a divergência são:



De fato, se fizéssemos a conta veríamos que estes cancelam a divergência não local. Uma vez somados, resta apenas uma divergência local que é cancelada como de costume, pelo diagrama



É possível mostrar que isso funciona a todas as ordens de perturbação, contanto que a teoria seja renormalizável pelo critério da divergência superficial. Isto quer dizer que uma vez que colocemos os contratermos necessários para cancelar as divergências locais, todas as divergências (locais ou não) são removidas a todas as ordens - este resultado é conhecido como teorema BPHZ (Bogoliubov - Parasiuk - Hepp - Zimmermann)



## O Grupo de Renormalização

(Peskin 8 &amp; 12.1, Ryder 9.4)

Vimos que, fazendo a renormalização de uma teoria, podemos obter resultados que independem da dinâmica no ultravioleta. As divergências somem e conseguimos uma teoria que funciona. No entanto é um tanto misterioso como as excitações de maior energia da teoria podem ter tão pouco efeito. Vamos então tentar ter uma imagem mais clara de como isso pode ocorrer.

Começemos pensando no funcional gerador de  $\lambda\phi^4$

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int [\mathcal{L} + \mathcal{J}\phi]} = \left( \prod_k \int d\phi(k) \right) e^{i \int [\mathcal{L} + \mathcal{J}\phi]}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{V} \sum_k e^{-i k x} \phi(k)$$

unitária

$$\mathcal{D}\phi(x) = \prod_k d\phi(k)$$

fazer uma regularização por cut-off significa integrar somente sobre:  $\phi(k) / |k| \leq \Lambda$   
 $k > \Lambda \rightarrow \phi(k) = 0$

pensando desta forma podemos estudar especificamente o efeito dos momentos da ordem do cut-off: basta integrar só sobre eles. Para evitar valores de  $k$  que, apesar de pequenos, tem valores enormes de  $k_0$  e  $\vec{k}$ , trabalharemos no espaço Euclideano.

$$|k_E| \leq \Lambda$$

Além disso, a teoria de campo no espaço Euclideano nos leva para perto de sistemas atômicos, onde podemos ter mais intuição do que significa o cut-off ultravioleta e a renormalização. Um bom exemplo de um sistema de mecânica estatística que é bem descrito por um campo escalar é um ferromagneto na teoria de Landau. A energia livre de Gibbs deste sistema é:

$$G = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\nabla s)^2 + b(T - T_c) s^2 + c s^4 - H s \right]$$

E a densidade de spin  $s(x)$  faz o papel do campo escalar, ao passo que o campo externo  $H$  é a fonte. Nesse caso é bastante óbvio que existe um cut-off físico, não faz sentido falar em flutuações da densidade de spin em distâncias menores que o espaçamento entre os átomos que compõe o material.

Pensemos um pouco sobre este sistema em termos de temperatura: se estamos longe de qualquer ponto crítico, é de se esperar que hajam flutuações de spin na escala atômica. No entanto assim que nos afastamos para escalas maiores, da ordem de algumas dezenas de distâncias atômicas, o sistema já deve parecer uniforme e nenhuma flutuação é visível. Podemos descrever este comportamento usando teoria de campos. Mas primeiro vamos lembrar um pouco da física por trás do problema

Estamos imaginando, por simplicidade, que se trata de um material com um eixo preferencial de magnetização

$T \sim 0$   
 $H = 0$  }  $\rightarrow$  Magnetização  $M$  paralela ou antiparalela a este eixo

$$M = \int d^3x S(x)$$

tanto o campo como os spins são definidos na direção deste eixo

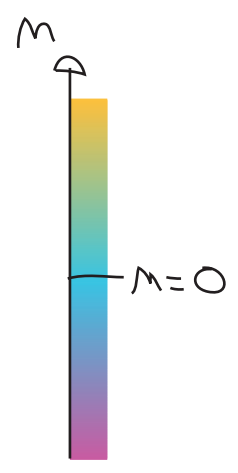
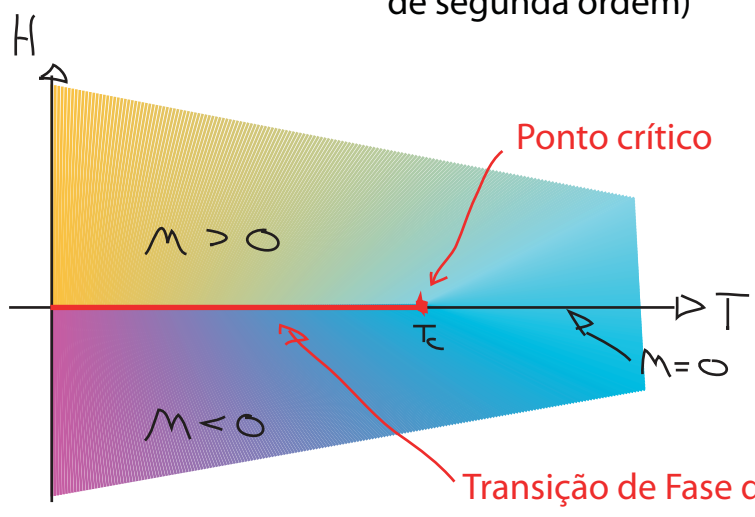
$T \sim 0$   
 $H \neq 0$  }  $\rightarrow$  Favorece  $M$  paralelo ou antiparalelo

Mudança de  $H$  pequeno e negativo para pequeno e positivo }  $\rightarrow$  Mudança descontínua em  $M$   
 $T \sim 0$  } **Transição de fase de primeira ordem**

$T_c > T > 0 \rightarrow$  Spins cada vez mais desordenados  $|M|$  vai diminuindo

$T = T_c$   
 $H = 0$  }  $\rightarrow M = 0$

$\hookrightarrow$  Valores grandes de  $H$  ainda induzem magnetização, mas a descontinuidade perto de  $H = 0$  desaparece. Este é o ponto crítico (ou transição de fase de segunda ordem)



Ao longo da linha da transição de fase os dois estados ( $M > 0$  e  $M < 0$ ) coexistem em equilíbrio. A energia livre de Gibbs só depende de  $M$  e  $T$  e é dada por:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial M} \right|_T = H$$

Perto do ponto crítico  $M$  é pequeno e podemos expandir  $G(M)$  como:

$$G(M) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4$$

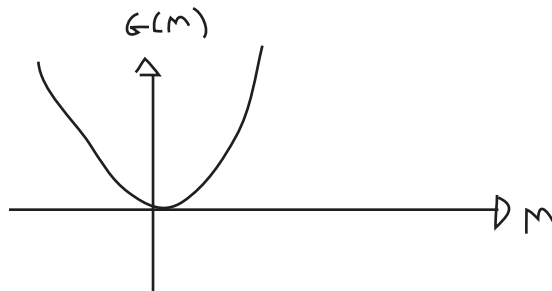
o sistema é simétrico por mudança no sinal de  $M$ , então  $G(M)$  tem que ser par

Para encontrar o estado do sistema em  $H = 0$ , devemos minimizar  $G$ :

$$H=0 \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial M} = 2B(T)M + 4C(T)M^3 = 0$$

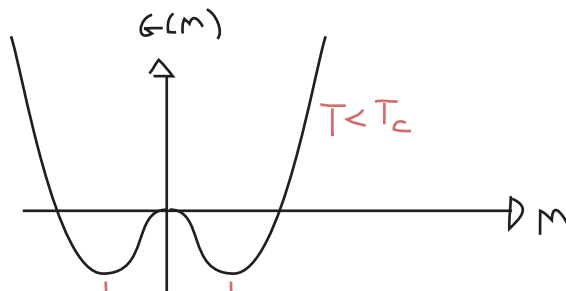
Resta fixar  $B$  e  $C$ , suponha que:

$$B, C > 0 \Rightarrow M = 0$$



No entanto se  $B$  puder ser negativo (digamos, abaixo de uma dada temperatura) então temos uma solução menos trivial:

$$\left. \begin{array}{l} C > 0 \\ B(T < T_c) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$



dois mínimos com magnetizações opostas

Fica claro que podemos modelar o sistema definindo:

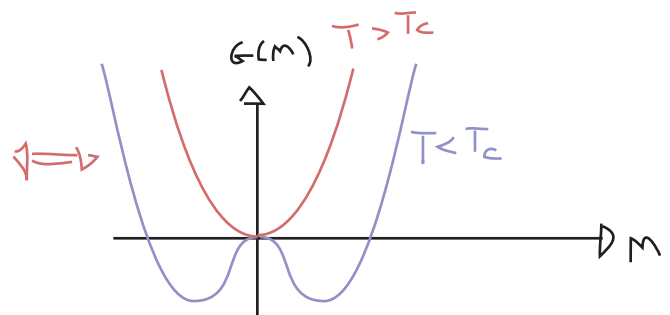
$$B(T) = b(T - T_c) \quad C(T) = c \quad b, c > 0$$

Neste caso temos:

$$M = \begin{cases} 0 \\ \pm \left[ \frac{b}{2c} (T_c - T) \right]^{1/2} \end{cases}$$

$$T > T_c$$

$$T < T_c$$



Para obter o comportamento para  $H$  não nulo precisamos resolver

$$\frac{\partial G}{\partial M} \Big|_T = H \quad G = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4$$

ou podemos minimizar (em relação a  $M$ ):  $G(M, H) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4 - HM$

Só temos o duplo mínimo para  $H = 0$  e  $T < T_c$ . Substituindo a definição de  $M$ , e as expressões para  $B(T)$  e  $C(T)$  na energia de Gibbs, obtemos a expressão que comparamos com o campo escalar:

$$G = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\nabla s)^2 + b(T - T_c) s^2 + c s^4 - H s \right] \quad H = H(x)$$

este termo adicional inclui a física microscópica, é o jeito mais simples de introduzir a tendência dos spins de se alinhar

Suponha que:  $H(x) = H_0 \delta^{(3)}(x)$  } Vamos ver qual é a resposta em pontos longe de  $x$ . Procurando o mínimo de  $G$  em relação a configurações do campo  $s$  obtemos:

$$0 = \delta G[S(x)] = -\nabla^2 s + 2b(T - T_c) s + 4c s^3 - H$$

$$\left. \begin{array}{l} T > T_c \Rightarrow \kappa \neq 0 \\ M \sim 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s < 1 \\ s^3 \sim 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (-\nabla^2 + 2b(T - T_c)) s(x) = H(x)$$

$$H(x) = H_0 \delta^{(3)}(x) \Rightarrow (-\nabla^2 + 2b(T - T_c)) D(x) = H_0 \delta^{(3)}(x)$$

Função de Green!

Configuração do campo  $s(x)$  que surge quando o spin em  $x = 0$  é forçado a se alinhar com  $H$

$$D(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{H_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{k}|^2 + 2b(T - T_c)} = \frac{H_0}{4\pi} \frac{1}{\kappa} e^{-\kappa r/\xi} = \langle s(x) s(0) \rangle$$

$$\sum_{s(x)} s(x) s(0) e^{-\frac{H}{kT}}$$

comprimento de correlação  $\rightarrow \xi = [2b(T - T_c)]^{-1/2}$

É importante perceber que, apesar do resultado depender dos coeficientes  $b$  e  $c$ , que são dados pela física no UV (física atômica), a lei de potência em  $(T - T_c)$  só depende de podermos expandir  $G$  em série, e da simetria que o torna par. De fato, obteríamos o mesmo resultado para qualquer sistema com esta simetria (existem vários exemplos). O fato de que podemos usar teoria de campos para descrever certas propriedades de sistemas de mecânica estatística perto do ponto crítico **independentemente de detalhes na escala atômica** (a chamada **universalidade**) está intimamente ligado ao fato de podermos construir TQCs **independentes de cut-off**.

Note que o valor de  $s(x)$  estará ligado ao valor em  $x=0$  dependendo de quão longe ele está de  $x=0$ . A escala de "longe" é dada por  $\xi$ , note que este diverge quando chegamos perto da temperatura crítica - o sistema fica fortemente correlacionado. Voltando para nossa analogia com teoria quântica de campos, estamos falando de uma partícula escalar que carregaria a informação da existência da fonte em  $x=0$ , e que a "massa" desta partícula ( $\xi^{-1}$ ) é da ordem de  $[b(T-T_c)]^{-1/2}$ . Se estivermos longe da temperatura crítica  $|T| \gg |T_c|$ , então o único parâmetro que determina a massa é  $B(T)$ , que vem da **escala ultravioleta da teoria**. O tamanho de  $m$  é então fixado pela única escala natural do sistema, portanto esperamos que  $m \sim \Lambda$  (que no exemplo seria o inverso do típico tamanho atômico).

No cálculos que fizemos até agora, estávamos interessados justamente no caso em que  $m \ll \Lambda$ , e ajustamos os parâmetros da teoria para obter esta situação. Com isso em mente, vamos ver como fica a separação de escalas na integral de trajetória.

$$Z = \int [D\phi]_{\Lambda} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\Delta_0}{4!} \phi^4 \right] \right\} \quad (\text{eq. 93.1})$$

$$[D\phi]_{\Lambda} \equiv \prod_{|k| < \Lambda} d\phi(k)$$

$$\phi(k) \begin{cases} \hat{\phi}(k) = \begin{cases} \phi(k) & |k| \leq \Lambda \\ 0 & |k| < \Lambda \text{ ou } |k| \geq \Lambda \end{cases} \\ \phi(k) = \begin{cases} \phi(k) & |k| < \Lambda \\ 0 & |k| \geq \Lambda \end{cases} \end{cases} \quad \Lambda < 1$$

$$\phi(k) \rightarrow \phi(k) + \hat{\phi}(k)$$

$$Z = \int D\phi \int D\hat{\phi} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi + \partial_\mu \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_0^2 (\phi + \hat{\phi})^2 + \frac{\Delta_0}{4!} (\phi + \hat{\phi})^4 \right] \right\} =$$

Todos os termos do tipo  $\phi(k_1) \hat{\phi}(k_2)$  são iguais a zero (ortogonalidade para  $k \neq k'$ )

$$= \int D\phi e^{-\int \mathcal{L}(\phi)} \int D\hat{\phi} \text{Exp} \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \hat{\phi}^2 + \lambda \left( \frac{1}{6} \phi^3 \hat{\phi} + \frac{1}{4} \phi^2 \hat{\phi}^2 + \frac{1}{6} \phi \hat{\phi}^3 + \frac{1}{4!} \hat{\phi}^4 \right) \right] \right\}$$

Queremos então integrar em  $\hat{\phi}$ , se tratarmos todos os termos (com exceção do cinético) como interações (incluindo o termo de massa), podemos escrevê-los como derivadas agindo em  $\text{Exp}[-\int \mathcal{L}_0(\hat{\phi})]$

Onde:

$$\int \mathcal{L}_0 = \int d^d x \partial_\nu \hat{\phi}(x) \partial^\nu \hat{\phi}(x) = \int d^d k \int_{|k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_{|k'| < \Lambda} \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} e^{-i k x} e^{-i k' x} i k_\nu i k'_\nu \hat{\phi}(k) \hat{\phi}(k') =$$

$$= \int_{|k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k^2 \underbrace{\hat{\phi}(-k)}_{\hat{\phi}^*(k)} \hat{\phi}(k)$$

condição para que  $\phi(x)$  seja real, ver Peskin pg 285

Isso nos leva a um propagador (no espaço dos momentos):

$$\hat{\phi}(k) \hat{\phi}(p) = \frac{\int \mathcal{D}\hat{\phi} \hat{\phi}(k) \hat{\phi}(p) e^{-\int \mathcal{L}_0}}{\int \mathcal{D}\hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_0}} = \frac{1}{k^2} (2\pi)^d \delta(k+p) \Theta(k)$$

$\Theta(k) = \begin{cases} 1 & |k| < \Lambda \\ 0 & \text{quer outro } k \end{cases}$

Os outros termos da lagrangeana de  $\hat{\phi}$  são tratados como interações em teoria de perturbação. Tomemos como exemplo o termo  $\hat{\phi}^2$ :

$$\text{Exp} \left\{ - \int d^d x \lambda_0 \left( + \frac{1}{4} \hat{\phi}^2 \right) \right\} \simeq - \int d^d x \frac{\lambda_0}{4} \hat{\phi}^2 \hat{\phi} \hat{\phi}$$

Em princípio poderíamos calcular funções de dois pontos com quaisquer combinações de  $\phi$  e  $\hat{\phi}$ :

$$\langle \phi \phi e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \langle \hat{\phi} \hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \langle \phi \hat{\phi} \phi \hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_I} \rangle, \dots$$

Mas se considerarmos que momentos próximos ao cut-off só aparecerão em integrais de loop e nunca nas linhas externas dos diagramas, então os campos  $\hat{\phi}$  só aparecem em loops. Em termos do teorema de Wick temos:

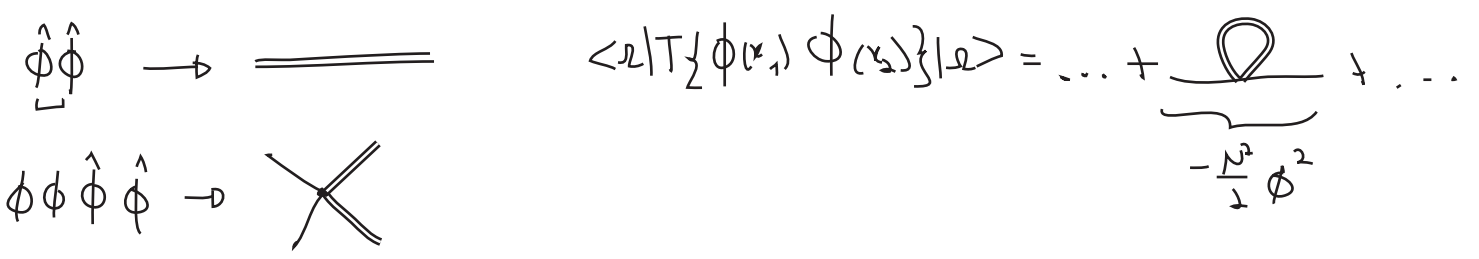
$$\left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[ - \int \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \hat{\phi} \hat{\phi} \right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[ - \int \frac{\lambda_0}{4} \phi^2 \underbrace{\hat{\phi} \hat{\phi}} \right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{O}_n(\phi) \left[ - \int \frac{\lambda_0}{2} \phi^2 \right] \right\rangle$$

↙ operador com n campos  $\phi$       ↘ estamos assumindo que os campos externos serão  $\phi$  e não  $\hat{\phi}$

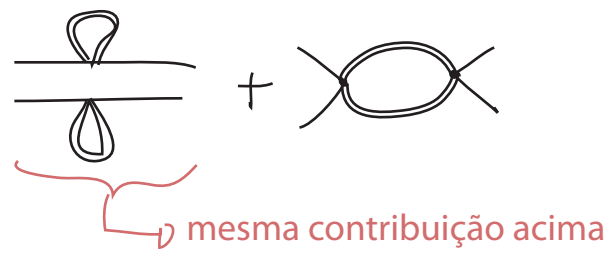
$$N = \frac{\lambda_0}{2} \int_{b\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} = \frac{\lambda_0}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(d/2)}{d-2} \Lambda^{d-2}$$

O importante a ser notado aqui é que este termo também seria obtido de um termo  $-\frac{N}{2} \phi^2$  na lagrangeana

Para ver o que ocorre em ordens superiores, é útil definir diagramas:



Em ordem  $\lambda_0^2$  temos, para a função de 4 pontos:



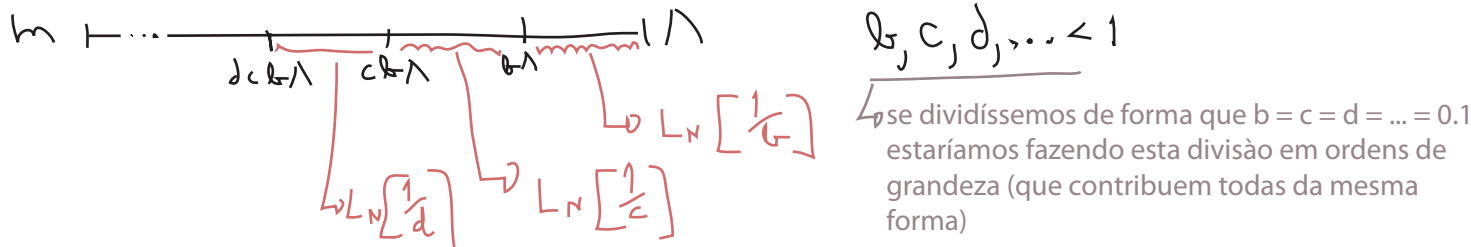
assumindo que o momento das pernas externas é muito pequeno comparado com  $b\Lambda$ , podemos ignorá-los e obter

$$L_0 = -\frac{1}{4!} \int d^d x \zeta \phi^4 \quad \text{equivale a} \quad \text{X diagram} \quad -i\zeta$$

$$\zeta \equiv -4! \frac{2}{2!} \left(\frac{\lambda_0}{4}\right)^2 \int_{b\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{k^2}\right)^2 = \frac{-3\lambda_0^2}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(d/2)}{d-4} \Lambda^{d-4}$$

$$\stackrel{d \rightarrow 4}{=} -\frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} L_N \left[ \frac{1}{k} \right] \quad \text{(eq. 95.1)}$$

Note que se fizessemos mais subdivisões (multiplicativamente), cada intervalo teria uma contribuição similar:



Este procedimento gera contribuições não só a  $\phi^2$  e  $\phi^4$ , mas também a ordens superiores. O termo  $\phi^3 \hat{\phi}$  por exemplo:

$$\sim \frac{\lambda_0^2}{(p_1 + p_2 + p_3)^2} \oplus (p_1 + p_2 + p_3)$$

Obtemos acoplamentos com derivadas também. Para o diagrama abaixo por exemplo, desprezamos o momento das linhas externas. Se ao invés disso fizermos uma expansão para o momento externo pequeno, o próximo termo seria:

$$= -\frac{1}{4!} \int d^d x \zeta \phi^4 - \frac{1}{4} \int d^d x \eta \phi^2 (\partial_\mu \phi)^2 + \dots$$

De forma geral obteremos todas as interações possíveis (de potências arbitrariamente altas) entre o campo  $\phi$  e suas derivadas. Temos diversas contribuições desconectadas que acabam sendo eliminadas pela normalização de qualquer correlator, então podemos finalmente escrever

$$Z = \frac{1}{N} \int \left[ \mathcal{D}\phi \right] e^{-\int d^d x \mathcal{L}_{EFF}}$$

$$\mathcal{L}_{EFF} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi^4 + \left( \text{contribuições conectadas de } \hat{\phi} \right) \quad (\text{eq. 96.1})$$

Este processo de excluir um campo das linhas externas da teoria fazendo seu momento (ou massa) muito grande comparado com as outras é chamado de "integrate out" o campo (não conheço uma tradução para o português melhor do que "integrar" o campo). Façamos então uma comparação entre a lagrangiana original e a que obtivemos após a integração

$$k' = \frac{k}{\Lambda} \quad \kappa' = \kappa \Lambda$$

$$0 < k < \Lambda \rightarrow 0 < |k'| < 1$$

$$\int d^d x \mathcal{L}_{EFF} = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (1 + \Delta z) (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m_0^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4!} (\lambda_0 + \Delta \lambda) \phi^4 + \Delta C (\partial_\mu \phi)^4 + \Delta D \phi^6 + \dots \right]$$

contribuições da "out-integration" de  $\hat{\phi}$

$$= \int d^d x' \Lambda^{-d} \left[ \frac{1}{2} (1 + \Delta z) \Lambda^2 (\partial'_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m_0^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4!} (\lambda_0 + \Delta \lambda) \phi^4 + \Delta C \Lambda^4 (\partial'_\mu \phi)^4 + \dots \right]$$



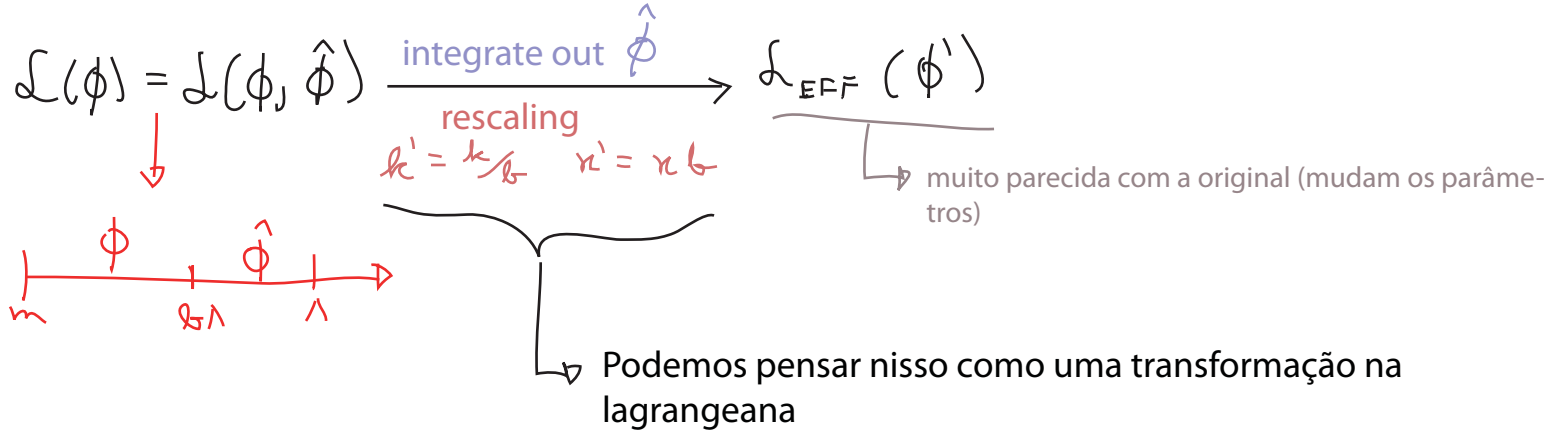
Podemos voltar a uma forma muito parecida com a lagrangeana original fazendo as seguintes definições:

$$\begin{aligned} \phi' &= [b^{2-d} (1 + \Delta z)]^{1/2} \phi \\ m'^2 &= (m_0^2 + \Delta m^2) (1 + \Delta z)^{-1} b^{-2} \\ \lambda' &= (\lambda_0 + \Delta \lambda) (1 + \Delta z)^{-2} b^{d-4} \\ c' &= (c_0 + \Delta c) (1 + \Delta z)^{-2} b^d \\ \mathcal{D}' &= (\mathcal{D}_0 + \Delta \mathcal{D}) (1 + \Delta z)^{-3} b^{2d-6} \\ &\vdots \end{aligned}$$

(eq. 97.1)

$$\int d^d x \mathcal{L}_{EFF} = \int d^d x' \left[ \frac{1}{2} (\partial'_\mu \phi')^2 + \frac{1}{2} m'^2 \phi'^2 + \frac{\lambda'}{4} \phi'^4 + c' (\partial'_\mu \phi')^4 + \mathcal{D}' \phi'^6 + \dots \right]$$

Pensando em todo o processo, o que fizemos foi:



Podemos, de fato, repetir o processo para uma nova "fatia" do espaço de momentos ( $cb\Lambda < |k| < b\Lambda$ ). Cada transformação sucessiva resulta em uma nova transformação dos coeficientes dos termos na lagrangeana (como em 97.1). Se fizermos todos os parâmetros desta transformação ( $b, c, \dots$ ) infinitesimalmente próximos de 1 (o que equivale a fazer as "fatias" tenderem a zero) temos uma transformação contínua. Neste caso vemos que podemos descrever o resultado de integrar sobre os graus de liberdade com momentos grandes como uma trajetória ou caminho (em inglês é comum usar "flow") sobre o espaço das possíveis lagrangeanas. O conjunto destas transformações é chamado de **Grupo de Renormalização (RG)** (embora não formem verdadeiramente um grupo, pois não são inversíveis).

Notem que temos então duas formas de atacar o mesmo problema. Suponha que estejamos interessados em um processo qualquer em que os momentos típicos (da partículas reais) sejam muito menores que uma escala qualquer  $\Lambda$  (usemos a teoria escalar para ilustrar):

**Método 1:**  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda_0 \phi^4}{4!}$

Calculamos a função de n-pontos

↓  
Surgem divergências assim que consideramos loops (porque é neles que entra a dinâmica de altas energias)

↓ Renormalização

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \text{contratermos}$$

$m^2 = m_0^2 \pm \delta m$   
 $\lambda = \lambda_0 \pm \delta \lambda$

as divergências aqui (nos  $\delta$ 's) nos forçam assumir que os parâmetros nús ( $m_0, \lambda_0$ ) eram infinitos, o que parece criar problemas para a série perturbativa

→ resultados finitos

Método 2: 
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda_0 \phi^4}{4!}$$

Diversas transformações sucessivas em que "integramos" os modos de alto momento, embutindo o seu efeito de volta na lagrangeana. Em cada passo temos só **integrais finitas** e os parâmetros da lagrangeana são também sempre assumidos pequenos.

$(m_0 \ll \Lambda)$        $(\lambda \text{ perturbativo})$

$m_0, \lambda_0$  finitos!

há de se tomar cuidado, pois  $\lambda$  vai mudando e por enquanto assumimos que ele nunca vai ficar forte o bastante para invalidar a teoria de perturbação.

$$\mathcal{L}_{\text{EFF}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda \phi^4}{4!} + \text{ todos os termos possíveis (de qualquer dim.)}$$

→ resultados finitos (o campo que sobra é zero para qualquer momento um pouco acima dos momentos externos considerados)

Os dois métodos devem nos fornecer os mesmos resultados, mas o segundo deixa diversas idéias mais claras. Para começar a teoria de perturbação é válida em qualquer ponto do cálculo, desde que a constante de acoplamento não evolua para valores grandes (o que de fato acontece em algumas teorias). Além disso fica claro que todas as grandezas vão depender da escala que estamos considerando (aquela que sobra no final, depois de integrarmos tudo acima dela).

Vejamos como a lagrangeana tende a variar sobre as transformações do grupo de renormalização. As lagrangeanas são definidas no espaço dos coeficientes de seus termos (que são operadores compostos dos campos), no caso escalar, por exemplo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 + c (\partial_\mu \phi)^4 + \mathcal{D} \phi^6 + \dots$$

→ parâmetros que definem o espaço de lagrangeanas escalares

→ da forma que definimos as transformações do RG este termo fica sempre igual.

O ponto  $\{m^2, \lambda, C, D, \dots\} = \{0, 0, 0, 0, \dots\}$  é o que chamamos de **ponto fixo** para as transformações do RG, uma vez que nele temos apenas:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2$$

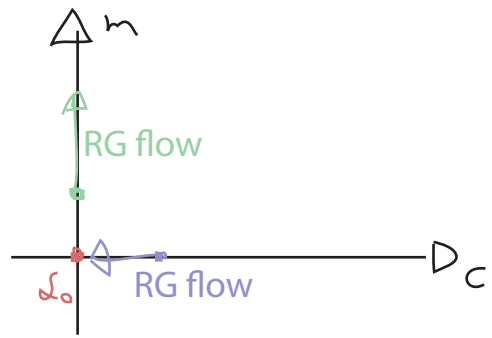
e portanto não há interações que vão corrigir os outros parâmetros e tirá-los de zero. Perto deste ponto podemos ignorar as correções superiores na perturbação e simplificar as transformações 97.1:

(eq. 97.1)

$$\left. \begin{aligned} b^d m'^2 &= (m_0^2 + \Delta m^2) (1 + \Delta z)^{-1} b^{-2} \\ \lambda' &= (\lambda_0 + \Delta \lambda) (1 + \Delta z)^{-2} b^{d-4} \\ C' &= (C + \Delta C) (1 + \Delta z)^{-2} b^d \\ D' &= (D + \Delta D) (1 + \Delta z)^{-3} b^{2d-6} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} m'^2 \simeq m_0^2 b^{-2} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ \lambda' \simeq \lambda_0 b^{d-4} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ C' \simeq C b^d + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ D' \simeq D b^{2d-6} + \mathcal{O}(\Delta \dots) \\ \vdots \end{cases}$$

$\{m^2, \lambda, C, D, \dots\} \sim \{0, 0, 0, 0, \dots\}$

Como  $b < 1$ , os parâmetros com **potências negativas de b crescem**, e os com **potências positivas de b diminuem** quando aplicamos a transformação.



Os operadores cujos coeficientes crescem com as transformações sucessivas são chamados de **relevantes** e os que desaparecem são chamados de **irrelevantes**. Os operadores cuja potência em b é zero são chamados de **marginais**, e precisamos das correções perturbativas de ordem mais alta para saber se eles crescem ou decrescem.

- no caso escalar:
- $\phi^2$  é relevante sempre (independentemente do numero de dimensões)
  - $\phi^4$ 
    - $d < 4$  relevante
    - $d = 4$  marginal
    - $d > 4$  irrelevante

De uma forma geral, o coeficiente de um operador com N potências de  $\phi$  (escalar) e M derivadas vai se transformar conforme (veja pg 96-97, note que queremos manter o termo cinético normalizado):

$$C'_{N,M} = \underbrace{b^{-d}}_{\text{scaling da integral}} \underbrace{b^{\left(\frac{d-2}{2}\right)N}}_{\text{transf. do campo (eq. 97.1)}} \underbrace{b^M}_{\text{scaling das derivadas}} C_{N,M} = b^{N\left(\frac{d}{2}-1\right)+M-d} C_{N,M}$$

Note que a dimensão do operador é (veja pg 73):

$$Dim [\hat{O}_{N,m}] = N \left( \frac{d-2}{2} \right) + M = d_{N,m}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{dimensão do campo escalar}}$ 
 $\underbrace{\hspace{5em}}_{\text{cada derivada aumenta a dimensão em 1}}$

Como a lagrangeana deve ter dimensão d, a dimensão do coeficiente deste operador deve ter dimensão:

$$Dim [C_{N,m}] \equiv D_c = d - d_{N,m} = d - \left[ N \left( \frac{d-2}{2} \right) + M \right]$$

que é justamente o que aparece no expoente de b (com sinal trocado). Comparando isto com o resultado da página 74 (eq 74.1), vemos que operadores **relevantes** ( $D_c > 0$ ) equivalem a interações **super-renormalizáveis**, operadores **marginais** ( $D_c = 0$ ) equivalem a interações **renormalizáveis** e os **irrelevantes** ( $D_c < 0$ ) equivalem a interações **não-renormalizáveis**.

Uma outra forma de relacionar o comportamento dos coeficientes com a dimensão do operador consiste em pensar que o coeficiente é naturalmente da ordem de:

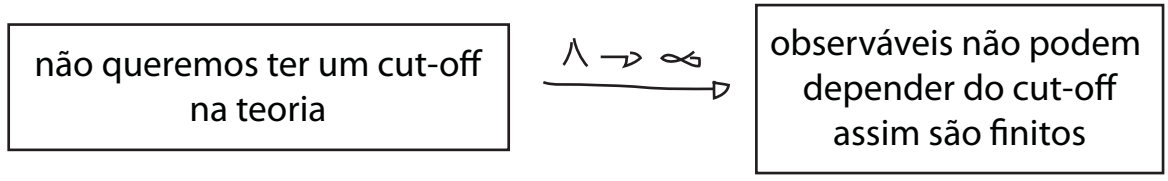
$$C_{\text{COEF.}} \sim (\text{massa})^{d - d_{N,m}} \sim (\Lambda)^{d - d_{N,m}}$$

$$d < d_{N,m} \Rightarrow C_{\text{COEF.}} \sim \frac{1}{\Lambda^{|d - d_{N,m}|}} \left\{ \begin{array}{l} \text{irrelevante para momentos pequenos} \\ |p| \ll \Lambda \Rightarrow \left( \frac{|p|}{\Lambda} \right)^{d_{N,m} - d} \sim 0 \end{array} \right.$$

$$d > d_{N,m} \Rightarrow C_{\text{COEF.}} \sim \Lambda^{|d - d_{N,m}|} \quad \text{importante mesmo em pequenos momentos porque } \Lambda \text{ é grande}$$

Este é um resultado importante porque nos diz que, pelo menos em regiões próximas ao ponto fixo da lagrangeana livre, qualquer lagrangeana, não importa o quão complicada, acabará se tornando uma lagrangeana com um numero finito de interações renormalizáveis.

Isto muda um pouco nosso ponto de vista sobre teorias renormalizáveis, anteriormente seguimos o seguinte raciocínio:

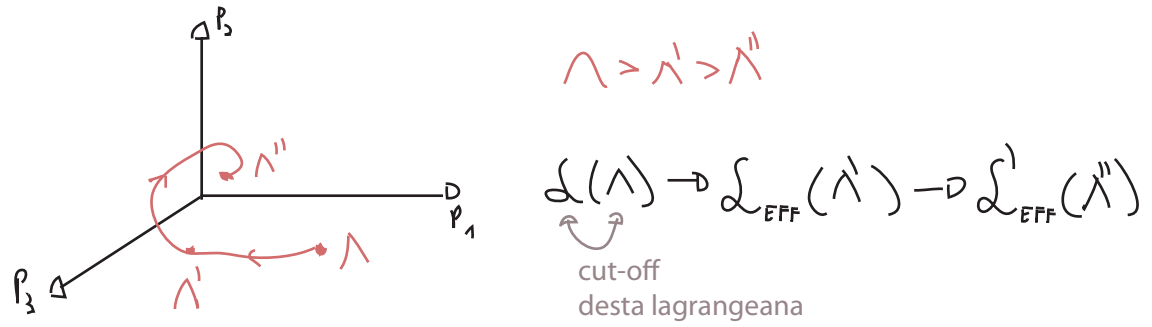


Só consigo uma teoria preditiva se não houver termos não-renormalizáveis

↳ Só teorias renormalizáveis são boas (é uma "sorte" que a QED o seja)

sorte no sentido que, nesta visão, não há motivo para uma teoria independente do cut-off ter sido realizada na natureza ↴

Agora temos uma outra perspectiva, suponha que qualquer teoria de campo tenha um cut-off - mesmo que não saibamos onde ele fica ou qual teoria começa ali (gravidade quântica?) - e que ele esteja bem acima do nosso alcance experimental. O que fazemos é usar as transformações do RG para "trazer" o cut-off para perto da escala em que estamos calculando o espalhamento, e incluímos os efeitos das altas energias na lagrangeana efetiva.



Se neste processo as interações não-renormalizáveis forem suprimidas, então as equações do RG nos dão **uma razão para que a QED seja renormalizável**: qualquer teoria com acoplamentos suficientemente fracos se comportará como uma teoria renormalizável em baixas energias.

É claro que temos que tomar cuidado com os casos em que os acoplamentos crescem, ou que estamos um pouco mais longe do ponto fixo, vamos ver isso com um pouco mais de detalhe:

$$\lambda \phi^4$$

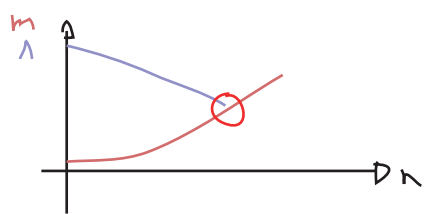
$$\mathcal{L} \sim \mathcal{L}_0$$

$$d > 4$$

⇒ Apenas o termo de massa é relevante, começamos com  $m_0 \ll \Lambda_0$

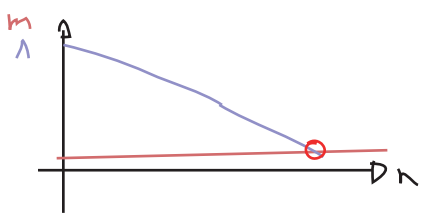
$$m_0^2 \xrightarrow{n \text{ integrações}} m'^2 = m_0^2 e^{-2n}$$

$$\Lambda_0 \longrightarrow \Lambda'$$



Em algum ponto  $m'^2 \sim \Lambda'^2$  e temos que parar aí. Exigir que  $m'$  seja uma massa "pequena" significa exigir que a massa:

(a) comece perto do ponto fixo da teoria livre e mude muito pouco com as transformações do RG, e somente o cut-off é que vai baixando;



ou: (b) se ela começar longe de  $\mathcal{L}_0$ , então ela flue para lá e então se comporta como em (a)

A situação (a) exige que a  $m$  passe extremamente perto do ponto fixo, e para conseguir (b) precisamos escolher o ponto onde começa a trajetória com muita precisão. Caso consigamos fazer isso, então a previsão é de que mesmo lagrangeanas com operadores altamente não lineares (longe de  $\mathcal{L}_0$ ) terão correladores a baixas energias que se comportam como teorias praticamente livres de escalares leves. No caso de sistemas magnéticos (onde podemos de fato ajustar as "condições iniciais") este comportamento aparece em modelos com mais de 4 dimensões. Perto da transição de fase de segunda ordem destes modelos temos exatamente esta situação.

$\lambda\phi^4$   
 $d \sim d_0$   
 $d = 4$

Neste caso temos que ficar atentos ao operador  $\phi^4$

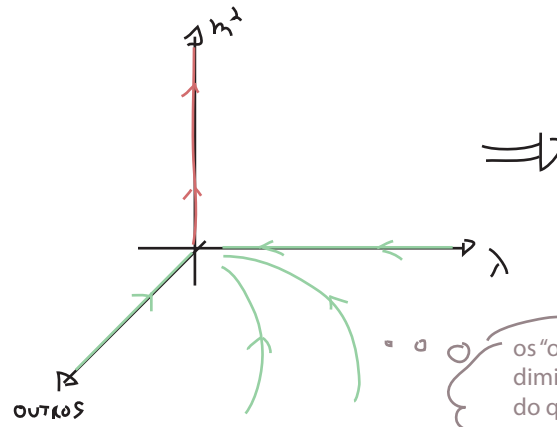
$$\lambda' = (\lambda + \Delta\lambda)(1 + \Delta z)^{-d} \mu^{d-1}$$

eq. 95.1

$\Delta z \sim \frac{1}{\mu^2} + \mathcal{O}(\lambda^2)$   
 só corrige a massa (veja pg 80, eq. 80.1)

$$\lambda' \approx \lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

$\lambda' \rightarrow \lambda'$  diminui lentamente conforme "integramos"



isso quer dizer que  $\lambda\phi^4$  acaba sempre se tornando livre muito longe do cut-off (ou quando fazemos o cut-off ir para infinito). Esta é a trivialidade de  $\lambda\phi^4$  sem cut-off (é claro que a teoria continua útil se temos um cut-off)

os "outros" coeficientes diminuem mais rápido do que  $\lambda$

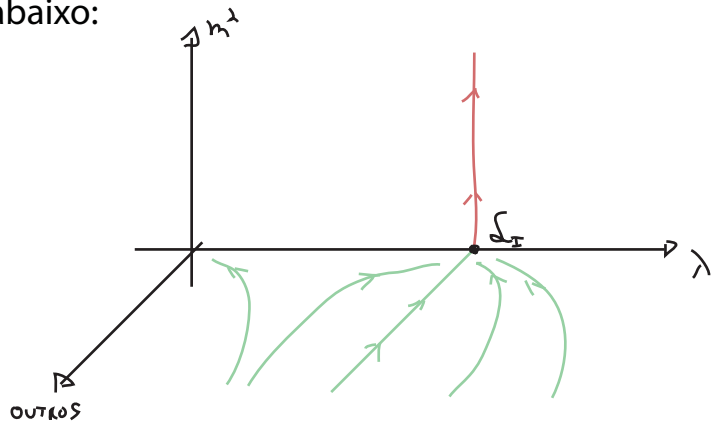
$\lambda\phi^4$   
 $d \sim d_0$   
 $d < 4$

O operador  $\phi^4$  agora é relevante. Mesmo que comecemos perto da teoria livre o valor de  $\lambda$  vai fluir para valores maiores. Assim que nos afastamos da origem, temos que considerar as correções de ordem  $\lambda$  (da eq. 95.1). Para  $d < 4$  temos:

$$\lambda' = \left( \lambda - \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{(1 - b^{d-4}) \Lambda^{d-4}}{d-4} \right) b^{d-4}$$

$\lambda' \sim \lambda b^{d-4}$

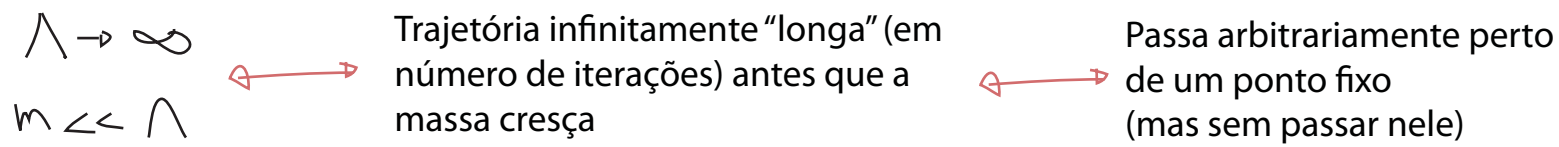
este sinal sugere que em algum ponto o crescimento causado pelo scaling vai ser cancelado pela contribuição do termo não-linear, neste ponto  $\lambda$  pára de mudar - há um segundo ponto fixo. Este ponto se funde como o ponto da lagrangeana livre se fazemos  $d \rightarrow 4$ , e os dois vão ter a mesma propriedade em relação ao crescimento da massa. Então, perto de  $d = 4$  temos o diagrama abaixo:



## A equação de Callan-Symanzik

(Peskin 12.2, Ryder 9.4)

Embora o tratamento que fizemos para o campo escalar seja bastante claro do ponto de vista físico ele pode se tornar bastante difícil tecnicamente se formos tratar teorias mais complicadas do que o campo escalar (sabemos, por exemplo, que a QED tem problemas com regularização por cut-off). Vamos então tentar achar formas mais gerais de encontrar as equações que estabelecem o fluxo dos parâmetros da lagrangeana. Para isso voltaremos ao formalismo das teorias renormalizadas (em que fizemos  $\Lambda \rightarrow \infty$  e inserimos os contratermos)



Perto do ponto fixo, cada iteração a mais move a massa muito pouco, mas vai desaparecendo com todos os operadores irrelevantes. Acabamos com uma teoria que só tem operadores relevantes (os termos originais + contratermos) mas com coeficientes que foram corrigidos uma infinidade de vezes (os  $\delta$ 's são divergentes). Fica claro que as lagrangeanas que estão nestas trajetórias são um subconjunto de todas as lagrangeanas possíveis.

- ▶ toda informação sobre o fluxo dos coeficientes irrelevantes foi jogado fora
- ▶ ainda podemos estudar os relevantes e marginais, mas não em função de  $\Lambda$  e  $b\Lambda$

Neste caso usamos as **condições de renormalização** que são definidas em uma **escala de renormalização** (na pg 76, por exemplo, esta escala foi escolhida como  $p^2 = 0$ ). Vendo como os coeficientes dependem desta escala  $\mu$ , podemos recuperar a informação do fluxo.

Começamos com uma teoria escalar sem massa (o termo  $m^2$  renormalizado é exatamente zero). As condições da página 76 não servem mais (o  $\delta\lambda$  obtido destas condições, por exemplo, tem singularidades para  $m^2 = 0$ , veja pgs 76-77). Usaremos então uma escala arbitrária  $M$ :

$p^2 = -M^2$

$= -i\lambda$

ficando na região  $p^2 < 0$  temos uma análise análoga ao que faríamos no espaço euclidiano, onde tudo é mais simples. O comportamento para  $p^2 > 0$  é mais complicado pois temos que tomar cuidado com singularidades advindas de estados ligados e ramificações

$(p_1 + p_2)^2 = (p_1 + p_3)^2 = (p_1 + p_4)^2 = -M^2$

Com estas novas condições:

$$\langle \Omega | \phi(p) \phi(-p) | \Omega \rangle = \frac{i}{p^2} \quad / \quad p^2 = -M^2$$

$$\phi = Z^{-1/2} \phi_0$$

$$\hookrightarrow \langle \Omega | \phi_0(p) \phi_0(-p) | \Omega \rangle = \frac{iZ}{p^2} \quad / \quad p^2 = -M^2$$

(Z não é mais o resíduo do polo da função de dois pontos)

Para ver o efeito destas condições, considere que a teoria tem uma interação de Yukawa, das pgs. 80-81 temos:

$$\text{Loop Diagram} = \frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (d-1) \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Delta^{1-1/2}} \quad \boxed{\Delta = m_f^2 - x(1-x)p^2}$$

$$m_f^2 = 0 \Rightarrow \Delta \propto p^2$$

$$\text{1PI} = \text{Loop Diagram} + \text{Cross Diagram} - (p^2 \delta Z - \delta m)$$

$$\text{1PI} = \frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 \frac{dx}{[x(1-x)p^2]^{1-1/2}} (d-1) \Gamma(1-d/2) - (p^2 \delta Z - \delta m)$$

$$\underbrace{\frac{4i\gamma^2}{(4\pi)^d} \left[ \frac{2}{\epsilon} - 2 - \gamma - \text{LN}(-p^2) + \text{LN}(4\pi) \right]}_{d \sim 2} \int_0^1 \frac{dx}{[x(1-x)]^{1-1/2}}$$

↳ a parte que diverge não depende de  $p^2$  portanto será cancelada por algo equivalente em  $\delta m$ .

$$d \sim 4 \Rightarrow \frac{12i\gamma^2}{(4\pi)^4} \left[ -p^2 \left( \frac{1}{\epsilon} + \text{Loc}(4\pi) - \gamma + 1 - \text{LN}(-p^2) \right) \right] \int_0^1 \frac{dx}{x(x-1)}$$

↳ não contribui para  $\delta m$ , apenas para  $\delta z$ .

$$\rightarrow -p^2 \left( \frac{1}{2-d/2} + \text{LN}\left(\frac{1}{-p^2}\right) + C \right)$$



Se fizermos esta regularização por cut-off, as contribuições para  $\delta z$  e  $\delta m$ , se misturam e não fica tão fácil ver que a massa não sai de zero, por isso continuaremos usando reg. dimensional. No entanto, para deixar claro o papel do cut-off, faremos a troca:

$$-\rho^2 \left( \frac{1}{2-d/2} + \text{LN} \left( \frac{1}{-\rho^2} \right) + C \right) \xrightarrow{\text{EQ.}} -\rho^2 \left( \text{LN} \left( \frac{\Lambda^2}{-\rho^2} \right) + C \right)$$

se comportam da mesma forma são diferentes, mas não nos importam

O mesmo seria válido para  $\lambda\phi^4$ , mas teríamos que ir até dois loops para ver a primeira correção em  $\delta Z$ . Essa separação nos permite esquecer totalmente da massa e analisar o acoplamento. Nos diz que (como só temos polos em  $d = 4$ ) as divergências de  $\delta Z$  (e  $\delta\lambda$ ) serão logarítmicas.

Note que poderíamos ter escolhido outra escala de renormalização,  $M'$  para a mesma teoria. As funções de Green da teoria dependem apenas de  $m_0, \lambda_0$  e  $\Lambda$ .  $M$  só aparece quando fazemos a troca:

$$\left. \begin{matrix} \lambda_0 \\ \phi_0 \\ \Lambda \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \phi \\ M \end{matrix} \right.$$

$$\underbrace{\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle}_{G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)} = Z^{-n/2} \underbrace{\langle \Omega | T \{ \phi_0(x_1) \phi_0(x_2) \dots \phi_0(x_n) \} | \Omega \rangle}_{G_0^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

O que acontece se fizermos uma pequena mudança em  $M$ ?

$$\begin{aligned} M &\rightarrow M + \delta M \\ \lambda &\rightarrow \lambda + \delta \lambda \\ \phi &\rightarrow (1 + \delta\eta) \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi &= Z^{-1/2} \phi_0 \\ &\downarrow \\ \phi &= Z^{-1/2} (1 + \delta\eta) \phi_0 \end{aligned}$$

Na função de Green só importa a mudança em  $Z$  (já que  $G_0$  só depende dos parâmetros núts):

$$\begin{aligned} Z^{-1/2} &\rightarrow (1 + \delta\eta) Z^{-1/2} \rightarrow Z^{-n/2} \rightarrow (1 + \delta\eta)^n Z^{-n/2} \sim (1 + n\delta\eta) Z^{-n/2} \\ G^{(n)} &\rightarrow (1 + n\delta\eta) G^{(n)} \end{aligned}$$

Pensando em  $G$  como uma função de  $M$  e  $\lambda$ , esta transformação é dada por:

$$dG^{(n)} = \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} \delta \lambda = n\delta\eta G^{(n)}$$

(eq. 105.1)

Definindo os parâmetros adimensionais:

$$\beta \equiv \frac{M}{\delta M} \delta \lambda \quad \text{Função beta} \quad (\text{eq. 106.1})$$

$$\gamma \equiv -\frac{M}{\delta M} \delta \eta \quad \text{Função gama} \quad (\text{eq. 106.2})$$

Temos:

$$\left( \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} \delta \lambda - n \delta \eta G^{(n)} = 0 \right) \times \frac{M}{\delta M}$$

$$M \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} + \underbrace{\frac{M}{\delta M} \delta \lambda}_{\beta} \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} - n \underbrace{\frac{M}{\delta M} \delta \eta}_{-\gamma} G^{(n)} = 0$$

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + n \gamma \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; M, \lambda) = 0$$

Pensemos sobre  $\beta$  e  $\gamma$ :

→ são os mesmo para qualquer  $n$   
 → são adimensionais, e não há qualquer outro parâmetro com dimensão de massa  
 $\beta(x, M, \lambda) \Rightarrow \beta = \beta(\lambda) \quad \gamma = \gamma(\lambda)$

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + n \gamma(\lambda) \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; M, \lambda) = 0$$

Equação de Callan- Symanzik (eq. 106.3)

$\beta(\lambda) \leftrightarrow$  ligada a mudança na constante de acoplamento

$\gamma(\lambda) \leftrightarrow$  ligada a mudança no campo (field strength)

Esta equação nos diz que a mudança em  $M$  será sempre acompanhada e compensada pelas outras duas.

Podemos generalizar o argumento acima para outras teorias renormalizáveis (com acoplamentos adimensionais). Haverá uma função  $\gamma$  para cada campo e uma função  $\beta$  para cada acoplamento. No caso da QED (sem massa,  $m_e = 0$ ) ( $n$  é o número de elétrons e  $m$  o de fótons):

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(e) \frac{\partial}{\partial e} + n \gamma_2(e) + m \gamma_3(e) \right] G^{(n, m)}(x_1, \dots, x_{n+m}; M, e) = 0 \quad (\text{eq. 106.4})$$

### Calculando as funções $\beta$ e $\gamma$

Mais uma vez, fiquemos na teoria  $\lambda\phi^4$  sem massa. Como estas funções não dependem de qual função de Green usamos na equação de Callan-Symanzik (CS), podemos escolher as mais simples:

$$G^{(2)}(p) = \text{---}^{\lambda^0} + \underbrace{\text{---}^{\lambda^1} \text{---}^{\lambda^1}}_{\text{sabemos que daqui só saem contribuições para } \delta m} + \text{---}^{\lambda^1} \otimes + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

Como o cálculo de dois loops é trabalhoso, acaba sendo mais simples usar a função de 4 pontos. No entanto podemos obter alguma informação sobre  $\gamma$  daqui: como não há correções a  $G^{(2)}$  em ordem  $\lambda$ , só introduzimos a dependência em  $M$  e  $\lambda$  em  $G^{(2)}$  em ordem  $\lambda^2$ . Assim a equação de CS para  $G^{(2)}$  fica:

$$\left[ M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + 2\gamma(\lambda) \right] G^{(2)}(p) = 0$$

$\mathcal{O}(\lambda) \Rightarrow \circ$        $\mathcal{O}(\lambda) \Rightarrow \circ$        $\gamma(\lambda) = 0 + \mathcal{O}(\lambda^2)$

Passando então para a função de 4 pontos, temos:

$$G^4 = \text{---}^{\lambda^1} \text{---}^{\lambda^1} + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} + \text{---}^{\lambda^2} \text{---}^{\lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$\left[ M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + 4\gamma(\lambda) \right] G^4(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0$$

Já calculamos esta função de Green (na verdade a versão amputada dela, pgs 77-78):

$$G^4 = \left[ -i\lambda + (-i\lambda)^2 \left[ iV(s) + iV(t) + iV(u) \right] - i\delta_\lambda \right] \cdot \prod_{i=1}^4 \frac{i}{p_i^2}$$

$\hookrightarrow$  definido na eq. 77.3      propagadores da pernas externas  
(que tem correções  $\sim \lambda^2$  conforme vimos na pg 79)

Nossa condição de renormalização agora exige que as correções a  $\lambda$  se cancelem em:

$$s = t = u = -M^2$$

O que nos dá um contratermo:

$$\delta_\lambda = (-i\lambda)^2 \cdot 3V(-M^2) = \frac{3\lambda^2}{2(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(x(1-x)M^2)^{2 - d/2}}$$

$d \rightarrow 4$ : 
$$\delta_\lambda = \frac{3\lambda^2}{2(4\pi)^2} \left[ \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} - \text{Ln}(M^2) + \dots \right]$$

↳ indep de M e finito

Temos então:

$M \frac{d}{dM} G^{(4)} \overset{\uparrow}{=} \frac{3i\lambda^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{i-1} \frac{i}{P_i^2}$

$\mathcal{O}(\lambda^2)$  (vem tudo de  $\delta_\lambda$ )

$$\frac{d}{d\lambda} G^{(4)} = (-i + \mathcal{O}(\lambda)) \frac{4}{i-1} \frac{i}{P_i^2}$$

$\delta_\lambda \sim \mathcal{O}(\lambda^2)$

$$\left[ M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + \underbrace{4\gamma(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} \right] G^{(4)} = 0$$

$$\frac{3i\lambda^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{i-1} \frac{i}{P_i^2} + \beta(\lambda) (-i + \mathcal{O}(\lambda)) \frac{4}{i-1} \frac{i}{P_i^2} + \underbrace{4\gamma(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda^3)} G^{(4)} = 0$$

↳ tem que ter no mínimo de ordem  $\lambda^2$

$\Rightarrow \beta = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$  (eq. 108.1)

$\beta(\lambda) = A + B\lambda + C\lambda^2 + \dots$

$(\lambda^0) \Rightarrow \boxed{-iA = 0}$

$(\lambda^1) \Rightarrow \boxed{A - iB = 0} \Rightarrow \boxed{B = 0}$

$(\lambda^2) \Rightarrow \frac{3i\lambda^2}{(4\pi)^2} - iC = 0 \Rightarrow \boxed{C = \frac{3}{(4\pi)^2}}$

Com este resultado, podemos voltar na equação de CS para a função de dois pontos e obter a primeira contribuição à função  $\gamma$ :

$$\left[ M \frac{d}{dM} + \underbrace{\beta(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} \frac{d}{d\lambda} + \underbrace{2\gamma(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} \right] G^{(2)} = 0 \quad \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} G^{(2)} \sim \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$A + B\lambda^2 + \frac{P_2(M)}{P_2} \lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3)$

$(\lambda^2) \Rightarrow \lambda^2 M \frac{dP_2(M)}{dM} + 2\gamma(\lambda) A = 0 \Rightarrow \gamma(\lambda) = -\frac{\lambda^2 M \frac{dP_2(M)}{dM}}{2A}$  (eq. 108.2)

↳ que pode ser obtido calculando

De uma forma mais geral (qualquer teoria escalar renormalizável sem massa), teremos sempre:

$$G^{(2)}(p) = \text{---} + \underbrace{(\text{LEAD. LOOP})}_{\text{contribuição não-nula com o menor número de loops}} + \text{---} \otimes \text{---} + \dots$$

$$= \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} \left[ \cancel{i p^2 A} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right) + \text{termos finitos} \right] \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} (i p^2 \delta z) \frac{i}{p^2} + \dots$$

conforme mostramos na pág. 105 (divergências em  $\delta z$  são Logs)

$$\frac{dG^{(2)}}{dM} = -\frac{i}{p^2} \frac{d}{dM} \delta z$$

depende da teoria

$$A \sim \mathcal{O}(\lambda^n) \left\{ \begin{array}{l} G \sim \underline{\text{CONST.}} + \mathcal{O}(\lambda^n) \\ \frac{dG}{d\lambda} \sim \mathcal{O}(\lambda^{n-1}) \end{array} \right.$$

$$\left[ \underbrace{M}_{\mathcal{O}(\lambda^n)} \frac{d}{dM} G^{(2)} + \underbrace{\beta(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda^{n-1})} \frac{d}{d\lambda} G^{(2)} + \underbrace{2\gamma(\lambda)}_{\mathcal{O}(\lambda)} \underbrace{G^{(2)}}_{\text{CONST.} + \mathcal{O}(\lambda^n)} \right] = 0$$

$n > 1 \Rightarrow$  A contribuição do termo envolvendo  $\beta$  vai ser sempre de ordem superior a que envolve  $\gamma$

$$-\frac{i}{p^2} M \frac{d}{dM} \delta z + 2\gamma(\lambda) \frac{i}{p^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta z} \quad (\text{eq. 109.1})$$

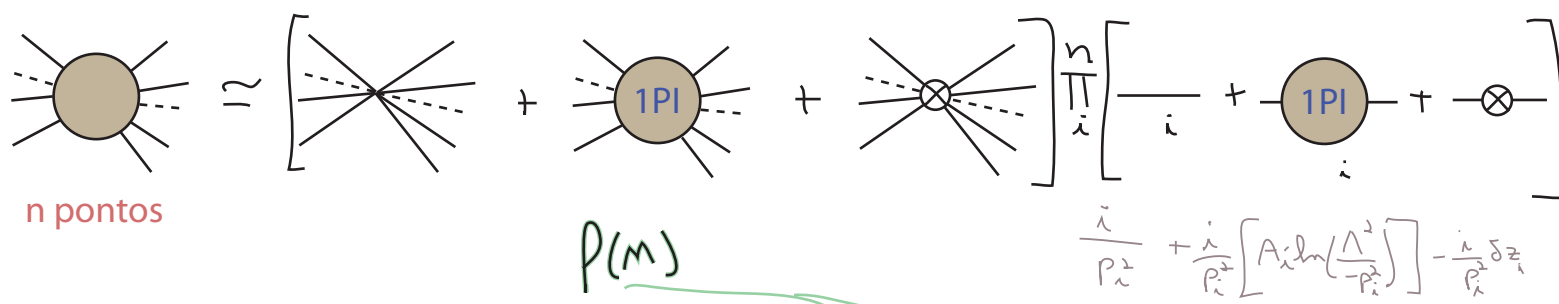
Se lembrarmos que  $\delta z$  tem que cancelar a divergência dos loops em alguma escala  $-p^2 = M$ , concluímos que:

$$\left\{ \frac{i}{p^2} \left[ A \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right) \right] + \frac{i}{p^2} (i p^2 \delta z) \frac{i}{p^2} \right\}_{p^2 = -M^2} = 0$$

$$\delta z = A \ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} M \cdot A \cdot \left(-\frac{2}{M}\right) = \underline{\underline{-A}}$$

coeficiente do logaritmo divergente que contribuí para  $\delta z$   
(o mesmo ocorre na QED ou Yukawa)

Podemos obter algo análogo para a função  $\beta$ . Pensemos numa teoria com um acoplamento  $g$  de um vértice com  $n$  linhas, a função de  $n$  pontos será dada por:



$$G^{(n)} \approx \left( \prod_i \frac{i}{P_i^2} \right) \left[ -i\gamma - i\beta \ln\left[\frac{\Lambda^2}{-P^2}\right] - i\delta\gamma - i\gamma \sum_i \left( A_i \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-P_i^2}\right) - \delta z_i \right) \right]$$

(só estou interessado nas correções a um loop (por isso ignoro os produtos entre contratermos e entre 1PIs))

algum invariante do tipo das variáveis de Mandelstam estamos assumindo que as condições de renorm. são para todas as variáveis deste tipo  $\sim -M^2$

$$\left[ M \frac{d}{dM} + \beta(g) \frac{d}{dg} + n \gamma(g) \right] G^{(n)}(P) = 0$$

$$n \gamma(g) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta z_i$$

$$\left( \prod_i \frac{i}{P_i^2} \right) \left\{ M \frac{d}{dM} \left( -i\delta\gamma + i\gamma \sum_i \delta z_i \right) + \beta(g) \frac{dG^{(n)}}{dg} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta z_i G^{(n)} \right\} = 0$$

$[-i + \mathcal{O}(g^2)]$

$-i\gamma + \mathcal{O}(g^2)$

Não sabemos, a priori, em que ordem de  $g$  temos a primeira contribuição a  $\delta\gamma$  ou  $\delta z_i$ , mas para que  $\beta$  possa cancelar estas contribuições ele tem que começar a receber contribuições na mesma ordem em que  $\delta\gamma$  ou  $\gamma \delta z_i$  e, em L.O., podemos ignorar estes termos

$$M \frac{d}{dM} \left( -i\delta\gamma + i\gamma \sum_i \delta z_i \right) - i\beta(g) - i\gamma \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta z_i = 0$$

$$\beta(g) = M \frac{d}{dM} \left( -\delta\gamma + \frac{1}{2} \gamma \sum_i \delta z_i \right) \quad (\text{eq. 110.1})$$

Mais uma vez as condições de renormalização nos dizem quem são  $\delta g$  e  $\delta z$

$$\delta\gamma = -\beta \ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) + \dots$$

as partes finitas independem de  $M$

$$\beta(g) = -2\beta - g \sum_i A_i \quad (\text{eq. 111.1})$$

Um fato importante a ser notado é que, como não estamos interessados na parte finita (de fato somente no coeficiente da divergência) - não precisamos ser muito cuidadosos ao especificar as condições de normalização, basta fazer qualquer invariante (que fixa a escala dos logaritmos) igual a  $-M^2$ . É claro que isso só vale em L.O.

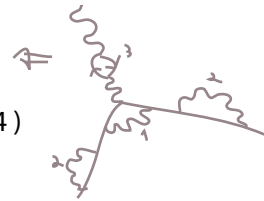
Argumentos semelhantes se aplicam para teorias mais complicadas. No caso da QED temos (gauge de Feynman):

$$\gamma_2(e) = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta_2 \quad (\text{eq. 111.2})$$

$$\gamma_3(e) = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta_3 \quad (\text{eq. 111.3})$$



$$\beta(e) = M \frac{d}{dM} \left( -e\delta_1 + e\delta_2 + \frac{e}{2}\delta_3 \right) \quad (\text{eq. 111.4})$$



Se modificarmos os  $\delta$ 's calculados nas páginas 84 a 86 para férmions sem massa e para a condição de renormalização em  $-M^2$ , temos:

$$\delta_1 = \delta_2 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} + \dots \sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2} L_N\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)$$

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} + \dots \sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} L_N\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)$$

De forma que:

$$\gamma_2(e) = \frac{1}{2} M \left[ -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(-\frac{2}{M}\right) \right] = \frac{e^2}{(4\pi)^2}$$

$$\gamma_3(e) = \frac{e^2}{12\pi^2}$$

$$\beta(e) = M \frac{e}{2} \left[ -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(-\frac{2}{M}\right) \right] \frac{4}{3} = \frac{e^3}{12\pi^2}$$

Importante: a sutileza aqui é que escolhemos um gauge específico, então algumas destas funções mudam se mudarmos o gauge, outras não.  $\delta_2$  (ligada ao propagador do elétron) não é invariante de gauge,  $\delta_3$  e  $\beta$  são invariantes (ligados à polarização do vácuo).

O significado de  $\gamma$  e  $\beta$

Vamos tentar entender  $\gamma$  e  $\beta$ , escrevendo-os em termos dos parâmetros da lagrangeana nua:

$\lambda\phi^4$ :  $\phi(p) = Z(m)^{-1/2} \phi_0(p)$

$m \rightarrow m + \delta m \Rightarrow \phi \rightarrow \phi + \delta\eta \phi$

$\phi' = (1 + \delta\eta)\phi \left\{ \begin{array}{l} \phi' = Z(m + \delta m)^{-1/2} \phi_0 \\ \phi = Z(m)^{-1/2} \phi_0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \delta\eta = \frac{\phi'}{\phi} = \frac{Z(m + \delta m)^{-1/2} \phi_0}{Z(m)^{-1/2} \phi_0}$

$\delta\eta = \frac{Z(m + \delta m)^{-1/2}}{Z(m)^{-1/2}} - 1$

Da definição de  $\gamma$  (eq 106.2) temos:

$\gamma = -\frac{m}{\delta m} \delta\eta = -\frac{m}{\delta m} \left( \frac{Z(m + \delta m)^{-1/2}}{Z(m)^{-1/2}} - 1 \right) = -\frac{m}{Z^{-1/2}} \left( \frac{Z(m + \delta m)^{-1/2} - Z^{-1/2}(m)}{\delta m} \right) = \frac{1}{2} \frac{m}{Z^{-1/2}} Z^{-3/2} \frac{dZ}{dm}$

$\gamma = \frac{1}{2} \frac{m}{Z} \frac{dZ}{dm}$  (eq. 112.1)

$\sim \frac{1}{2} m (1 - \delta_Z + O(\delta_Z^2)) \frac{d\delta_Z}{dm}$

que reproduz o resultado em L.O. de 109.1

↳ mostra a ligação entre  $\gamma$  e a mudança de Z

No caso de  $\beta$ , nossa definição original já era suficientemente clara (eq 106.1):

$\beta = \frac{m}{\delta m} \delta\lambda \dots \left\{ \begin{array}{l} m \rightarrow m + \delta m \\ \lambda(m + \delta m) = \lambda(m) + \delta\lambda \end{array} \right.$

$\beta = m \frac{d}{dm} \lambda(m)$  (eq. 112.2)

, o que mostra que  $\beta$  nos fala como o acoplamento muda com esta escala que escolhemos para a cond. de renorm. Veremos em seguida que podemos interpretar isso como a mudança (o *running*) do acoplamento com a escala de energia do evento



### Solução da equação de Callan-Symanzik

(Peskin 12.3)

Para estudar as implicações da equação CS, vamos resolvê-la para uma função de dois pontos de uma teoria com um único campo escalar (sem massa)

$$Dim[G^{(2)}] = Dim\left[\frac{1}{p^2}\right] = -2 \quad \therefore G^{(2)} \equiv \frac{i}{p^2} g\left(-\frac{p^2}{M^2}\right) = -\frac{i}{k^2} g\left(\frac{k^2}{M^2}\right)$$

$$k \equiv \sqrt{-p^2} \quad \circ \quad k^2 = -p^2 > 0$$

tem dimensão -2 e só depende de p e M

$$Dim[g] = 0$$

↳ número (e não um quadrivetor)

$$\chi \equiv \chi\left(\frac{k}{M}\right) \quad \left. \begin{aligned} \frac{d}{dM} f(x) &= \frac{dx}{dM} \frac{df(x)}{dx} = \frac{-k}{M^2} \frac{df(x)}{dx} \rightarrow \frac{df}{dx} = -\frac{M^2}{k} \frac{df}{dM} \\ \frac{d}{dk} f(x) &= \frac{dx}{dk} \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{M} \frac{df(x)}{dx} \rightarrow \frac{df}{dx} = M \frac{df}{dk} \end{aligned} \right\} \frac{df}{dM} = -\frac{k}{M} \frac{df}{dk}$$

$$M \frac{d}{dM} G^{(2)} = -M \frac{i}{k^2} \left( \frac{d}{dM} g \right) = -\frac{i}{k^2} \left( -k \frac{d}{dk} g \right) = -k \left[ -\frac{i}{k^2} \frac{d}{dk} g \right]$$

$$\frac{d}{dk} \left( -\frac{i}{k^2} g \right) = +\frac{2i}{k^2} g - \frac{i}{k^2} \frac{dg}{dk}$$

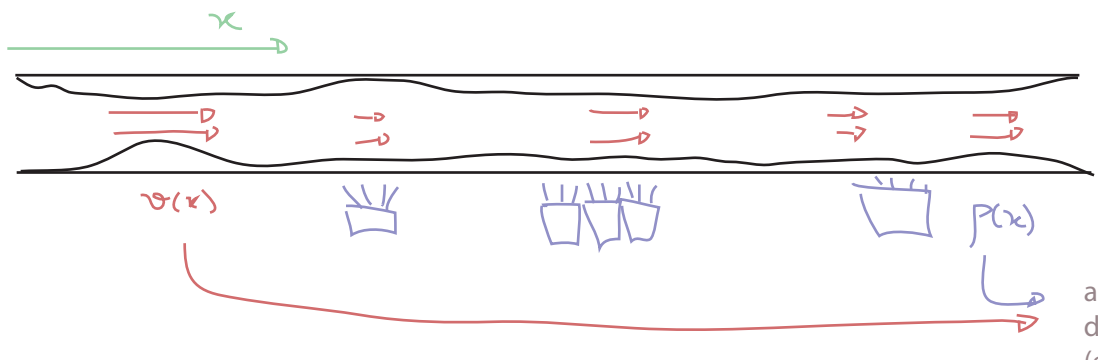
$$M \frac{d}{dM} G^{(2)} = -k \left[ \underbrace{\frac{d}{dk} \left( -\frac{i}{k^2} g \right)}_{G^{(2)}} - \frac{2i}{k^2} g \right] = -k \left[ \frac{d}{dk} G^{(2)} + \frac{2}{k} G^{(2)} \right] = \left[ -k \frac{d}{dk} - 2 \right] G^{(2)}$$

$$CS: \left[ M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + 2\gamma(\lambda) \right] G^{(2)} = 0$$

$$\boxed{\left[ k \frac{d}{dk} + 2 - \beta \frac{d}{d\lambda} - 2\gamma \right] G^{(2)} = 0} \quad (eq. 113.1)$$

Teoria livre:  $\beta = \gamma = 0 \quad k \frac{d}{dk} G^{(2)} = -2G^{(2)} \Rightarrow G^{(2)} = -\frac{i}{k^2}$

Para vislumbrar como podemos resolver um caso mais geral, vamos pensar em bactérias (!!!). Imagine um tubo estreito por onde corre um fluido com velocidade  $v(x)$  ( $x$  é a coordenada ao longo do comprimento do tubo). O tubo está infectado por bactérias, cuja população é dada pela densidade  $D(t,x)$  e cuja taxa de crescimento é  $\rho(x)$



a taxa de crescimento e velocidade dependem de condições no tubo (eg: espessura e iluminação)

as bactérias são arrastadas

$$\frac{\partial D(t, x)}{\partial t} = -v(x) \frac{\partial D(t, x)}{\partial x} + \underbrace{P(x) D(t, x)}_{\text{crescimento}}$$

em um dado ponto  $x_0$   
 $x_- < x_0$   
 $\frac{\partial D}{\partial x}|_{x_0} > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{pop. cresce pois} \\ D[x_-] < D[x_0] \end{array} \right.$   
 $\frac{\partial D}{\partial x}|_{x_0} < 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{pop. cresce pois} \\ D[x_-] > D[x_0] \end{array} \right.$

$$\hookrightarrow \left[ \frac{\partial}{\partial t} + v(x) \frac{\partial}{\partial x} - P(x) \right] D(t, x) = 0$$

Esta é exatamente a equação que temos fazendo:

$$\left[ k \frac{d}{dk} + 2 - \beta \frac{d}{d\lambda} - 2\gamma \right] G^{(2)} = 0$$

(eq. 113.1)

$\text{Log}\left(\frac{k}{M}\right) \leftrightarrow t$   
 $dt \leftrightarrow \frac{1}{k} dk$       $\frac{d}{dt} \leftrightarrow k \frac{d}{dk}$   
 $\lambda \leftrightarrow v(x)$   
 $-\beta(\lambda) \leftrightarrow P(x)$   
 $2\gamma(\lambda) - 2 \leftrightarrow P(x)$   
 $G^{(2)}(k, \lambda) \leftrightarrow D(t, x)$

Suponha que conheçamos:  $D(t=0, x) = D_i(x)$

Para saber a densidade bacteriana de um elemento de fluido em  $(t_1 > 0, x_1)$  temos que olhar a história dele. Sabemos onde ele estava em  $t = 0$  integrando sobre o seu movimento passado. Podemos pensar neste elemento fluindo para trás no tempo e definir:

$$\frac{\partial \bar{x}(t; x_1)}{\partial t} \equiv -v(\bar{x})$$

→ posição de um elemento de fluido indo na direção errada (-v)

$$\bar{x}(0; x_1) = x_1 \rightarrow \text{este começa em } x_1$$

$$\bar{x}(t_1; x_1) \rightarrow \text{posição dele em } t = 0$$

Portanto a densidade bacteriana inicial dele era:  $D_i(\bar{x}(t_1, x_1))$

E a densidade em  $(t_1, x_1)$  será:

$$D(t_1, x_1) = D_i(\bar{x}(t_1; x_1)) \cdot \text{Exp} \left[ \int_0^{t_1} dt' P(\bar{x}(t'; x_1)) \right] \quad (\text{eq. 115.1})$$

No referencial deste elemento a velocidade é zero e só o que as bactérias notam é que a iluminação muda com o tempo:  
 $\frac{dD(t)}{dt} = P(t) D(t) \Rightarrow D(t) = D_i e^{\int_0^t P(t') dt'}$

posição dele em  $t = t'$

$$\left\{ \begin{aligned} dt' &= -\frac{1}{v(\bar{x}')} d\bar{x}' & \bar{x}(t') &= \bar{x}' \\ \bar{x}(0, x_1) &= x_1 & \bar{x}(t_1, x_1) &= \bar{x} \end{aligned} \right.$$

$$D(t_1, x_1) = D_i(\bar{x}(t_1; x_1)) \cdot \text{Exp} \left[ \int_{\bar{x}}^{x_1} d\bar{x}' \frac{P(\bar{x}')}{v(\bar{x}')} \right]$$

notação

Voltando a mundo menos infeccioso da teoria de campos, podemos usar esta solução fazendo as substituições adequadas. De 115.1 temos:

$$\left. \begin{aligned} L_N\left(\frac{k}{M}\right) &\leftrightarrow t \\ \lambda &\leftrightarrow x \\ G^{(2)}(k, \lambda) &\leftrightarrow P(t, x) \\ -\beta(\lambda) &\leftrightarrow v(x) \\ 2\gamma(\lambda) - 2 &\leftrightarrow P(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} t=0 &\leftrightarrow k=M \\ D_i(x) &\leftrightarrow \hat{G}_i^{(2)}(\lambda) \end{aligned} \right.$$

$$G^{(2)}(k, \lambda) = \hat{G}_i^{(2)}(\bar{\lambda}(R; \lambda)) \text{Exp} \left\{ \int_{k'=M}^{k'=k} d\left[L_N\left(\frac{k'}{M}\right)\right] \cdot \left[ 2 \delta[\bar{\lambda}(k'; \lambda)] - 2 \right] \right\} \quad (\text{eq. 115.2})$$

redefino  $\hat{G}_i^{(2)} \frac{M^2}{k^2} \equiv -\frac{i}{k^2} G_i^{(2)}$

$$\text{Exp} \left[ -2 \int_M^k d\left[L_N\left(\frac{k'}{M}\right)\right] \right] = \frac{M^2}{k^2}$$

$$G^{(2)}(k, \lambda) = -\frac{i}{k^2} G_i^{(2)}(\bar{\lambda}(R; \lambda)) \text{Exp} \left\{ 2 \int_{k'=M}^{k'=k} d\left[L_N\left(\frac{k'}{M}\right)\right] \delta[\bar{\lambda}(k'; \lambda)] \right\} \quad (\text{eq. 115.3})$$

Onde:

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) \iff \frac{d}{d[L_N(\frac{k}{M})]} \bar{\lambda}(k; \lambda) = \beta(\bar{\lambda}(k; \lambda))$$

$\frac{d}{dt} \bar{x}(t; x_1) = -v(\bar{x})$

$$\bar{\lambda}(M; \lambda) = \lambda$$

$\bar{x}(0; x_1) = x_1$

$\bar{x}(t; x_1) \Rightarrow$  descrevia a posição de elemento de fluido em t unidades de tempo atrás baseado em um ponto de referência  $x_1$  em que ele está "agora" (usamos  $t = 0$  para agora e  $t = t_1$  para o início, mas de fato quaisquer dois tempos poderiam ser usados)

$\bar{\lambda}(k; \lambda) \Rightarrow$  Vai descrever o valor de uma constante de acoplamento modificada: que muda quando mudamos k (a intensidade do momento) a partir de um ponto de referência (que foi tomado como  $k = M$ ). Note que a taxa de mudança é dada pela função  $\beta$

$\Rightarrow$  Isto é um parâmetro da função, apenas nos diz quanto ela vale no ponto de referência

$\bar{\lambda}(k) \Rightarrow$  "running coupling constant"

A única forma que temos de determinar a função desconhecida  $G_1$  é obtendo a função  $G(2)$  em alguma ordem de perturbação e expandir o lado direito de 115.3 no mesmo parâmetro. Por exemplo, em  $\lambda\phi^4$

$$G^{(2)}(k=M, \lambda) \stackrel{\text{PERT.}}{=} -\frac{\lambda}{M^2} + \mathcal{O}(\lambda^2) \iff G^{(2)}(k=M, \lambda) \stackrel{115.3}{=} -\frac{\lambda}{M^2} G^{(2)}(\bar{\lambda}(k=M; \lambda))$$

$$\therefore G^{(2)}(\lambda) = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2) \rightarrow G^{(2)}(\bar{\lambda}) = 1 + \mathcal{O}(\bar{\lambda}^2)$$

Também podemos usar este procedimento para a função de quatro pontos. Calculemos esta função num regime cinemático bem específico:

$$G^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) \rightarrow p_i^2 = -P^2 > 0 \quad (\text{os quatro momentos são spacelike})$$

$$p_i \cdot p_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

Neste caso temos uma única grandeza dimensional relevante  $P^2$  e podemos escrever  $G^{(4)}$  na forma:

$$G^{(4)}(P) = \left(\frac{\lambda}{P^2}\right)^4 \mathcal{G}\left(\frac{P^2}{M^2}\right) \Rightarrow \text{podemos de novo fazer a troca } \frac{d}{dM} \rightarrow \frac{d}{dP}$$

$\text{Dim}[G^{(4)}] = -8 \quad \text{Dim} = -8 \quad \text{Dim} = 0$

$$\left[ p \frac{\partial}{\partial p} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + 8 - \gamma(\lambda) \right] G^{(4)}(p, \lambda) = 0$$

Lembrando das bactérias:

$$G^{(4)}(p, \lambda) = \left( \frac{\lambda}{p^2} \right)^4 G_i^{(4)}(\bar{\lambda}(p, \lambda)) \text{Exp} \left\{ 4 \int_M^p d \left[ L_N \left( \frac{p'}{M} \right) \right] r[\bar{\lambda}(p'; \lambda)] \right\} \quad (\text{eq. 117.1})$$

De novo a função "inicial" é fixada por:

$$G^{(4)}(p, \lambda) = -\lambda \lambda \left( \frac{\lambda}{p^2} \right)^4 + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

~~X~~ + ...

$$G^{(4)}(p, \lambda) = \left( \frac{\lambda}{p^2} \right)^4 G_i^{(4)}(\bar{\lambda}(p, \lambda))$$

$$G_i^{(4)}(\bar{\lambda}(p=M; \lambda)) = G_i^{(4)}(\lambda(M)) = -\lambda \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$\hookrightarrow \boxed{G_i^{(4)}(\bar{\lambda}) = -\lambda \bar{\lambda} + \mathcal{O}(\bar{\lambda}^2)} \quad (\text{eq. 117.2})$$

Agora podemos ver as consequências da eq. CS. De uma forma geral, qualquer função de Green, quando expandida perturbativamente, vai depender de duas grandezas:

$\lambda \leftrightarrow$  Constante de acoplamento

$L_N \left( -\frac{p^2}{M^2} \right) \leftrightarrow$  Grandeza adimensional que mede a "distância" entre  $p$  e  $\lambda = \bar{\lambda}(M)$

Para que a perturbação faça sentido precisamos que  $\lambda$  seja pequeno, mas também temos que evitar que

$$\left| \frac{p^2}{M^2} \right| \gg 1$$

As soluções que encontramos organizam a dependência nestes dois parâmetros ( $\lambda$  e o logaritmo de  $p$ ) em uma função do acoplamento ( $G_i$ ) e uma exponencial que leva em conta a "distância" para o ponto de referência  $M$ . Quando esta "distância" é zero (estamos fazendo um espalhamento com momento da ordem da escala  $M$ ) vemos que  $G_i^{(n)} = G^{(n)}$ , mas se nos afastamos deste regime o que as soluções 115.3 e 117.1 nos dizem é que devemos substituir  $\lambda$  por um acoplamento mais apropriado para aquela escala:  $\bar{\lambda}$ , o que reforça a idéia de que este novo acoplamento é justamente o acoplamento efetivo que obtivemos quando pensando no grupo de renormalização. Esta identificação fica bem clara na equação 117.2 - já que a função de quatro pontos será diretamente proporcional a  $\bar{\lambda}$ .

O fator exponencial dá conta de acumular todos os re-scalings do campo entre M e a escala de momento k (ou P). Cada mudança destas vira um fator que multiplica a função e Green e em cada escala levamos em conta o acoplamento correto para a escala. O número que multiplica a integral é o número de linhas externas (2 no caso de 115.3 e 4 para 117.1), como era de se esperar.

Para verificar estas afirmações, vamos obter  $\bar{\lambda}$  no caso da teoria  $\lambda\phi^4$

(108.1)  $\Rightarrow \beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$        $\bar{\lambda}(k; \lambda) = ?$

$$\frac{d}{d[\ln(\frac{k}{M})]} \bar{\lambda} = \beta(\bar{\lambda}) \rightarrow \frac{d}{d[\ln(\frac{k}{M})]} \bar{\lambda} = \frac{3\bar{\lambda}^2}{(4\pi)^2}$$

$\bar{\lambda}(M; \lambda) = \lambda$

$$\frac{1}{\lambda^2} d\bar{\lambda} = \frac{3}{(4\pi)^2} d[\ln(\frac{k}{M})]$$

$$-\frac{1}{\lambda} + C = \frac{3}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M})$$

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}} = \frac{3}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M})$$

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \frac{\lambda}{1 - \frac{3\lambda}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M})}$$

(eq. 118.1)

Note que, expandindo em  $\lambda$ :

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \lambda + \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} \ln(\frac{k}{M}) + \mathcal{O}(\lambda^3) = \lambda - \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} \ln(\frac{1}{k}) + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$k = k M$

que é exatamente o que obtivemos na pg 102 usando o fluxo do grupo de renormalização. Temos também o fato que para k muito pequeno o denominador fica enorme e o acoplamento desaparece, o que confirma nossa expectativa de que função  $\beta$  positiva significa uma teoria com acoplamento fraco para baixos momentos.

Levando a frente a expansão em  $\lambda$ , temos:

$$\bar{\lambda}(k; \lambda) = \lambda + C \lambda^2 \ln(\frac{k}{M}) + C^2 \lambda^3 \ln^2(\frac{k}{M}) + \dots$$

$$C = \frac{3}{(4\pi)^2}$$

Ou seja, teremos termos do tipo:

$$\lambda^{n+1} L_N^n \left( \frac{k}{M} \right)$$

O que nos mostra que a expansão perturbativa vai ter problemas para  $k$  muito longe de  $M$ . Para o caso em que o acoplamento efetivo é pequeno (caso contrário a expansão perturbativa realmente falha) equação de CS nos dá um meio de evitar este problema, já que a expressão 118.1 representa a soma de todos estes logaritmos e sua inclusão direto na contante de acoplamento. Desta forma, qualquer problema que possa vir do tamanho dos logs será traduzido no tamanho do acoplamento efetivo, e assim só temos que nos preocupar se este parâmetro é pequeno.

### Aplicação para QED

Vamos pensar na QED a curtíssimas distâncias (altos momentos para o fóton) quando podemos ignorar massa do elétron. Se seguirmos a mesma lógica que usamos para deduzir as equações de CS (pgs 105 e 106), podemos obter uma equação análoga para o potencial elétrico. Como o potencial entre cargas estáticas é observável, sua normalização é fixada e portanto não temos a função  $\gamma$  (como tínhamos nas funções de Green). Podemos então escrever a seguinte equação de Callan-Symanzik (para a transformada de Fourier do potencial):

$$\left[ M \frac{d}{dM} + \beta(e_r) \frac{d}{de_r} \right] V(q; M, e_r) = 0$$

Dim = -2

↳ podemos fazer o mesmo que na pág. 113 e trocar a derivada em  $M$  por derivadas em  $q$

$$\left[ q \frac{d}{dq} - \beta(e_r) \frac{d}{de_r} + 2 \right] V(q; M, e_r) = 0$$

Lembrando que:

(eq. 113.1)  $\Rightarrow \left[ k \frac{d}{dk} + 2 - \beta \frac{d}{d\lambda} - 2\gamma \right] G^{(2)} = 0$

$$\Downarrow$$

$$G^{(2)}(k, \lambda) = -\frac{i}{k^2} G_i^{(2)}(\bar{\lambda}(k; \lambda)) \text{E} \times \text{r} \left\{ \int_{k'=M}^{k'=k} d \left[ L_N \left( \frac{k'}{M} \right) \right] \right\} \left[ \bar{\lambda}(k'; \lambda) \right] \quad (\text{eq. 115.3})$$

$$V(q; M, e_r) = \frac{1}{q^2} V_i(\bar{e}(q; e_r)) \quad (\text{eq. 119.1})$$

$$\hookrightarrow \bar{e}(q; e_r) \Rightarrow \frac{d}{d \left[ \text{Log} \left( \frac{q}{M} \right) \right]} \bar{e}(q; e_r) = \beta(\bar{e})$$

$$\bar{e}(M; e_r) = e_r$$

Sabemos que, em primeira ordem:

$$V(\varphi) \approx \frac{e^2}{\varphi^2} \iff V_i(\varphi) = \bar{e}^2 + \mathcal{O}(\bar{e}^4)$$

$$\therefore V(\varphi, e_R) = \frac{\bar{e}^2(\varphi; e_R)}{\varphi^2}$$

Usando a função  $\beta$  da QED (pg. 111),  $\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}$ , temos:

$$\frac{d}{d[\text{Log}(\varphi/m)]} \bar{e}(\varphi; e_R) = \frac{\bar{e}^3}{12\pi^2} \implies \frac{1}{\bar{e}^3} d\bar{e} = \frac{1}{12\pi^2} d[\text{Log}(\varphi/m)]$$

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{\bar{e}^2} = \frac{\text{Log}(\varphi/m)}{12\pi^2} + C \xrightarrow{\bar{e}(m; e_R) = e_R} C = -\frac{6\pi^2}{e_R^2}$$

$$6\pi^2 \left( \frac{1}{e_R^2} - \frac{1}{\bar{e}^2} \right) = \text{Log}(\varphi/m)$$

$$\bar{e}^2(\varphi) = \frac{e_R^2}{1 - \left( \frac{e_R}{6\pi^2} \right) \text{Log}(\varphi/m)}$$

(eq. 120.1)

O que é muito similar à expressão obtida no fim da página 64, e fica idêntica se escolhermos  $M$  da ordem da massa do elétron  $M^2 = A m^2$ ,  $e_r = e$  e  $A = e^{(5/3)}$ .

### Evolução (*running*) das Constantes de Acoplamento

De uma forma bem geral, a evolução das constantes de acoplamento de teorias renormalizáveis no limite de massa zero será dado por:

$$\bar{\lambda}(\rho) \implies \frac{d}{d[\text{Log}(\varphi/m)]} \bar{\lambda} = \beta(\bar{\lambda})$$

Na região perturbativa, temos basicamente três comportamentos possíveis:

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \beta(\lambda) > 0 & & \beta(\lambda) < 0 \end{array}$$



$$\beta(\lambda) > 0$$

$$p \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda \rightarrow 0$$

↳ teoria preditiva a baixas energias (ou grandes distâncias)

Teoria fica não perturbativa para curtas distâncias, altos momentos.

$$\beta(\lambda) = 0$$

⇒ A constante de acoplamento efetiva é, de fato, constante (não depende do momento). A constante renormalizada é igual a nua e portanto os únicos infinitos possíveis na teoria estão em contribuição para a *field strength* ( $Z$ ), que somem de qualquer elemento de matriz  $S$ . São chamadas de **QFTs finitas**.

$$\beta(\lambda) < 0$$

⇒ Suponha que o sinal da função  $\beta$  da QED fosse invertido:

$$\beta = -\frac{1}{2} C e^3 \Rightarrow \bar{e}^2(p) = \frac{e^2}{1 + C e^2 L_n(p/m)}$$

$$p \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{e}^2 \rightarrow 0 \quad \text{Liberdade assintótica!}$$

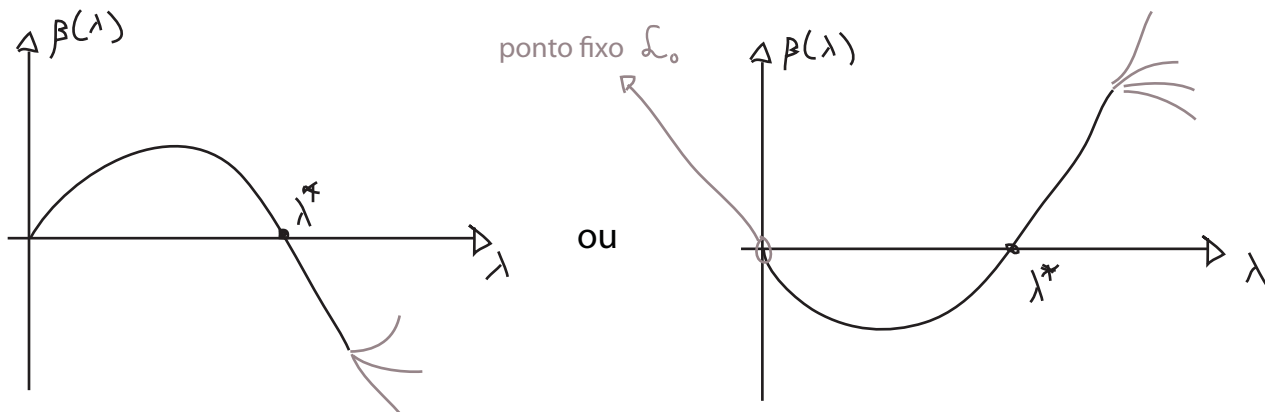
↳ teoria preditiva a altas energias (ou curtas distâncias)

Todas as divergências que aparecem para momentos grandes de alguma forma se somam para dar um resultado inócuo, a teoria é bem comportada para energias arbitrariamente grandes.

Fica não perturbativa para grandes distâncias, pequenos momentos.

Os resultados acima indicam que tanto para  $\beta$  positivo quando negativo, temos uma escala finita em que os acoplamentos divergem. Mas antes de chegar nesta divergência o acoplamento fica grande demais para que a expansão perturbativa faça sentido. O que acontece se sairmos da região perturbativa? Neste caso não temos como calcular a função  $\beta$ , mas as equações do grupo de renorm. continuam valendo e podemos usá-las para uma discussão qualitativa.

Conforme nos aproximamos desta região de acoplamento forte temos que levar em conta mais termos na expansão de  $\beta$ , estes termos podem ter todos o mesmo sinal inicial, mas suponha que a contribuição deles seja de sinal oposto. Neste caso poderíamos obter funções  $\beta$  da seguinte forma:

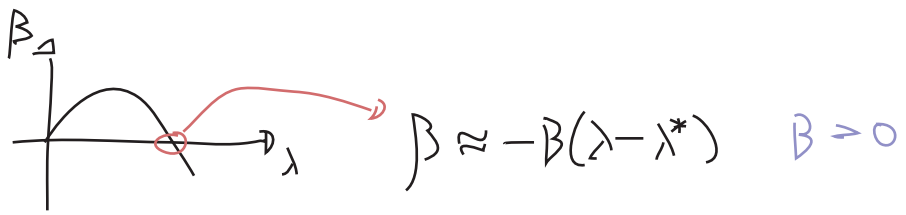


Quando  $\bar{\lambda}$  chega perto deste ponto  $\lambda^*$ ,  $\beta$  vai para zero e a constante de acoplamento para de evoluir. Temos um novo ponto fixo, e:

$$p \rightarrow \infty \quad \bar{\lambda} \rightarrow \lambda^*$$

teorias com ponto fixo no ultravioleta ou infravermelho  
(infrared stable e ultraviolet stable fixed points)

Perto deste ponto fixo (assumindo o caso  $\beta(\lambda \sim 0) > 0$ , com região não perturbativa no UV):



$$\frac{d}{d[\text{Log}(p/M)]} \bar{\lambda} \approx -\beta(\bar{\lambda} - \lambda^*) \Rightarrow \bar{\lambda}(p) = \lambda_* + C \left(\frac{M}{p}\right)^\beta$$

$$\frac{1}{(\bar{\lambda} - \lambda^*)} d\bar{\lambda} = -\beta d[\text{Log}(p/M)]$$

$$\text{Log}(\bar{\lambda} - \lambda^*) = -\beta \text{Log}\left(\frac{p}{M}\right) + C$$

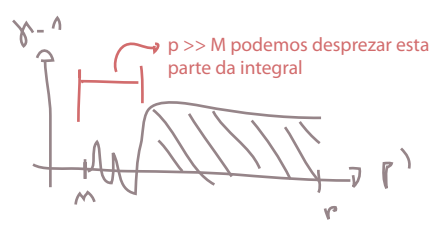
$$\bar{\lambda} - \lambda^* = C' \left(\frac{p}{M}\right)^{-\beta}$$

$p \rightarrow \infty$   
 $\bar{\lambda} \rightarrow \lambda_*$  } e a velocidade é determinada pela inclinação local de  $\beta$

Vejamos o que acontece com a função de 2 pontos de um campo escalar neste caso. De 115.2 temos:

$$G^{(2)}(p, \lambda) = \hat{G}_i^{(2)}(\bar{\lambda}(p; \lambda)) \text{Exp} \left\{ 2 \int_{p'=M}^{p'=p} d[\text{Ln}\left(\frac{p'}{M}\right)] \cdot \left[ \gamma[\bar{\lambda}(p'; \lambda)] - 1 \right] \right\}$$

para p grande a integral será dominada por  $\bar{\lambda} \sim \lambda^*$



$$G^{(2)}(p \rightarrow \infty, \lambda) \approx \hat{G}_i^{(2)}(\lambda^*) \text{Exp} \left\{ 2 \text{Ln}\left(\frac{p}{M}\right) [\gamma(\lambda^*) - 1] \right\} \approx C \left(\frac{1}{p^2}\right)^{1 - \gamma(\lambda^*)}$$

$$\text{Exp} \left\{ \text{Ln}\left[\left(\frac{p^2}{M^2}\right)^{\gamma-1}\right] \right\}$$

Perto deste ponto fixo a função de dois pontos volta a se comportar como uma simples potência de  $p^2$ , só que é a **potência errada** (do ponto de vista de análise dimensional). Chamamos  $\gamma(\lambda^*)$  de **dimensão anômala** do campo (de fato a função  $\gamma$  acabou "pegando" este nome mesmo quando não há ponto fixo na teoria)

### Renormalização de operadores locais

Suponha que queiramos obter o comportamento de um operador local obtido como o produto de dois ou mais campos conforme renormalizamos a teoria.

$\mathcal{O}(x) \equiv$  operador composto de campos escalares

Da mesma forma que fizemos para o campo, podemos definir um processo de renormalização para este operador, re-escrevendo a Lagrangeana de forma a obter um contra termo:

$$\int_0 \mathcal{O}(x)$$

que garante o operador renormalizado  $\mathcal{O}_m \equiv Z_{\mathcal{O}}^{-1}(M) \mathcal{O}_0$  satisfaça as condições de normalização em uma escala M. A função de green em que estamos interessados é:

$$G^{(n;1)}(p_1, \dots, p_n; k) = \langle \phi(p_1) \dots \phi(p_n) \hat{\mathcal{O}}_m(k) \rangle$$

notação:

$G^{(n;m)}$   
função de Green com n campos e m operadores locais

Escrevendo-a em função dos campos nós, temos:

$$G^{(n;1)}(p_1, \dots, p_n; k) = Z(M)^{-n/2} Z_{\mathcal{O}}(M)^{-1} \langle \phi_0(p_1) \dots \phi_0(p_n) \mathcal{O}_0(k) \rangle$$

Repetindo a dedução da equação de CS, temos:

$$\left[ M \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) \right] G^{(n;1)} = 0 \quad (\text{eq. 123.1})$$

$$\gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) = M \frac{d}{dM} L_n[Z_{\mathcal{O}}(M)]$$

Em muitas teorias temos mais de um operador com os mesmos números quânticos e a mesma dimensão, e neste caso podemos ter misturas entre estes operadores (as correções quânticas de um deles vai gerar contribuições aos outros). Por exemplo:

$$\mathcal{O}^1 = \bar{\psi} [\gamma^\mu \mathcal{D}^\nu + \gamma^\nu \mathcal{D}^\mu] \psi$$

$$\mathcal{O}^2 = F^{\mu\lambda} F^\nu{}_\lambda$$

Neste caso temos que definir um conjunto de operadores  $\{\mathcal{O}^i\}$  de forma que:

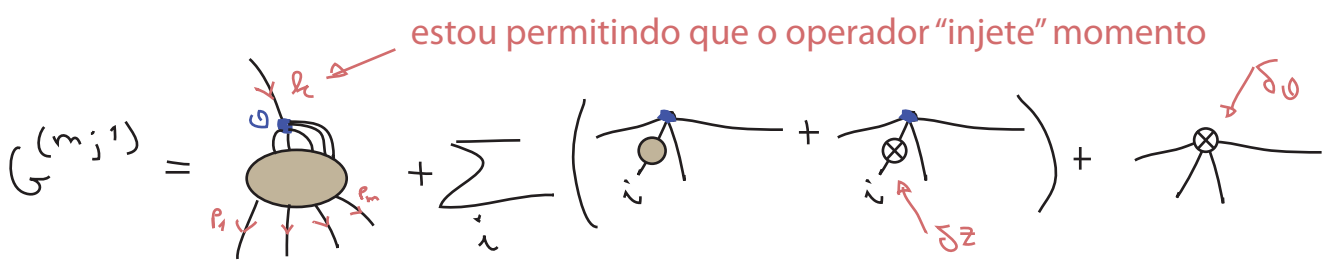
$$\mathcal{O}_0^i \equiv Z_{\mathcal{O}}^i(M) \mathcal{O}_M^i$$

o que também transforma a dimensão anômala  $\gamma$  em uma matriz:

$$\gamma_{\mathcal{O}}^{ij} = [Z_{\mathcal{O}}^{-1}(M)]^{ik} M \frac{d}{dM} [Z_{\mathcal{O}}(M)]^{kj}$$

Para obter uma expressão para  $\gamma$ , calculemos a função de green com  $m$  campos escalares e o operador:

$$G^{(m;1)} = \langle \phi(p_1) \dots \phi(p_m) \mathcal{O}_M(k) \rangle$$

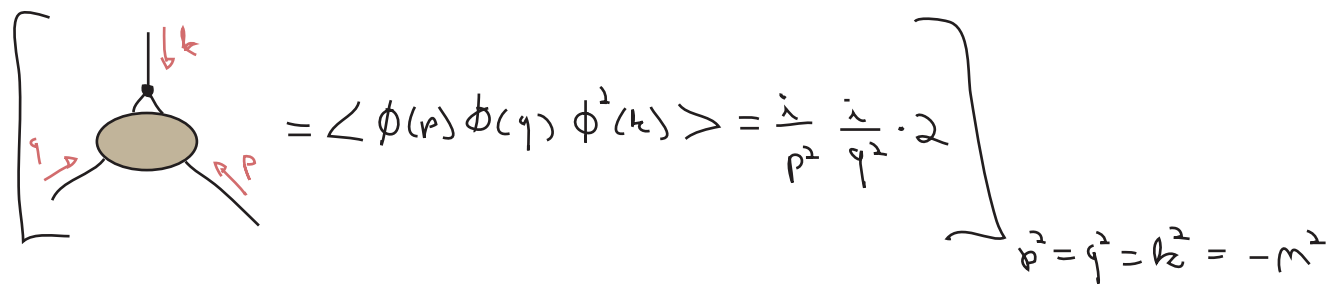


Usando a mesma lógica das páginas 109 a 111, se esta função de Green obedece as equações de CS (eq 123.1), então:

$$\gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) = M \frac{d}{dM} \left( -\delta_{\mathcal{O}} + \frac{m}{2} \delta_Z \right) \quad (\text{eq. 124.1})$$

↑ número de linhas externas escalares

Um exemplo seria analisar o operador  $\phi^2$ , para evitar confusão entre a massa introduzida por este operador e a massa do campo escalar (que está sendo renormalizada para zero) vamos olhar uma função de green onde este operador carrega um momento diferente de zero, e definir sua normalização por:

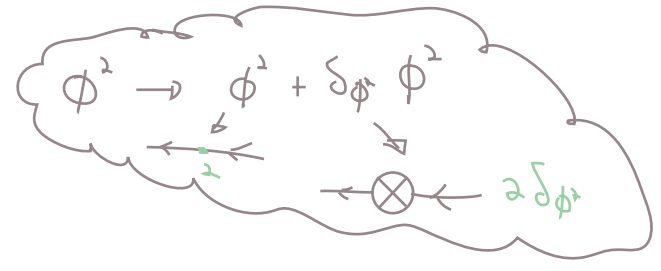


A primeiro loop a contribuir para esta função de Green é (de novo, estamos falando de  $\lambda\phi^4$ ):

$$= \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} \left[ -\frac{\lambda}{4\pi^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \right]$$

$$\Delta = \Delta(p, q, k) \rightarrow \Delta(p^2=q^2=k^2=-M^2) = M^2$$

Em  $-M^2$  este loop deve ser cancelado por:



$$\text{circle with cross} = \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} 2\delta\phi^2$$

$$\delta\phi^2 = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-\frac{d}{2}}} \quad (\text{eq. 125.1})$$

$$\sim \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\epsilon} - \text{Log}(M^2) + \dots \right)$$

Como em  $\lambda\phi^4$  não temos contribuição de ordem  $\lambda$  para  $\delta z$ , então:

(eq. 124.1 com  $\frac{d}{dM}(\delta z) \sim \mathcal{O}(\lambda^2)$ )

$$\gamma_{\phi^2} = M \frac{d}{dM} (-\delta\phi^2) = M \frac{-\lambda}{2(4\pi)^2} \left( -\frac{2}{M} \right) \Rightarrow$$

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{16\pi^2} \quad (\text{eq. 125.2})$$

### Evolução dos parâmetros de massa

(Peskin 12.5)

Podemos usar a evolução de operadores acima para estudar a evolução da massa na teoria. Para tanto introduziremos a massa como uma pequena perturbação na teoria sem massa, esta aproximação é boa desde que a massa física seja comparável aos momentos típicos (fica ruim para momentos menores que a massa).

$\mathcal{L}_m \leftarrow$  lagrangeana sem massas, renormalizada na escala M

$$\downarrow$$

$$\mathcal{L}_m + \frac{1}{2} m^2 \phi_m^2$$

$$G^{(n)} = G^{(n;0)} + m^2 G^{(n;1)} + (m^2)^2 G^{(n;2)} + \dots + (m^2)^l G^{(n;l)}$$

A generalização de 123.1 para várias inserções do operador é bastante óbvia:

$$\left[ m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \gamma_{\phi^2}(\lambda) \right] G^{(n;l)} = 0 \quad (\text{eq. 125.3})$$

Se escrevemos:

$$G^{(n)} = \sum_l (m^2)^l G^{(n;l)}$$

aparece da mesma forma que o  $\gamma_{\phi^2}(\lambda)$  (pgs 105-106), só que com o número de inserções do operador ( $l$ ) ao invés do número de operadores do campo escalar ( $n$ )

Então:  $m^2 \frac{d}{dm^2} G^{(n)} = \sum_i l(m^2)^p G^{(n);l}$

de forma que a seguinte equação garante 125.3 para cada ordem de  $m^2$ :

$$\left[ m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \gamma_\phi m^2 \frac{d}{dm^2} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, m) = 0 \quad (\text{eq. 126.1})$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{d[\log(p/m)]} \bar{m}^2 = \gamma_{\phi^2}(\bar{\lambda}) \bar{m}^2(p) \iff \bar{m}^2(M) = m^2$$

O running da massa vai depender essencialmente da **dimensão anômala do operador  $\phi^2$**  na teoria em questão. Este argumento vale para qualquer operador que eu adicione perturbativamente:

$$\mathcal{L}(C_i) = \mathcal{L}_m + \sum_i C_i \mathcal{O}_m^i(x)$$

dimensão depende da dimensão do operador

$$\left[ m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \sum_i \gamma_i(\lambda) C_i \frac{d}{dC_i} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, \{C_i\}) = 0 \quad (\text{eq. 126.2})$$

Podemos escrever isso de forma mais conveniente:

$$d_i \equiv \text{Dim}[\mathcal{O}^i] \\ \downarrow \\ C_i \equiv \rho_i M^{4-d_i}$$

$$\mathcal{L}(\rho_i) = \mathcal{L}_m + \sum_i \rho_i M^{4-d_i} \mathcal{O}_m^i(x) \quad \hookrightarrow \text{Dim}[\rho_i] = 0$$

estamos introduzindo uma dependência em M esta nova dependência é compensada por  $\rho_i$

Com isso 126.2 fica:

$$\left[ m \frac{d}{dM} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \gamma(\lambda) + \sum_i (\gamma_i(\lambda) + d_i - 4) \rho_i \frac{d}{d\rho_i} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, \{\rho_i\}) = 0$$

$G^{(n)}$

$\dots + \frac{\rho_i M^{4-d_i}}{\dots} + \dots$

$f(M)$  (antes a dep. em M estava só aqui)

$M \frac{d}{dM} \left( \frac{\rho_i M^{4-d_i}}{\dots} \right) \sim (4-d_i) M^{4-d_i} \rho_i$

$(d_i - 4) \rho_i \frac{d}{d\rho_i} \left( \frac{\rho_i M^{4-d_i}}{\dots} \right) \sim (d_i - 4) M^{4-d_i} \rho_i$

cancelamento

$$\beta_i \equiv (d_i - \gamma + \delta_i) \rho_i$$

$$\left[ m \frac{d}{dm} + \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} + n \delta(\lambda) + \sum_i \beta_i \frac{d}{d\rho_i} \right] G^{(n)}(\{ \rho_i \}; M, \lambda, \{ \rho_i \}) = 0 \quad (\text{eq. 127.1})$$

Perceba que agora todos os acoplamentos (adimensionais)  $\rho_i$ , aparecem com a mesma forma de  $\lambda$ . Podemos voltar às nossas bactérias para resolver o problema, só que agora elas fluem num espaço multidimensional com velocidades  $\beta$  e  $\beta_i$ . O resultado vai depender de constante de acoplamento efetivas que evoluem segundo equações:

$$\frac{d}{d[\text{Log}(\rho/m)]} \bar{\rho}_i = \beta_i(\bar{\rho}, \bar{\lambda}) \quad (\text{eq. 127.2})$$

Em suma, temos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \text{contra-termos} \Rightarrow \bar{\lambda} \leftrightarrow \beta(\lambda)$$

$$+ \rho_i M^{4-d_i} \mathcal{O}_i(\rho) \Rightarrow \rho_i \leftrightarrow \beta_i(\rho_i) \quad \dots \quad \beta_i = (d_i - \gamma + \delta_i) \rho_i$$

No limite em que todas as correções são muito pequenas (perto da teoria livre), podemos ignorar as contribuições de  $\gamma_i$  para  $\beta_i$  ( $\gamma_i$  depende de  $\rho_i$  ou  $\lambda$ , portanto  $\gamma_i \rho_i \sim \mathcal{O}(\text{pert}^2)$ ); neste caso:

$$\frac{d}{d[\text{Log}(\rho/m)]} \bar{\rho}_i = [d_i - \gamma] \bar{\rho}_i \rightarrow \beta_i(\bar{\rho}_i) = (d_i - \gamma) \bar{\rho}_i + \underbrace{\delta_i \bar{\rho}_i}_{\sim 0}$$

$$\bar{\rho}_i = \rho_i \left( \frac{\rho}{m} \right)^{d_i - \gamma}$$

O que nos fornece o comportamento que esperávamos depois da análise pelo método do Wilson: operadores com dimensão maior que 4 (não-renormalizáveis **em quatro dimensões**) tem acoplamentos que diminuem para momentos pequenos.

Em  $d$  dimensões, temos que tomar cuidado com o termo  $\lambda \phi^4$ , que fica com acoplamento dimensional. Fazemos então:

$$\text{Dim}[\phi] = \frac{d-2}{2}$$

$$\text{Dim}[\phi^4] = 2d - 4$$

$$\hookrightarrow \text{Dim}[\lambda] = d - (2d - 4) = 4 - d$$

$$\lambda \rightarrow \lambda' m^{4-d} \quad (\text{definindo um novo } \lambda \text{ adimensional})$$

$\text{Dim}[\phi_m^2] = d-2 \rightarrow P_m M^{d-(d-2)} \phi_m^2 = P_m M^2 \phi_m^2$  (no caso do operador de massa, nada muda)

finalmente  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2} P_m M^2 \phi_m^2 - \frac{1}{4} \lambda M^{4-d} \phi_m^4 + \dots$

para outros operadores basta trocar:  $M^{4-d_i} \rightarrow M^{d-d_i}$   $\rightarrow$  dimensão do operador

Também precisamos calcular os contratermos em  $d$  dimensões. O cálculo que fizemos para  $\delta \phi^2$  muda da seguinte forma, para  $d$  próximo a 4:

$$\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} \stackrel{d \rightarrow 4}{\sim} -\frac{2}{d-4} - \text{Log}(M^2) + (d-4) \left[ -\frac{1}{4} \text{Log}^2(M^2) - \frac{1}{2} \gamma \text{Log}(M^2) \right] + \dots + \mathcal{O}[(d-4)^2]$$

indep de M

$$M \frac{d}{dM} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} = -2 + (d-4) \left[ -\gamma - \text{Log}(M^2) \right] + \mathcal{O}[(d-4)^2]$$

$$M \frac{d}{dM} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} \sim -2 + \mathcal{O}(d-4)$$

$\rightarrow$  o que tínhamos antes (em  $d=4$ )

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \left[ 2 - \mathcal{O}(d-4) \right] = \left[ \gamma_{\phi^2}^{(4)} + \mathcal{O}[\lambda(d-4)] \right]$$

$$\beta_i = (d_i - d + \gamma_i) P_i \rightarrow \beta_m = \left\{ 2 - (d-4) + \gamma_{\phi^2}^{(4)} + \mathcal{O}[\lambda(d-4)] \right\} P_m = \left\{ -2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)} - (d-4) + \mathcal{O}[\lambda(d-4)] \right\} P_m$$

$$\lambda(d-4) \sim 0 \quad P_i(d-4) \sim 0 \quad \rightarrow \quad \beta_m = \left( -2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)} \right) P_m + \dots \quad (\text{eq. 128.1})$$

Algo similar ocorre com as outras funções:  $\beta_i = \left[ d_i - d + \gamma_i^{(4)} \right] P_i + \dots$

No caso da função  $\beta$  temos um contribuição da dimensão de massa de  $\lambda$ :

$$\beta = (d-4)\lambda + \beta^{(4)}(\lambda) \quad (\text{eq. 128.2})$$

$\leftarrow \frac{\lambda^2(d-4) \sim 0}{1 \cdot \mathcal{O}(\lambda^2) = \beta^{(4)}(\lambda)}$

$$\beta = (d-4)\lambda + M^{d-4} \mathcal{O}(\lambda^2) = (d-4)\lambda + (1 + (d-4)\text{Log}(M) + \dots) \mathcal{O}(\lambda^2)$$

modificando  $G^{(4)} \sim \lambda M^{4-d} + \dots \rightarrow \left[ M \frac{d}{dM} + \beta \frac{d}{d\lambda} + \dots \right] G^{(4)} = 0 \Rightarrow \left[ \lambda(d-4) M^{4-d} + \beta M^{4-d} + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] = 0$   
 introduziu a ordem  $\lambda^1$  (que antes era nula)

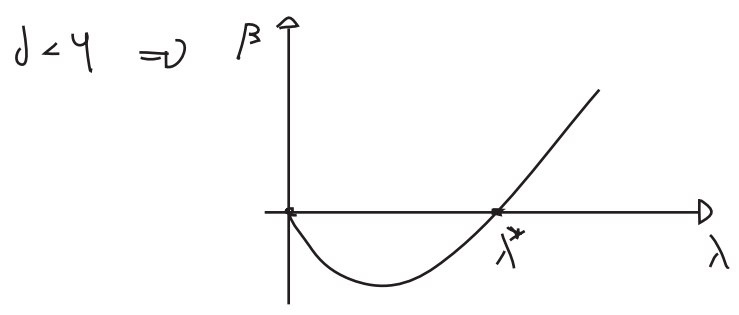


Usando o resultado 108.1:  $\beta = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$

temos:

$$\beta = -(1-d)\lambda + \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2}$$

$$d \geq 4 \Rightarrow \beta > 0 \quad \therefore \lambda \rightarrow 0 / p \rightarrow 0$$



$$\lambda_* = \frac{16\pi^2}{3} (4-d)$$

o que é o comportamento que previmos nas págs 121-122, com um ponto fixo em  $\lambda^*$

### Conexão com os expoentes críticos

Usando o resultado 128.1, podemos obter a evolução do parâmetro de massa em  $\lambda\phi^4$ :

$$\beta_m = (-2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)}) \bar{p}_m \rightarrow \frac{d}{d[\text{Log}(M/\mu)]} \bar{p}_m = \beta_m(\bar{p}_m) = (-2 + \underbrace{\gamma_{\phi^2}^{(4)}}_{\frac{\lambda}{16\pi^2}}) \bar{p}_m \quad (\text{eq. 125.2})$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \frac{1}{\bar{p}_m} d\bar{p}_m = -2 d[\text{Log}(M/\mu)] \Rightarrow \boxed{\bar{p}_m = \mu \left(\frac{M}{\mu}\right)^2} \quad (\text{eq. 129.1})$$

Lembrando que  $p_m = \frac{m^2}{M^2} \Rightarrow \bar{p}_m = \frac{m^2}{p^2}$  (o que apenas nos diz que quando  $p \sim m$  o termo de massa se torna importante, e é pouco importante para  $p \gg m$ )

$$\bar{m}^2(p) = M^2 \bar{p}_m = m^2 \left(\frac{M}{p}\right)^2$$

Pensando em um sistema de mecânica estatística, lembremos que o comprimento de correlação desempenha o papel da massa deste campo escalar. Levando em conta a evolução desta massa podemos definir:

$$\xi \sim p_0^{-1} \quad / \quad \bar{p}_m(p_0) = 1 \quad \dots \quad \bar{p}_m = 1 \Leftrightarrow p_0^2 = p_m M^2$$

um momento específico (não confundir com a componente zero do momento)

$$\xi \sim (M^2 p_m)^{-1/2} = m^{-1}$$

Usando o mesmo critério para definir  $\xi$  perto do ponto fixo  $\lambda^*$ , obtemos:

$$\frac{d}{d[\log(M/\mu)]} \bar{P}_m = \left( -2 + \gamma_{\phi^2}(\lambda^*) \right) \bar{P}_m \Rightarrow \bar{P}_m = P_m \left( \frac{M}{\mu} \right)^{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda^*)} \quad (\text{eq. 130.1})$$

$$\bar{P}_m(P_0) = 1 \Rightarrow P_m \left( \frac{M}{P_0} \right)^{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda^*)} = 1 \Rightarrow P_0^{-1} = P_m^{-1/\nu}$$

$$P_0 = P_m^\nu M$$

$$\xi \sim P_m^{-\nu}$$

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{16\pi^2} \quad \lambda^* = \frac{16\pi^2}{3} (4-d)$$

$$\nu^{-1} = 2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda^*) = 2 - \frac{\lambda^*}{16\pi^2} = 2 - \frac{1}{3} (4-d) + \mathcal{O}[(4-d)^2]$$

Wilson & Fisher mostraram que podemos obter o resto da expansão.

Comparando com o que obtivemos para o modelo de Landau:

$$\xi = [2k(T - T_c)]^{-1/2}$$

vemos que  $P_m$  é que desempenha o papel do parâmetro que mede a distância para a temperatura crítica, e  $\nu$  mede como o comprimento de correlação cresce conforme nos aproximamos desta temperatura:

$$P_m \sim (T - T_c) \Rightarrow \xi \sim (T - T_c)^{-\nu}$$

$$\nu = \frac{1}{2 - \frac{1}{3} (4-d) + \mathcal{O}[(4-d)^2]}$$

$$\nu \approx \frac{1}{2} \quad (\text{de acordo com o modelo de Landau})$$

contruindo uma teoria escalar com simetria  $O(N)$  é possível mostrar que:

$$\nu^{-1} = 2 - \frac{N+2}{N+8} (4-d)$$

com  $N$  campos escalares

O que nos permite descrever o comportamento perto do ponto crítico de diferentes materiais magnéticos:

$$N = 1 \Rightarrow \text{com eixo preferencial de magnetização}$$

$N = 2 \Rightarrow$  com plano preferencial de magnetização

$N = 3 \Rightarrow$  isotrópicos

E os valores previstos concordam bem com experimentos ( $d = 3$ ):

$N$	1	2	3
$\nu_{\text{TEOR}}$	0,6	0,63	0,65
$\nu_{\text{EXP}}$	0,64	0,67	0,71

Curiosamente, o comportamento crítico pode ser estudado para uma grande variedade de sistemas (flúidos, ligas binárias, superfluidos, ...). É um fato experimental que os expoentes perto do ponto crítico dependem apenas da dimensão da variável que flutua e não dos detalhes microscópicos. Isso pode parecer um milagre, mas do ponto de vista da teoria quântica de campos, é um fato natural, uma consequência direta do grupo de renormalização. Quando o sistema passa a ser dominado pela dinâmica de grandes distâncias restam apenas alguns operadores relevantes, e tudo fica muito simples. Esta idéia, levada para as teorias relativísticas, nos explica porque as teorias interessantes para física de partículas são renormalizáveis. Isto indica apenas que estamos longe do cut-off destas teorias.

Exponent	Landau	QFT	Lattice	Experiment	
<i>N = 1 Systems:</i>					
$\gamma$	1.0	1.241 (2)	1.239 (3)	1.240 (7) 1.22 (3) 1.24 (2)	binary liquid liquid-gas $\beta$ -brass
$\nu$	0.5	0.630 (2)	0.631 (3)	0.625 (5) 0.65 (2)	binary liquid $\beta$ -brass
$\alpha$	0.0	0.110 (5)	0.103 (6)	0.113 (5) 0.12 (2)	binary liquid liquid-gas
$\beta$	0.5	0.325 (2)	0.329 (9)	0.325 (5) 0.34 (1)	binary liquid liquid-gas
$\eta$	0.0	0.032 (3)	0.027(5)	0.016 (7) 0.04 (2)	binary liquid $\beta$ -brass
<i>N = 2 Systems:</i>					
$\gamma$	1.0	1.316 (3)	1.32 (1)		
$\nu$	0.5	0.670 (3)	0.674 (6)	0.672 (1)	superfluid $^4\text{He}$
$\alpha$	0.0	-0.007 (6)	0.01 (3)	-0.013 (3)	superfluid $^4\text{He}$
<i>N = 3 Systems:</i>					
$\gamma$	1.0	1.386 (4)	1.40 (3)	1.40 (3) 1.33 (3) 1.40 (3)	EuO, EuS Ni RbMnF <sub>3</sub>
$\nu$	0.5	0.705 (3)	0.711 (8)	0.70 (2) 0.724 (8)	EuO, EuS RbMnF <sub>3</sub>
$\alpha$	0.0	-0.115 (9)	-0.09 (6)	-0.011 (2)	Ni
$\beta$	0.5	0.365 (3)	0.37 (5)	0.37 (2) 0.348 (5) 0.316 (8)	EuO, EuS Ni RbMnF <sub>3</sub>
$\eta$	0.0	0.033 (4)	0.041 (14)		

# Invariância de Gauge para grupos não abelianos

## A geometria da Invariância de Gauge

(Peskin 15.1; Ryder 3.6)

Voltando um pouco para trás, sabemos que uma das formas de obter a QED consiste em exigir que a teoria para um campo fermiônico seja invariante sobre a transformação local:

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \Psi(x)$$

A Lagrangeana:  $\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi$  não é invariante e precisamos introduzir a derivada covariante:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\not{D}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi$$

(o que introduz um novo campo que se acopla com a corrente conservada, é vetorial, sem massa e tem a transformação esperada para o campo eletromagnético sob a simetria de gauge do eletromagnetismo)

O problema com a derivada usual fica claro se pensarmos na definição desta derivada:

$$\underbrace{h^\mu}_{\text{derivada na direção de } n} d_\mu \Psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\Psi(x + \epsilon n) - \Psi(x)]$$

Estes dois campos sofrem transformações diferentes já que  $\alpha(x + \epsilon n) \neq \alpha(x)$

$d_\mu \Psi$  não se transforma de uma forma simples sobre a simetria. Precisamos compensar a diferença de fase de forma a encontrar uma derivada que permita comparar os dois pontos no espaço e tenha uma transformação bem definida.

Definamos: **(comparador)**  $U(y, x)$   $\xrightarrow{\text{transformação de Gauge}}$   $e^{i\alpha(y)} U(y, x) e^{-i\alpha(x)}$   
↳ escalar

$$U(y, y) = 1$$

Uma função que faz este serviço é:  $U(x, y) = e^{i\phi(x, y)}$  ;  $\phi(y, y) = 0$

temos então:

$$\Psi(y) \rightarrow e^{i\alpha(y)} \Psi(y)$$

$$U(y, x) \Psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(y)} U(y, x) \cancel{e^{-i\alpha(x)}} \cancel{e^{i\alpha(x)}} \Psi(x) = e^{i\alpha(y)} U(y, x) \Psi(y)$$

mesma transformação

Podemos comparar  $\psi(y)$  e  $U(y, x) \psi(x)$ , já que os dois se transformam com a mesma fase, e definir:

$$n^N D_\mu \psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi(x + \epsilon n) - U(x + \epsilon n, x) \psi(x)]$$

(eq. 133.1)

Usando  $U(x, y) = e^{i\phi(x, y)}$   $[U(x, y)]^\dagger = U(y, x) \rightarrow \phi(x, y) = -\phi(y, x)$   
 $\phi(x, x) = 0$   
 $U(x, x) = 1$

$$\phi(x + \epsilon n, x) = 0 + \underbrace{\left. \frac{d\phi}{d(\epsilon n)} \right|_{\epsilon n = 0}}_{-ie A_\mu} \epsilon n_\mu + \mathcal{O}[(\epsilon n_\mu)^2]$$

$$U(x + \epsilon n, x) = 1 - i e \epsilon n^\mu A_\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

**Conexão** (pois aparece no limite infinitesimal de uma comparação entre transformações locais em pontos diferentes)

Voltando com esta definição na derivada covariante:

$$\begin{aligned} n^N D_\mu \psi &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi(x + \epsilon n) - (1 - i e \epsilon n^\mu A_\mu) \psi(x)] = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi(x + \epsilon n) - \psi(x)] + i e n^\mu A_\mu \psi(x) \end{aligned}$$

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + i e A_\mu \psi$$

Podemos obter as transformações habituais para A:

$$\begin{aligned} U(y, x) &\rightarrow e^{i\alpha(y)} U(y, x) e^{-i\alpha(x)} \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right\} y = x + \epsilon n \\ 1 - i e \epsilon n^\mu A_\mu(x) &\rightarrow e^{i\alpha(x + \epsilon n)} [1 - i e \epsilon n^\mu A_\mu(x)] e^{-i\alpha(x)} \end{aligned}$$

Com  $\alpha$  também infinitesimal:

$$\begin{aligned}
 1 - i e \in n^N A_\mu(x) &\rightarrow (1 + i \alpha(x + \epsilon)) (1 - i e \in n^N A_\mu(x)) (1 - i \alpha(x)) \\
 &\rightarrow \underbrace{1 + i \alpha(x + \epsilon) - i e \in n^N A_\mu(x) - i \alpha(x)}_{= i \in n^N d_\mu \alpha(x)}
 \end{aligned}$$

$$- i e \in n^N A_\mu(x) \rightarrow i \in \frac{n^N}{e} d_\mu \alpha(x) - i e \in n^N A_\mu(x)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} d_\mu \alpha(x) \quad (\text{eq. 134.1})$$

Podemos checar que estas definições nos levam a uma derivada que se transforma da forma desejada:

$$\begin{aligned}
 D_\mu \Psi(x) &= (d_\mu \Psi(x) + i e A_\mu \Psi(x)) \rightarrow d_\mu (e^{i\alpha(x)} \Psi(x)) + i e \left[ A_\mu - \frac{1}{e} d_\mu \alpha(x) \right] e^{i\alpha(x)} \Psi(x) = \\
 &= e^{i\alpha(x)} \left\{ \cancel{i \Psi(x) d_\mu \alpha(x)} + d_\mu \Psi(x) + i e A_\mu \Psi(x) - \cancel{i \Psi(x) d_\mu \alpha(x)} \right\} e \\
 D_\mu \Psi(x) &\rightarrow e^{i\alpha(x)} D_\mu \Psi(x)
 \end{aligned}$$

(note que pensando na introdução de  $A$  como uma redefinição da derivada, temos uma forma clara de construir teorias invariantes por esta simetria, basta usar sempre derivadas covariantes)

Podemos também usar argumentos geométricos para construir um termo cinético para o campo introduzido. Para isso temos que achar um termo invariante construído com os campos  $A$ . Dado o comparador:

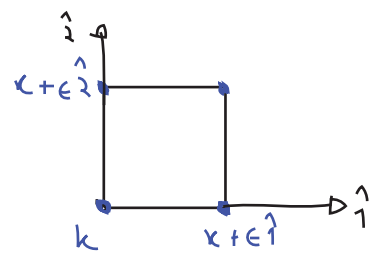
$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= e^{i\phi(x, y)} \\
 \phi(x + \epsilon_\mu, x) &= \phi(x) - e A^\mu(x) \epsilon_\mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial(\epsilon_\mu) \partial(\epsilon_\nu)} \Big|_{\epsilon_\mu=0} (\epsilon_\mu) (\epsilon_\nu) + \mathcal{O}[(\epsilon_\mu)^3] = \\
 -e A^\mu &= \frac{\partial \phi}{\partial(\epsilon_\mu)} \Big|_{\epsilon_\mu=0} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\epsilon_\nu)} \left( \frac{\partial \phi}{\partial(\epsilon_\mu)} \right) (\epsilon_\mu) (\epsilon_\nu) = \\
 &= -e \frac{\partial A^\mu}{\partial(\epsilon_\nu)} \left( \frac{\epsilon_\mu}{2} \right) (\epsilon_\nu)
 \end{aligned}$$

$$\phi(x + \epsilon n, x) = -e \epsilon n_\mu \left( A^\mu(x) + \frac{dA^\mu}{d(\epsilon n_\nu)} \left( \frac{\epsilon n_\nu}{2} \right) \right) + \mathcal{O}[(\epsilon n_\nu)^3] =$$

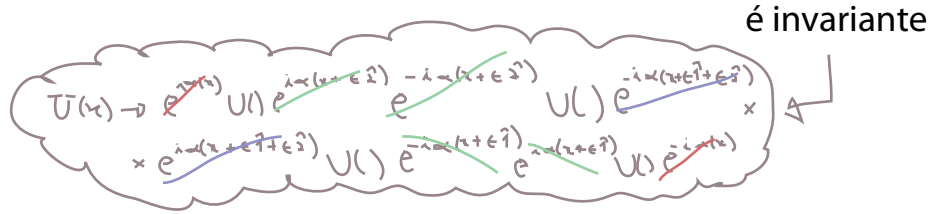
$A^\mu(x + \frac{\epsilon}{2} n)$

$$U(x + \epsilon n, x) = \text{Exp} \left[ -i e \epsilon n_\mu A^\mu(x + \frac{\epsilon}{2} n) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right] \quad (\text{eq. 135.1})$$

Podemos construir um objeto invariante pensando em um caminho fechado. Por simplicidade pensemos em um plano definido por dois vetores:  $\hat{1} \in \hat{2}$



O objeto: 
$$U(x) \equiv U(x, x + \epsilon \hat{2}) U(x + \epsilon \hat{2}, x + \epsilon \hat{1} + \epsilon \hat{2}) \times U(x + \epsilon \hat{1} + \epsilon \hat{2}, x + \epsilon \hat{1}) U(x + \epsilon \hat{1}, x)$$



Usando a eq. 135.1, temos:

$$U(x, x + \epsilon n) = U^\dagger(x + \epsilon n, x) = \text{Exp} \left[ +i e \epsilon n_\mu A^\mu(x + \frac{\epsilon}{2} n) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right]$$

$$U(x) = \text{Exp} \left\{ -i e \epsilon \left[ -\hat{2}_\mu A^\mu(x + \frac{\epsilon}{2} \hat{2}) - \hat{1}_\mu A^\mu(x + \epsilon \hat{2} + \frac{\epsilon}{2} \hat{1}) + \hat{2}_\mu A^\mu(x + \epsilon \hat{1} + \frac{\epsilon}{2} \hat{2}) + \hat{1}_\mu A^\mu(x + \frac{\epsilon}{2} \hat{1}) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right] \right\}$$

$$\hat{1}_\mu A^\mu \equiv A_1 \quad \hat{2}_\mu A^\mu \equiv A_2$$

$$\frac{1}{\epsilon} \left[ A_2(x + \epsilon \hat{1} + \frac{\epsilon}{2} \hat{2}) - A_2(x + \frac{\epsilon}{2} \hat{2}) \right] = \partial_1 A_2(x + \frac{\epsilon}{2} \hat{2})$$

$$U(x) = \text{Exp} \left\{ -i e \epsilon \left[ \partial_1 A_2(x + \frac{\epsilon}{2} \hat{2}) - \partial_2 A_1(x + \frac{\epsilon}{2} \hat{1}) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right\}$$

$$U(x) = 1 - i e \epsilon \left[ \partial_1 A_2(x) - \partial_2 A_1(x) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

tem que ser invariante,  $\hat{1}$  e  $\hat{2}$  podiam ter sido quaisquer duas direções

$$\therefore \bar{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \text{é invariante}$$

(field strength tensor)

Poderíamos ter chegado no mesmo termo invariante pensando nas segundas derivadas do campo:

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi(x)$$

$$D_\nu [D_\mu \psi(x)] \rightarrow e^{i\alpha(x)} D_\nu D_\mu \psi(x)$$

o mesmo vale trocando  $\mu$  por  $\nu$ , logo... → basta pensar nisso como um novo campo com a mesma transformação de  $\psi$

$$[D_\mu, D_\nu] \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} [D_\mu, D_\nu] \psi(x)$$

$$[D_\mu, D_\nu] \psi(x) = \underbrace{[d_\mu, d_\nu]}_{=0} \psi(x) + i e [A_\mu, d_\nu] \psi(x) + i e [d_\mu, A_\nu] \psi(x) - e^2 [A_\mu, A_\nu] \psi(x) =$$

$\xrightarrow{\text{CANCELAMENTO}} \quad \xrightarrow{\text{CANCELAMENTO}}$

$$= i e A_\nu d_\mu \psi - i e d_\nu [A_\mu \psi] + i e d_\mu [A_\nu \psi] - i e A_\nu d_\mu \psi =$$

$$= -i e \psi d_\nu A_\mu + i e \psi d_\mu A_\nu$$

$$[D_\mu, D_\nu] \psi(x) = i e F_{\mu\nu} \psi(x)$$

$$F_{\mu\nu} \psi(x) \rightarrow \underbrace{F_{\mu\nu}}_{\text{Invariante}} \underbrace{e^{i\alpha(x)} \psi(x)}_{\text{Transformação usual de } \psi}$$

Juntando agora todos estes termos podemos construir facilmente a Lagrangeana invariante mais geral (renormalizável):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{D}) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 - \underbrace{\lambda c \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}}_{\text{viola P e T}} - m \bar{\psi} \psi$$

(também estamos exigindo que seja um escalar de Lorentz)

Notem que só postulando um conteúdo de matéria (o férmion) e argumentos de simetria (como o férmion se transforma e exigindo invariâncias da Lagrangeana), obtivemos a Lagrangeana da QED.

### Teoria de Yang-Mills

(Peskin 15.2; Ryder 3.5)

Suponha que tenhamos agora um dubleto de férmions:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$$

para cada ponto do espaço associa 2 spinores, em termos de índices:

$$\Psi(x) = \psi_\alpha^a(x)$$

$\begin{matrix} \nearrow a = 1, 2 & \text{(índice de isospin)} \\ \searrow \alpha = 1, 2, 3, 4 & \text{(índice spinorial)} \end{matrix}$

para um total de 8 componentes



que se transforma segundo:

$$\Psi(x) \rightarrow \text{Exp} \left( i\alpha_j \frac{\sigma_j}{2} \right) \Psi$$

(eq. 137.1)

$$j = 1, 2, 3$$

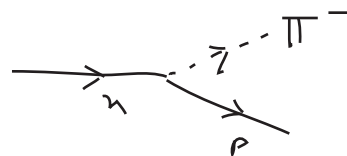
$\sigma_j$  matrizes de Pauli

É como a rotação de spins em três dimensões, grupo SU(2) ou O(3)

Um dubleto deste tipo pode ser útil para descrever qualquer teoria onde tenhamos um par de férmions praticamente idênticos (só podem ser diferenciados usando alguma outra interação, que é desprezível para o que estamos querendo descrever), especialmente se a interação em questão pode transformar uma na outra, efetivamente mudando o estado do dubleto. Um bom exemplo é o nucleon:

$$N(x) = \begin{pmatrix} p(x) \\ n(x) \end{pmatrix}$$

O próton e neutron podem ser diferenciados pela carga, mas a QED é muito fraca quando comparada com a força nuclear. Além disso temos os vértices:



$$\begin{pmatrix} p(x) \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ n(x) \end{pmatrix} + \pi^+$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ n(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} p(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \pi^-$$

Promovamos agora a simetria de 137.1 a uma simetria local:

$$\Psi(x) \rightarrow \underbrace{\text{Exp} \left( i\alpha_j(x) \frac{\sigma_j}{2} \right)}_{V(x)} \Psi(x) = V(x) \Psi(x)$$

(eq. 137.2)

Notem que agora temos três "direções" para transformar  $y$  ( $j=1, 2$  ou  $3$ ), e que transformações em direções diferentes não comutam:

$$\sigma_1 \sigma_2 \Psi(x) \neq \sigma_2 \sigma_1 \Psi(x)$$

temos uma **Teoria de Gauge não-Abeliano**

Para construir invariantes usaremos o mesmo método usado nas páginas 132-135. Como o espinor tem duas componentes, agora o comparador deve ser uma matriz 2x2:

$$U(y, x) \rightarrow V(y) U(y, x) V^\dagger(x) \quad U(y, y) = \hat{1}$$

exigiremos que:  $x \neq y \Rightarrow U^+ U = \hat{1}$

$$U(x+\epsilon n, x) = 1 + i g \epsilon n^\mu \underbrace{A_\mu^i}_{\text{Três campos de Gauge}} \frac{\sigma^i}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

inserindo isto em 133.1 temos:

$$\begin{aligned} n^\mu D_\mu \psi &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi(x+\epsilon n) - U(x+\epsilon n, x) \psi(x)] = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi(x+\epsilon n) - (1 + i g \epsilon n^\mu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}) \psi(x)] = \\ &= n^\mu \left[ d_\mu - i g A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \right] \psi \Rightarrow \boxed{D_\mu = d_\mu - i g A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}} \quad (\text{eq. 138.1}) \end{aligned}$$

Podemos obter a transformação dos A:

$$U(x+\epsilon n, x) \rightarrow V(x+\epsilon n) U(x+\epsilon n, x) V^\dagger(x)$$

$$\left( 1 + i g \epsilon n^\mu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \right) \rightarrow V(x+\epsilon n) \underbrace{\left( 1 + i g \epsilon n^\mu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \right)}_{\text{II}} V^\dagger(x)$$

$$\text{I} \Rightarrow V(x+\epsilon n) V^\dagger(x) = \left[ \left( 1 + \epsilon n^\mu \frac{d}{dx^\mu} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) V(x) \right] V^\dagger(x) \stackrel{V(x)V^\dagger(x)=\hat{1}}{=} 1 + \epsilon n^\mu \left( d_\mu V(x) \right) V^\dagger(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 1 - \epsilon n^\mu V(x) \underbrace{d_\mu V^\dagger(x)}_{\text{III}} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$\text{II} + \text{III} \Rightarrow i g \epsilon n^\mu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \rightarrow -\epsilon n^\mu V(x) d_\mu V^\dagger(x) + i g \epsilon n^\mu \underbrace{A_\mu^i}_{1+\mathcal{O}(\epsilon)} V(x+\epsilon n) \frac{\sigma^i}{2} V^\dagger(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$i g A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \rightarrow V(x) \left[ -d_\mu + i g A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \right] V^\dagger(x)$$

$$A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \rightarrow V(x) \left[ A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} + \frac{i}{g} d_\mu \right] V^\dagger(x)$$

$$\begin{aligned} \alpha^i \sim 0 \Rightarrow A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} &\rightarrow \left[ 1 + i \alpha^k \frac{\sigma^k}{2} + \mathcal{O}(\alpha^2) \right] \left[ A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} + \frac{i}{g} d_\mu \right] \left[ 1 - i \alpha^k \frac{\sigma^k}{2} + \mathcal{O}(\alpha^2) \right] = \\ &= A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} + \frac{1}{g} (d_\mu \alpha^k) \frac{\sigma^k}{2} + i \alpha^k \frac{\sigma^k}{2} A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - i A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \alpha^k \frac{\sigma^k}{2} + \mathcal{O}(\alpha^2) = \\ &= A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} + \frac{1}{g} (d_\mu \alpha^i) \frac{\sigma^i}{2} + \lambda \left[ \alpha^k \frac{\sigma^k}{2}, A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \right] + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

A novidade está aqui (no caso Abelian o gerador era a identidade e isto dava zero)

$$D_\mu \psi \rightarrow \exp\left(i\alpha_j \frac{\sigma^j}{2}\right) D_\mu \psi = V(x) D_\mu \psi$$

Para construir uma lagrangeana completa invariante sobre esta simetria devemos encontrar também um termo envolvendo somente os campos (o que fizemos antes por meio do caminho fechado na pg 135 e por meio do comutador da derivada covariante na pg 136). Neste caso fica mais fácil usar o comutador:

$$[D_\mu, D_\nu] \psi(x) \rightarrow V(x) [D_\mu, D_\nu] \psi(x) \quad (\text{mesma lógica da pg 136})$$

O comutador, por sua vez:

$$[D_\mu, D_\nu] \psi(x) = \underbrace{[D_\mu, D_\nu] \psi(x)}_{\substack{\circ \\ D_\mu D_\nu = D_\nu D_\mu}} - ig [A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}, D_\nu] \psi(x) - ig [D_\mu, A_\nu^i \frac{\sigma^i}{2}] \psi(x) - g^2 [A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}, A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2}] \psi(x) =$$

este termo era zero na teoria Abelianas

$$A_\mu^i = A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \quad \text{CANCELAMENTO} \quad \text{CANCELAMENTO}$$

$$= -ig A_\mu^i D_\nu \psi + ig D_\nu (A_\mu^i \psi) - ig D_\mu (A_\nu^i \psi) + ig A_\nu^i D_\mu \psi - g^2 [A_\mu^i, A_\nu^j] \psi =$$

$$= ig (D_\nu A_\mu^i) \psi - ig (D_\mu A_\nu^i) \psi - g^2 [A_\mu^i, A_\nu^j] \psi =$$

$$= -ig \left\{ D_\mu A_\nu^i - D_\nu A_\mu^i - ig [A_\mu^j, A_\nu^k] \right\} \psi(x) = -ig F_{\mu\nu}^i \psi(x) \quad (\text{eq. 139.1})$$

$$F_{\mu\nu}^i = F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} \quad (\text{field strength tensor})$$

$$F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} \equiv D_\mu A_\nu^i \frac{\sigma^i}{2} - D_\nu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - ig [A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2}, A_\nu^k \frac{\sigma^k}{2}]$$

$$- ig [A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2}, A_\nu^k \frac{\sigma^k}{2}] = -ig A_\mu^j A_\nu^k \left[ \frac{\sigma^j}{2}, \frac{\sigma^k}{2} \right] = g A_\mu^j A_\nu^k \epsilon^{ijk} \frac{\sigma^i}{2}$$

renomeando:  $k \rightarrow i$   
 $i \rightarrow j$   
 $j \rightarrow k$

$$F_{\mu\nu}^i = D_\mu A_\nu^i - D_\nu A_\mu^i + g \epsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k \quad (\text{eq. 139.2})$$

A transformação do tensor vem de:

$$[D_\mu, D_\nu] \psi(x) \rightarrow V(x) [D_\mu, D_\nu] \psi(x)$$

$$-ig \underbrace{F_{\mu\nu}^M}_{\text{?}} \psi(x) \rightarrow -ig \underbrace{V(x) F_{\mu\nu}^M V^\dagger(x)}_{\text{(ref)}} \psi(x) = -ig V(x) \hat{F}_{\mu\nu}^M \psi(x)$$

$$\boxed{F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} \rightarrow V(x) F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} V^\dagger(x)}$$

(eq. 140.1)

versão infinitesimal:

$$F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} \rightarrow F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} + \left[ \alpha^i \frac{\sigma^i}{2}, F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} \right]$$

Note que o tensor não é mais invariante por transformações de gauge. Não é difícil, no entanto, construir invariantes. De 140.1:

$$\text{Tr} \left[ F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} F^{\mu\nu j} \frac{\sigma^j}{2} \right] \rightarrow \text{Tr} \left[ V(x) F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} V^\dagger(x) V(x) F^{\mu\nu j} \frac{\sigma^j}{2} V^\dagger(x) \right]$$

além disso:

$$\text{Tr} \left[ F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} F^{\mu\nu j} \frac{\sigma^j}{2} \right] = \frac{F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu j}}{4} \underbrace{\text{Tr}[\sigma^i \sigma^j]}_{2\delta_{ij}} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu i} \equiv \frac{1}{2} (F_{\mu\nu}^i)^2$$

De forma que o termo apropriado para a Lagrangeana pode ser escrito como:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[ F_{\mu\nu}^M F^{\mu\nu M} \right] = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^i)^2 \quad \text{(eq. 139.2)}$$

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\nu A_\mu^i - \partial_\mu A_\nu^i + g \epsilon^{ijk} A_\nu^j A_\mu^k$$

Note que aqui temos termos cúbicos e quarticos nos campos de gauge. Eles interagem entre si! Podemos construir uma teoria só com campos de Gauge se quisermos, chamada de Teoria de Yang-Mills

Podemos, é claro, também construir uma teoria com os campos de Yang-Mills acoplados a férmions:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{D}) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^i)^2 - m \bar{\psi} \psi$$

Dois parâmetros: (1) m  
(2) g

Observe que a interação férmion-bóson e a interação bóson-bóson são ambas proporcionais a mesma constante:

$$\bar{\psi} \left[ i (-ig \gamma^{\mu\nu} A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}) \right] \psi$$

$$\left( \partial_\nu A_\mu^i - \partial_\mu A_\nu^i + g \epsilon^{ijk} A_\nu^j A_\mu^k \right)^2$$

obs: essa lagrangeana era conhecida como Lagrangeana de Yang-Mills. Mas no jargão moderno, "Teorias de Yang-Mills" se referem a lagrangeanas somente com campos de Gauge (sem férmions ou escalares)

→ todos os termos com 3 ou 4 campos vão estar multiplicados por g

As equações de movimento clássicas para os campos  $A_\mu^i$  são dadas por:

$$\partial^\nu F_{\nu\mu}^i + g \epsilon^{ijk} A^j{}^\nu F_{\nu\mu}^k = -g \bar{\Psi} \gamma_\mu \frac{\sigma^i}{2} \Psi$$

### Outros grupos não abelianos

Poderíamos ter seguido os mesmos passos para outras simetrias além de SU(2), as modificações no procedimento são mínimas desde que:

- (1) As transformações formem um grupo contínuo
- (2) Este grupo seja representado por um conjunto de matrizes V, unitárias e  $n \times n$

Neste caso, o campo fermiônico vai ser um objeto de  $n$  componentes com a transformação:

$$\Psi(x) \rightarrow \underbrace{V(x)}_{\text{LOCAL}} \Psi(x)$$

$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \vdots \\ \Psi_n(x) \end{pmatrix}$

$\bar{\Psi} \propto \bar{\Psi}^\dagger(x) (n \times n) \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \vdots \\ \Psi_n(x) \end{pmatrix}$

Como o grupo é contínuo, podemos escrever V na forma infinitesimal:

$$V(x) = 1 + i \alpha^a(x) t^a + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

$V(x) \Psi(x) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \vdots \\ \Psi_n(x) \end{pmatrix} + i \alpha^1(x) \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \vdots \\ \Psi_n(x) \end{pmatrix} + \dots$

$+ i \alpha^2(x) \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \vdots \\ \Psi_n(x) \end{pmatrix} + \dots$

Com esta expressão em mãos podemos fazer tudo que fizemos para SU(2), basta trocar  $\frac{\sigma^i}{2} \rightarrow t^a$  de forma que teremos estas matrizes  $t$  ao invés das matrizes de Pauli.

Agora, por exemplo, definimos:  $A_\mu^M \equiv A_\mu^a t^a$

O único lugar em que usamos explicitamente uma propriedade das matrizes de Pauli foi um pouco antes da equação 139.2, onde usamos o comutador destas matrizes. Podemos generalizar esta idéia para as matrizes  $t^a$  (lembrando que elas geram um grupo):

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c \quad (\text{eq. 141.1})$$

$\hookrightarrow$  Constantes de estrutura  
 (é sempre possível encontrar uma base para as matrizes  $t^a$  na qual  $f^{abc}$  é completamente antissimétrica)

o equivalente de 139.2 seria:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (\text{eq. 141.2})$$

Todo o resto fica muito semelhante. As transformações (infinitesimais) dos campos são:

$$\Psi \rightarrow (1 + i \alpha^a t^a) \Psi \quad (\text{eq. 142.1})$$

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A_\mu^b \alpha^c \quad (\text{eq. 142.2})$$

Já a versão finita é dada por:

$$\Psi(x) \rightarrow V(x) \Psi(x) \quad (\text{eq. 142.3})$$

$$A_\mu^a t^a \rightarrow V(x) \left( A_\mu^a t^a + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) V^\dagger(x) \quad (\text{eq. 142.4})$$

A derivada covariante se transforma da mesma forma que o campo fermiônico e o tensor de gauge é definido por:

$$[D_\mu, D_\nu] = -i g F_{\mu\nu}^a t^a \quad (\text{eq. 142.5})$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

É não é invariante, mas se transforma (infinitesimalmente) segundo:

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow F_{\mu\nu}^a - f^{abc} \alpha^b F_{\mu\nu}^c \quad (\text{eq. 142.6})$$

E construímos a Lagrangeana invariante da mesma forma que fizemos antes:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i \not{D}) \Psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 - m \bar{\Psi} \Psi \quad (\text{eq. 142.7})$$

exigindo que  $\text{Tr}[t^a t^b] = \frac{\delta^{ab}}{2}$

De onde obtemos a equação de movimento:

$$D^\mu F_{\mu\nu} + g f^{abc} A_\mu^b F_{\mu\nu}^c = -g j_\nu^a \quad (\text{eq. 142.8})$$

$$j_\nu^a = \bar{\Psi} \gamma_\nu t^a \Psi \quad \text{Corrente conservada} \quad (\text{eq. 142.9})$$

## O Loop de Wilson

(Peskin 15.3)

Voltemos à discussão do caminho fechado que estudamos na página 135. Concluímos que, apesar de voltarmos ao mesmo ponto, o produto de comparadores não era trivial (= 1). De fato obtivemos (pág 135):

$$U(x) = 1 - i e \epsilon^2 \underbrace{F_{\mu\nu}(x)}_{\text{field strength}} + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

o valor de  $\mu$  e  $\nu$  depende do plano em que colocamos o caminho  
 área do quadrado

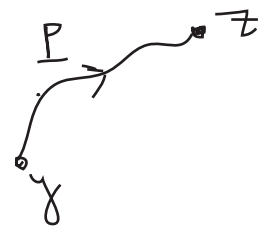
Essa conclusão foi tirada para o caso infinitesimal, mas ela mostra uma verdade mais geral: o comparador entre dois pontos  $x$  e  $y$ , depende do caminho tomado entre os pontos. Para isto ficar claro, podemos partir da conexão:  $A_\mu$  (estamos de volta no caso Abelian, por enquanto)

com a apropriada lei de transformação (eq. 134.1) e a partir dela construir um comparador que tenha a transformação adequada:

$$U(x,y) \rightarrow e^{i\alpha(y)} U(y,x) e^{-i\alpha(x)}$$

De fato:

$$U_P(z,y) = \exp \left[ -ie \int_P dx^\mu A_\mu(x) \right]$$



(eq. 143.1)

$$\begin{aligned} U_P(z,y) &\rightarrow \text{EXP} \left[ -ie \int_P dx^\mu \left( A_\mu(x) - \frac{1}{e} d_\mu \alpha(x) \right) \right] = \\ &= \text{EXP} \left[ -ie \int_P dx^\mu A_\mu(x) + i \alpha(x) \right] = e^{i\alpha(y)} U_P(z,y) e^{-i\alpha(x)} \end{aligned}$$

Logo, este objeto (chamado de **Linha de Wilson (Wilson Line)**) é uma realização concreta (para distâncias quaisquer) do comparador abstrato que vínhamos usando (e que acabávamos usando só no limite infinitesimal)

De fato, todas as propriedades que demos para  $U(x,y)$  e  $\phi(x,y)$  na páginas 132 e 133 estão satisfeitas por:  $\phi(z,y) = -e \int_P dx^\mu A_\mu(x)$

A linha de Wilson que começa e termina no mesmo ponto é chamada de **Loop de Wilson**:

$$U_P(y,y) = \text{EXP} \left[ -ie \oint_P dx^\mu A_\mu(x) \right]$$

(eq. 143.2)

Assim como no caso do caminho fechado da página 135, este loop é invariante de Gauge. Podemos reescrevê-lo na forma:

$$U_P(y, y) = \text{EXP} \left[ -ie \int_{\Sigma} d\sigma^{\mu\nu} \partial_\nu A_\mu(x) \right] = \text{EXP} \left[ -ie \int_{\Sigma} d\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right]$$

↪ Superfície gerada pelo Loop      ↪ Elemento de área nesta superfície      ↪  $\sigma^{\mu\nu}$  é anti-simétrico

vemos que o Loop de Wilson é dado pela integral do fluxo do field strength pela área do loop. Isso nos mostra que podemos usar o Loop de Wilson como elemento invariante básico para construir lagrangeanas (como antes fazíamos com F).

A generalização do Linha e do Loop de Wilson para teorias não Abelianas requer um certo cuidado. A linha deve agora se transformar conforme:

$$U_L(y, x) \rightarrow V(y) U_L(y, x) V^\dagger(x)$$

não podemos fazer a simples analogia ao que usamos em 143.1:  $U_L(y, y) \neq \text{EXP} \left[ ig \int_P dx^\mu A_\mu^a(x) t^a \right]$

porque esta exponencial, definida por sua série, conteria termos do tipo:

$$-g^2 \int_P dx_1^\mu \int_P dx_2^\nu \underbrace{A_\mu^a(x_1) t^a}_{A_\mu^a(x_1)} \underbrace{A_\nu^b(x_2) t^b}_{A_\nu^b(x_2)}$$

↪ na região em que, ao longo da linha, passamos por  $x_1$  antes de passar por  $x_2$ , deveríamos ter  $A_\mu^a(x_2) A_\nu^b(x_1) \neq A_\nu^b(x_1) A_\mu^a(x_2)$

$$\left( A_\mu^a(x) \rightarrow V(x) \left( A_\mu^a(x) + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) V^\dagger(x) \right)$$

a forma de corrigir isto é definir uma parametrização para a linha  $S(x) \begin{cases} S(y) = 0 & x(0) = y \\ S(x) = 1 & x(1) = x \end{cases}$

e definir uma Path-Ordered Exponential:

$$U_L(y, x) = P \left\{ \text{EXP} \left[ ig \int_0^1 ds \frac{dx^\mu}{ds} A_\mu^a(x(s)) t^a \right] \right\} \equiv \text{(eq. 144.1)}$$

$$\equiv 1 + ig \int_0^1 ds \frac{dx^\mu}{ds} A_\mu^a(x(s)) t^a - \frac{g^2}{2} \int_0^1 ds \frac{dx^\mu}{ds} \int_0^s ds' \frac{dx^\nu}{ds'} A_\mu^a(x(s)) A_\nu^b(x(s')) t^a t^b + \dots$$

note que sempre vale  $s' < s$



Isto é muito semelhante ao que fizemos para o ordenamento temporal, com  $s$  fazendo o papel do tempo. A linha de Wilson assim definida é solução da seguinte equação (basta derivar cada termo da série e notar que isto resulta no termo anterior multiplicado pelo fator abaixo):

$$\frac{d}{ds} U_P(x(s), y) = \left( i\gamma \frac{dx^\mu}{ds} A_\mu^a(x(s)) t^a \right) U_P(x(s), y)$$

Devemos mostrar que este objeto tem a transformação adequada. Podemos reescrever esta equação na forma:

$$\frac{dx^\mu}{ds} \frac{d}{dx^\mu} U_P(x(s), y) = \left( i\gamma \frac{dx^\mu}{ds} A_\mu^a(x(s)) t^a \right) U_P(x(s), y)$$

$$\frac{dx^\mu}{ds} \left( D_\mu - i\gamma A_\mu^a t^a \right) U_P(x(s), y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx^\mu}{ds} D_\mu U_P(x, y) = 0 \quad (\text{eq. 145.1})$$

Sob a transformação de Gauge:  $A_\mu^m \longrightarrow A_\mu'^m = V(x) \left( A_\mu^m(x) + \frac{i}{\gamma} \partial_\mu \right) V^\dagger(x)$

Queremos mostrar que:  $U_P(\gamma, \gamma, A_\mu^m) \longrightarrow U_P(\gamma, \gamma, A_\mu'^m) = V(\gamma) U_P(\gamma, \gamma, A_\mu^m) V^\dagger(\gamma)$  (eq. 145.2)

Sabemos que:  $D_\mu \psi(x) \longrightarrow V(x) D_\mu \psi(x)$ , explicitando a dependência em A:

$$\underline{D_\mu(A_\mu^m)} \psi(x) \longrightarrow \underline{D_\mu(A_\mu'^m)} V(x) \psi(x) = V(x) D_\mu(A_\mu^m) \psi(x)$$

logo:  $D_\mu(A_\mu'^m) V(x) = V(x) D_\mu(A_\mu^m)$

então:  $\underbrace{D_\mu(A_\mu'^m)}_{\frac{d}{ds}} V(\gamma) U_P(\gamma, \gamma, A_\mu^m) V(\gamma) = V(\gamma) D_\mu(A_\mu^m) U_P(\gamma, \gamma, A_\mu^m) V(\gamma)$   
 $\rightarrow$  R.H.S. DE 145.2

esta expressão é zero se  $D_\mu(A_\mu^m) U_P(\gamma, \gamma, A_\mu^m) = 0$

Isto mostra que  $U_P(\gamma, \gamma, A_\mu^m)$  e  $U_P(\gamma, \gamma, A_\mu'^m)$  (definido por 145.2) ambos satisfazem a equação 145.1 (com a derivada covariante transformada de A para A'). Como a solução da equação diferencial é única, concluímos que a lei de transformação 145.2 está correta.

O caminho fechado neste caso não será invariante, mas terá a transformação:

$$U_P(\gamma, \gamma) \longrightarrow V(\gamma) U_P(\gamma, \gamma) V^\dagger(\gamma)$$

mas o traço é:  $\text{Tr} [U_P(\gamma, \gamma)] \rightarrow \text{Tr} [V(\gamma) U_P(\gamma, \gamma) V^\dagger(\gamma)]$

Por isso, o que chamamos de Loop de Wilson em teorias não-Abelianas é o traço da linha de Wilson em um caminho fechado. Usando a invariância do loop de Wilson podemos mostrar a invariância de  $(F_{\mu\nu})^2$  basta considerar a transformação sobre um caminho simples e infinitesimal (um pequeno quadrado, como na página 135), isto está feito no Peskin, pg 494.

## Quantização de Teorias não-Abelianas

(Ryder 7.1-7.2, Peskin 16.1-16.2)

Queremos agora quantizar a teoria obtida para um campo de gauge não-abeliano:

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2$$

o que significa obter os correlatores a partir do funcional gerador abaixo:

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_m + J^N A_\mu^a)}$$

Lembrando rapidamente do caso abeliano, tínhamos (Peskin 9.4):

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A_\mu e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + J^N A_\mu)}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) =$$

basta usar integração por parte para passar as derivadas de um lado para outro

$$\stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{2} A^\mu (\underbrace{g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu}_{\text{operador}}) A^\nu$$

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu = 0 \quad (\text{eq. de Maxwell})$$

Em princípio só precisaríamos inverter **este operador**, mas aí esbarramos em um problema: imagine uma configuração de campo específica (estamos somando sobre TODAS ELAS):

$$A^\mu(x) = \partial^\mu \alpha(x)$$

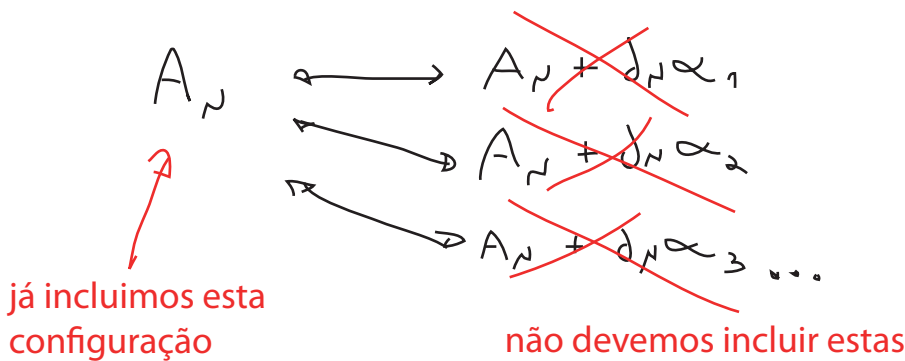
$$\hookrightarrow (g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu) \partial^\mu \alpha = (\square \partial_\nu - \partial_\nu \square) \alpha = 0$$

O operador tem autovalores zero, e portanto é singular. De fato, a integral:

$$\int \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4x A_\mu(x) (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x) \right\}$$

vai receber uma contribuição igual a "1" cada vez que considerarmos uma contribuição deste tipo. É divergente.

A raiz do problema está na invariância de gauge. Quando somamos sobre diversas configurações de  $A_\mu$ , somamos inclusive aquelas equivalentes (ligadas por uma transformação de gauge) o que é uma forma de "múltipla contagem".



O mesmo ocorre no caso não-abeliano, só que agora as configurações equivalentes estão ligadas por:

$$A_\mu^M = A_\mu^a t^a \leftrightarrow A_\mu^{M\alpha} \equiv (A_\mu^a)^a t^a = e^{i\alpha^c t^c} \left[ A_\mu^a t^a + \frac{i}{g} d_\mu \right] e^{-i\alpha^c t^c}$$

O que faremos para evitar esta múltipla contagem é o mesmo que fizemos no caso abeliano, introduzindo a fixação de Gauge por meio da identidade:

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha \delta(G(A_\mu^{M\alpha})) \text{DET} \left[ \frac{\delta G(A_\mu^{M\alpha})}{\delta \alpha} \right] \quad (\text{eq. 147.1}) (*)$$

Vínculo:  $G(A_\mu^{M\alpha}) = 0$

esta identidade está provada no Ryder pgs 246-248, e nas minhas notas de 2012 pgs 54-56

Lembrando que:

$$(A_\mu^a)^a = A_\mu^a + \frac{1}{g} d_\mu^a \alpha^a + f^{abc} A_\mu^b \alpha^c = \frac{1}{g} \left( \delta^{ac} d_\mu + g f^{abc} A_\mu^b \right) \alpha^c \equiv A_\mu^a + \frac{1}{g} D_\mu^{ac} \alpha^c$$

Desde que o vínculo  $G(A_\mu^{M\alpha})$  seja linear em  $\alpha$ ,  $\text{DET} \left[ \frac{\delta G(A_\mu^{M\alpha})}{\delta \alpha} \right]$  não será função de  $\alpha$ :

$$\Delta_G[A_\mu^M] \equiv \text{DET} \left[ \frac{\delta G(A_\mu^{M\alpha})}{\delta \alpha} \right] = \Delta_G[A_\mu^M] \quad (\text{invariante de gauge})$$

podemos tirá-lo da integral em 147.1:

$$\Delta_G^{-1}[A_\mu^M] = \int \mathcal{D}\alpha \delta(G(A_\mu^{M\alpha})) \quad (\text{eq. 147.2})$$

Inserindo a identidade 147.1 na integral do funcional gerador, temos:

$$\int DA_\mu^M e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM}} \left( \int D\alpha \delta(G(A_\mu^M)) \Delta_G[A_\mu^M] \right) =$$

$$\rightarrow \mathcal{L}_{YM}(A_\mu^M) = \mathcal{L}_{YM}(A_\mu^{M\alpha}) \equiv \mathcal{L}_{YM}^\alpha$$

$$= \int D\alpha \int DA_\mu^M e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM}^\alpha} \delta(G(A_\mu^{M\alpha})) \Delta_G[A_\mu^M] =$$

Podemos então aplicar a transformação de gauge que leva  $A_\mu^{M\alpha} \rightarrow A_\mu^M$

A medida de integração não muda, a final de contas a transformação de A não passa de uma translação seguida por uma rotação (unitária) do vetor  $A^a$ , então:

$$= \left( \int D\alpha \right) \int DA_\mu^M e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM}^\alpha} \delta(G(A_\mu^{M\alpha})) \Delta_G[A_\mu^M]$$

Nada na integral em A depende de  $\alpha$ , isto não passa de um infinito multiplicativo.

É aqui que surge a diferença entre os casos abeliano e não-abeliano. No caso abeliano, para uma fixação de gauge genérica:

$$G(A_\mu) = \partial^\mu A_\nu(x) - w(x) \Rightarrow G(A_\mu^\alpha) = \partial^\mu A_\nu + \partial^\mu \alpha - w$$

$$\frac{\delta G}{\delta \alpha} = \frac{\delta}{\delta \alpha} (\partial^\mu \alpha)$$

$\Delta_G[A_\mu]$  também independe de A e pode ser tirado da integral e ignorado (outro fator multiplicativo)

Agora temos:

$$G(A_\mu^\alpha) = \partial^\mu A_\nu^\alpha(x) - w^\alpha(x) \Rightarrow G(A_\mu^{\alpha\beta}) = \partial^\mu \left( A_\nu^\alpha + \frac{1}{g} \partial_\nu \alpha^\beta + f^{abc} A_\nu^b \alpha^c \right) - w^\alpha(x)$$

$$\frac{\delta G}{\delta \alpha^\beta} = \frac{\delta}{\delta \alpha^\beta} \left( \frac{1}{g} \partial^\mu \partial_\mu \alpha^\beta + \partial^\mu \underbrace{f^{abc} A_\nu^b \alpha^c}_{\text{depende de A}} \right) = \frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu^{\alpha\beta}$$

Agora  $\Delta_G[A_\mu^{\alpha\beta}]$  depende de A

$\frac{\delta G(A_\mu^a)}{\delta x^k}$  é uma matriz quadrada (índices  $a$  e  $b$ ) de dimensão  $N^2-1$  ( $a, b$  são índices que numeram os geradores do grupo e estamos pensando em  $SU(N)$ )

Podemos escrever o determinante como uma integral funcional de funções de números de Grassmann:

$$D_{ET} M = \int D\bar{c} Dc e^{-\int d^4x \bar{c} \cdot M \cdot c}$$

matriz nxn

campo de números de Grassmann. Multipleteo com  $n$  componentes, no caso em questão isso significa campos se transformando na rep. adjunta de  $SU(N)$

Finalmente:

$$\Delta_G[A_\mu^a] = D_{ET} \left[ \frac{\delta G(A_\mu^a)}{\delta x} \right] = \int D\bar{c} Dc \exp \left[ i \int d^4x \bar{c}_a (-\partial^\mu \partial_\mu^{ac}) c_c \right]$$

fatores  $g$  e  $-i$  incluídos na definição de  $c$

- $c$ 
    - Adjunta de  $SU(N)$
    - Anti-comutam (estatística de férmions)
    - Escalares de Lorentz (spin 0)
- Relação spin-estatística errada!
- Fantasma (Ghosts) de Faddeev-Popov

$$\mathcal{L}_{FPG} \equiv \bar{c}_a (-\partial^\mu \partial_\mu^{ac}) c_c = \bar{c}_a (-\partial^\mu \partial_\mu - g f^{abc} \partial^\mu A_\mu^b) c_c =$$

$$= -\bar{c}_a \square c_a - g f^{abc} \bar{c}_a \partial^\mu (A_\mu^b c_c) \quad (\text{eq. 149.1})$$

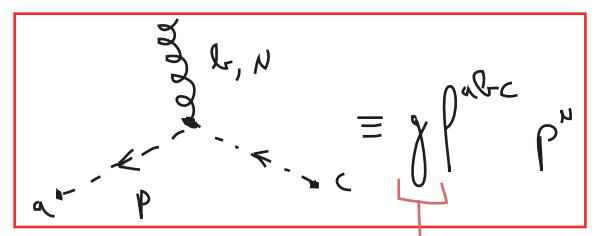
Termo cinético:  $\partial^\mu \bar{c}_a \partial^\mu c_a$

Interação Ghost-Gauge

$$\langle c^a(x) \bar{c}^b(y) \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} \delta^{ab} e^{-ik(x-y)}$$

$$g f^{abc} (\partial^\mu \bar{c}_a) A_\mu^b c_c$$

$$a \text{ --- } \leftarrow \text{ --- } b \equiv \frac{i \delta^{ab}}{p^2} \quad (\text{eq. 149.2})$$



Acoplamento de gauge  $\leftarrow$  (eq. 149.3)

Com isso em mente, temos:

$$Z[\bar{J}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A_\mu^\alpha \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{FPC}} \delta(G(A_\mu^\alpha))$$

Esta  $\delta$  é tratada da mesma forma que o caso abeliano, e temos para uma fixação genérica:

$$\delta(G(A_\mu^\alpha)) = \delta(\partial^\nu A_\nu^\alpha - w)$$

Basta multiplicar Z pela identidade  $N(\xi) \int \mathcal{D}w e^{-i \int d^4x \frac{w^2}{2\xi}} = 1$

Escolhido de forma a garantir a ident.

E fazer a integral em w usando a delta:

$$Z[\bar{J}] = \frac{1}{N'} \int \mathcal{D}A_\mu^\alpha \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{FPC}} \text{EXP} \left[ i \int d^4x \left( -\frac{(\partial^\nu A_\nu^\alpha)^2}{2\xi} \right) \right]$$

$\mathcal{L}_{GF}$   
(Gauge Fixing)

Absorve as normalizações

Podemos inclusive incluir os férmions para a lagrangeana final:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\nu A_\nu^\alpha)^2 + \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi + \bar{c}_a (-\partial^\nu D_\nu^{ac}) c_c$$

(eq. 150.1)

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

$$D = \not{\partial} ( \not{\partial}_\mu - i \gamma A_\mu^a t^a )$$

$$D_\nu^{ac} = \left( \delta^{ac} \not{\partial}_\nu + g f^{abc} A_\nu^b \right)$$

Lembrando que ainda restam índices escondidos nos férmions:

$$\bar{\Psi} \not{D} \Psi \rightarrow \bar{\Psi} \not{\partial} t^a \Psi = \bar{\Psi}_{iA} \not{\partial}_{ij} t^a_{AB} \Psi_{jB}$$



Índices spinoriais

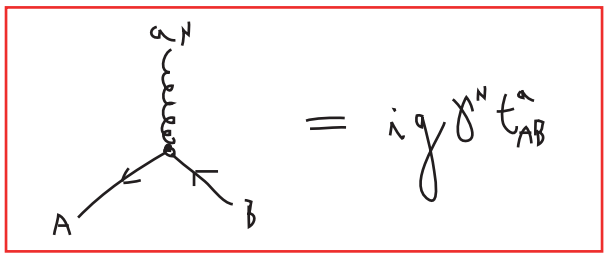
Índices da representação em que os férmions se transformam (neste caso a fundamental de SU(N) (A,B = 1... N))

Depende da rep. em que os  $\psi$  se transformam (esta forma é para a fundamental)



A interação dos férmions vem de (assumindo que se transformem na rep. fundamental):

$$\bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi \Rightarrow \bar{\Psi}_A \gamma^{\mu} A_{\mu}^a t_{AB}^a \Psi_B$$



(eq. 152.1)

Temos ainda alguns termos provenientes de  $-\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2$ :

$$-\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 = -\frac{1}{4} (\partial_{\mu} A_{\nu}^a - \partial_{\nu} A_{\mu}^a + g f^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c) (\partial^{\mu} A^{\nu a} - \partial^{\nu} A^{\mu a} + g f^{abc} A^{\mu b} A^{\nu c}) =$$

termos com  $A^2$ , já levados em conta no propagador

$$= -\frac{1}{4} \left[ \dots + \underbrace{(\partial_{\mu} A_{\nu}^a) g f^{abc} A^{\mu b} A^{\nu c}}_{\mu \leftrightarrow \nu; b \rightarrow c; c \rightarrow b} - \underbrace{(\partial_{\nu} A_{\mu}^a) g f^{abc} A^{\mu b} A^{\nu c}}_{b \rightarrow \mu; c \rightarrow \nu} + \underbrace{g f^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c (\partial^{\mu} A^{\nu a})}_{\mu \leftrightarrow \nu; b \leftrightarrow c} + \right.$$

$$\left. - g f^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c (\partial^{\nu} A^{\mu a}) + g f^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c g f^{abc} A^{\mu b} A^{\nu c} \right] =$$

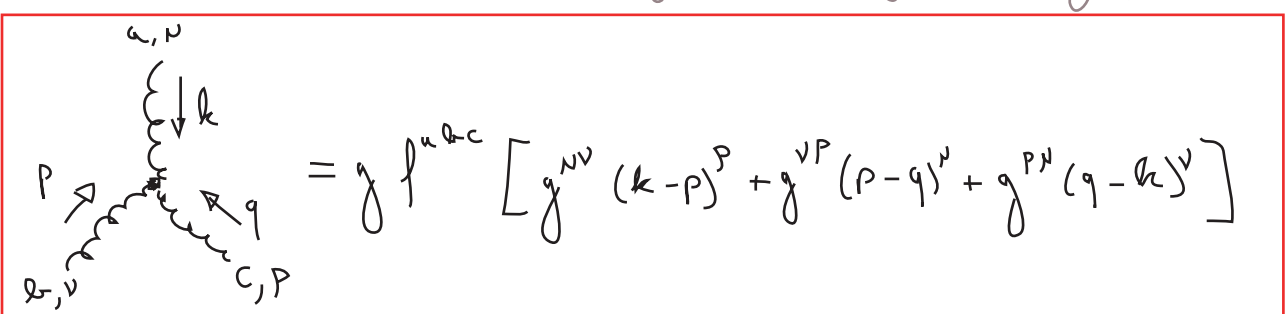
$$= -\frac{1}{4} \left[ -4 g f^{abc} (\partial_{\nu} A_{\mu}^a) A^{\mu b} A^{\nu c} + g^2 f^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c f^{abc} A^{\mu b} A^{\nu c} \right]$$

$$\langle P_{\mu}^{\nu} q^{\rho} | (\partial_{\alpha} A_{\beta}^a) A^{\mu b} A^{\nu c} | k_{\alpha}^N \rangle \Rightarrow (ig) f^{abc} (-i k_{\alpha}) \gamma_{\beta}^{\mu} \delta_{\alpha a} \gamma^{\nu \beta} \delta_{\mu b} g^{\rho c} \delta_{c' c} =$$

$$= g f^{abc} k^{\rho} g^{\nu \mu}$$

$$\langle P_{\mu}^{\nu} q^{\rho} | (\partial_{\alpha} A_{\beta}^a) A^{\mu b} A^{\nu c} | k_{\alpha}^N \rangle \Rightarrow (ig) f^{abc} (-i k_{\alpha}) \gamma_{\beta}^{\mu} \delta_{\alpha a} g^{\rho \beta} \delta_{\mu' c} g^{\nu \alpha} \delta_{\mu' c} =$$

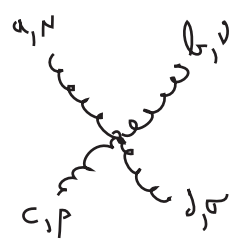
$$= g f^{abc} k^{\nu} g^{\rho \mu} = -g f^{abc} k^{\nu} g^{\rho \mu}$$



(eq. 152.2)



Seguindo a mesma lógica, obtemos o acoplamento quártico (são 4! contrações, mas somente 6 delas são diferentes e se repetem 4 vezes, o que some com o fator 1/4 da Lagrangeana):



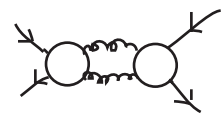
$$= -ig^2 \left[ f^{ube} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \right]$$

(eq. 153.1)

### Ghosts e Unitariedade

(Peskin 16.1 e 16.3; Ryder 7.7)

Já vimos que precisamos introduzir os FP Ghosts para resolver um problema introduzido pela invariância de Gauge da Teoria, mas eles têm uma outra função, que ficará clara se calcularmos o seguinte diagrama:

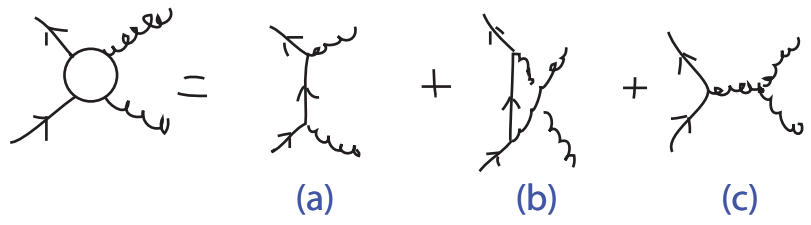


O teorema óptico nos diz que:

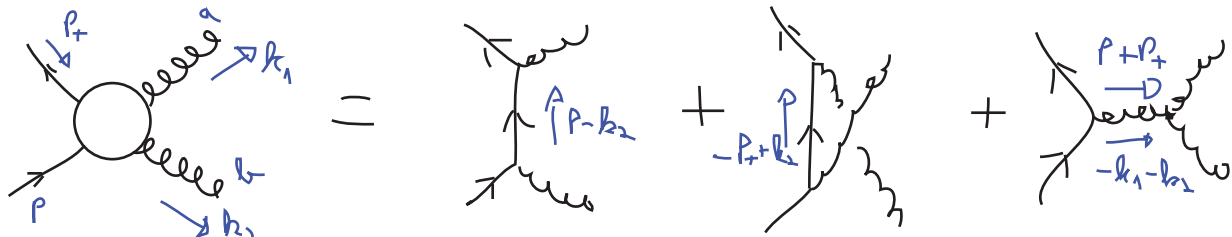
$$2 \text{Im} \left[ \text{Diagram} \right] = \int d\pi \left| \text{Diagram} \right|^2$$

↳ integrais no espaço de fase dos dois bósons de Gauge

que, em LO, recebe as seguintes contribuições:



Portanto é interessante estudar os três diagramas que contribuem para esta amplitude.



Os diagramas (a) e (b) somados nos dão:

$$i \underbrace{M_{\mu\nu}^{\rho\sigma}}_{\mu} \epsilon_{\rho}^*(k_1) \epsilon_{\sigma}^*(k_2) = (ig)^2 \bar{v}(P_+) \left\{ \gamma^{\mu} t^a \frac{i}{\not{P} - \not{k}_2 - m} \gamma^{\nu} t^a + \dots \right\}$$

$$+ \gamma^\nu t^a \left\{ \frac{i}{k_2 - \cancel{P_+} - m} \gamma^\mu t^a \right\} u(P) \epsilon_\mu^*(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2)$$

Podemos nos perguntar se estes bosons de Gauge, que nesta amplitude são partículas externas, satisfazem identidades de Ward assim como faziam os fotons:

$$k_{1\mu} \left( \text{diagrama} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad k_{2\nu} \left( \text{diagrama} \right) = 0$$

subtraí zero  
(P-m)u(P)=0

$$i M_{\mu\nu}^{\mu\nu} \epsilon_\mu^*(k_1) k_{2\nu} = (ig)^2 \bar{v}(P_+) \left\{ -\gamma^\nu t^a \frac{i}{-P_+ + k_2 + m} (k_2 - (P-m)) t^a + \right. \\ \left. + (k_2 - P_+ - m) t^a \frac{i}{k_2 - \cancel{P_+} - m} \gamma^\nu t^a \right\} u(P) \epsilon_\nu^*(k_1)$$

$\bar{v}(P_+) (-P_+ - m) = 0$

$$i M_{\mu\nu}^{\mu\nu} \epsilon_\mu^*(k_1) k_{2\nu} = (ig)^2 \bar{v}(P_+) \left\{ -i \gamma^\nu t^a t^b + i t^b \gamma^\nu t^a \right\} u(P) \epsilon_\nu^*(k_1)$$

$-i \gamma^\nu [t^a, t^b] = -i \gamma^\nu (i f^{abc} t^c) \neq 0$

O que seria zero no caso abeliano, mas não o é para o caso não abeliano.

$$i M_{\mu\nu}^{\mu\nu} \epsilon_\mu^*(k_1) k_{2\nu} = -g^2 \bar{v}(P_+) \gamma^\nu u(P) \epsilon_\nu^*(k_1) f^{abc} t^c$$

(a)+(b)  
(eq. 154.1)

Isto representa um problema, pois nos diz que a probabilidade de produzir bósons de gauge com polarizações longitudinais é diferente de zero (uma das coisas que a identidade de Ward fazia era impedir isso) e argumentos simples de relatividade nos mostram que bosons vetoriais sem massa só tem duas polarizações físicas (as transversais). Vejamos a contribuição do diagrama (c)

$$i M_c^{\mu\nu} \epsilon_\mu^*(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) = i g \bar{v}(P_+) \gamma_\rho t^c u(P) \left( -\frac{i}{k_3^2} \right) \epsilon_\mu^*(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) \times$$

$k_3 = -k_1 - k_2$

$$\times g f^{abc} \left[ g^{\mu\nu} (k_2 - k_1)^\rho + g^{\rho\nu} (k_3 - k_1)^\mu + g^{\rho\mu} (k_1 - k_3)^\nu \right]$$

$$i M_c^{\mu\nu} \epsilon_\mu^*(k_1) k_{2\nu} = i g \bar{v}(P_+) \gamma_\rho t^c u(P) \left( -\frac{i}{k_3^2} \right) \epsilon_\mu^*(k_1)$$

$$\times g f^{abc} \left[ k_2^\mu (k_2 - k_1)^\rho + k_2^\nu (k_3 - k_1)^\mu + g^{\rho\mu} (k_1 - k_3)^\nu \cdot k_2 \right]$$

$k_3 = -k_1 - k_2$

$$[ ] = \left[ \underbrace{(-k_1 - k_3)^N (-k_1 - k_3 - k_1)^P}_{+ k_1^N (k_1 + k_3 + k_1)^P} + \underbrace{(-k_1 - k_3)^P (k_3 + k_1 + k_3)^N}_{- k_1^N (k_1 + k_3)^P} + \underbrace{g^{PQ} (k_1 - k_3) \cdot (-k_1 - k_3)}_{-k_1^2 - k_1 k_3 + k_1 k_3 + k_3^2} \right] =$$

$$+ k_3^N (k_1 + k_3 + k_1)^P \quad - k_3^N (k_1 + k_3)^P$$

$$- k_3^N (k_1 + k_3)^P \quad - k_3^N (k_1 + k_3)^P$$

$$i M_c^{NV} \epsilon_\mu^*(k_1) k_{2\nu} = i g^2 \bar{v}(P) \gamma_\mu t^c u(P) \left( -\frac{i}{k_3^2} \right) \epsilon_\nu^*(k_1) \int^{abc} \left[ k_1^\mu k_1^\nu - k_3^\mu k_3^\nu - g^{\mu\nu} (k_1^2 - k_3^2) \right]$$

(eq. 155.1)

Se dermos uma "acoxambrada" assumindo que o bóson com momento  $k_1$  tem polarização transversa:

(1)  $k_{1\mu} \epsilon_\mu^*(k_1) = k_{1\mu} \epsilon_\mu^{*T}(k_1) = 0$  (o que não é justificavel por enquanto)

E usamos:

$\not{P} u(P) = m u(P)$

(2)  $k_1^2 = 0$  (on-shell)

$\not{P}_+ v(P_+) = -\not{P}_+ v(P_+)$

(3)  $\bar{v}(P_+) \not{k}_3 u(P) = \bar{v}(P_+) (\not{P} + \not{P}_+) u(P) = \bar{v}(P_+) (m - m) u(P) = 0$  (eqs. de mov.)

$k_3 = P + P_+$

Obtemos:

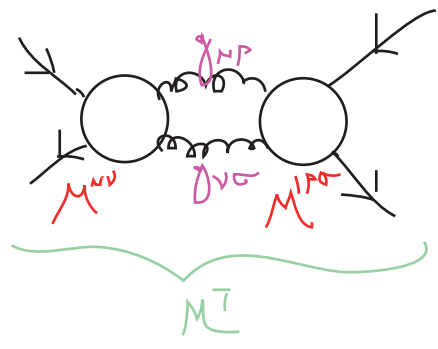
$$i M_c^{NV} \epsilon_\mu^{T*}(k_1) k_{2\nu} = i g^2 \bar{v}(P) \gamma_\mu t^c u(P) \left( +\frac{i}{k_3^2} \right) \epsilon_\nu^{T*}(k_1) \int^{abc} \left[ \cancel{k_1^\mu k_1^\nu} - \cancel{k_3^\mu k_3^\nu} - g^{\mu\nu} (\cancel{k_1^2} + \cancel{k_3^2}) \right] =$$

(1) 0      (3) 0      (4) 0

$$i M_c^{NV} \epsilon_\mu^{T*}(k_1) k_{2\nu} = g^2 \bar{v}(P) \gamma_\mu t^c u(P) \epsilon_\nu^{*P}(k_1) \int^{abc} \quad (c)$$

(eq. 155.2)

Esta contribuição cancela a polarização não-física da equação 154.1, mas a suposição que fizemos acaba impondo aquilo que queremos mostrar (que a chance de produzir um bóson de gauge com polarização não física é zero). De fato, se voltamos no diagrama, em que começamos:



vemos que presença de todas as polarizações nos diagramas "cortados" está ligada ao fato de podermos somar sobre todos os quatro graus de liberdade dos bosons de gauge virtuais. O que está faltando neste cenário? Como podemos ver que existem de fato só dois graus de liberdade físicos?

Usando regras de Cutkosky, podemos substituir os propagadores dos bósons de gauge por:

$$-\frac{i}{k^2 + i\epsilon} g_{\mu\nu} \rightarrow -i g_{\mu\nu} (-2\pi i) \delta(k^2)$$

$$\sim \frac{1}{2} (iM^{\mu\nu}) g_{\rho\mu} g_{\nu\sigma} (iM^{\rho\sigma})$$

Definindo:

$$k^\nu = (k^0, \vec{k}) \iff k^2 = 0$$

$$\epsilon^{+\mu} = \left( \frac{k^0}{\sqrt{2}|\vec{k}|}, \frac{\vec{k}}{\sqrt{2}|\vec{k}|} \right) \text{ paralelo a } k^\mu$$

$$\epsilon^{-\mu} = \left( \frac{k^0}{\sqrt{2}|\vec{k}|}, -\frac{\vec{k}}{\sqrt{2}|\vec{k}|} \right) \text{ paralelo a } (k^0, -\vec{k}^0)$$

Geram o mesmo espaço que  $\epsilon_\mu^{\parallel} = (0, \frac{\vec{k}}{k}$   
 $\epsilon_\mu^{\perp} = (1, 0, 0, 0)$

e junto com as duas polarizações transversas formam uma base para qualquer polarização

$$\epsilon_1^T, \epsilon_2^T$$

$$\epsilon_i^T \cdot \epsilon_j^{*T} = -\delta_{ij} \quad \epsilon^+ \cdot \epsilon_\mu^T = \epsilon^- \cdot \epsilon_\mu^T = 0$$

$$(\epsilon^+)^2 = (\epsilon^-)^2 = 0 \quad \epsilon^+ \cdot \epsilon^- = 1$$

$$g_{\mu\nu} = \epsilon_\mu^- \epsilon_\nu^{+*} + \epsilon_\mu^+ \epsilon_\nu^{-*} - \sum_i \epsilon_{i\mu}^T \epsilon_{i\nu}^{*T}$$

$$M^T = \frac{1}{2} (iM^{\mu\nu}) (\epsilon_\mu^{-*} \epsilon_\nu^+ + \epsilon_\mu^{+*} \epsilon_\nu^- - \sum_i \epsilon_{i\mu}^{*T} \epsilon_{i\nu}^T) \times$$

$$\times (\epsilon_\mu^{-*} \epsilon_\sigma^+ + \epsilon_\mu^{+*} \epsilon_\sigma^- - \sum_i \epsilon_{i\mu}^{*T} \epsilon_{i\sigma}^T) (iM^{\rho\sigma})$$

O que mostramos na 155.2 (somada com a 154.1 é que)

$$i(M_{\mu\nu}^{\mu\nu} + M_c^{\mu\nu}) \epsilon_\rho^{*T}(k_1) k_{2\nu} = 0 \quad \implies iM^{\mu\nu} \epsilon_\mu^{*T}(k_1) \epsilon_\nu^{+*}(k_2) = 0$$

$\hookrightarrow = k_2^2 \epsilon_\nu^{+*}(k_2)$

O mesmo vale para:

$$iM^{\mu\nu} \epsilon_\rho^{*T}(k_1) \epsilon_\nu^{-*}(k_2) = iM^{\mu\nu} \epsilon_\rho^{*T}(k_1) \epsilon_\nu^{\pm*}(k_2) = 0$$

Portanto todos os termos que misturam  $\epsilon_i^T$  com  $\epsilon^{\pm}$  são nulos.

Os termos envolvendo só polarizações transversas não nos interessam no momento, eles são a contribuição física que não nos causa espanto, são os termos abaixo que nos causam problemas:

$$\begin{aligned}
 M^T &= \frac{1}{2} (iM^{\mu\nu}) (\epsilon_{\nu}^{-*} \epsilon_{\rho}^{+} + \epsilon_{\nu}^{+*} \epsilon_{\rho}^{-}) (\epsilon_{\nu}^{-*} \epsilon_{\sigma}^{+} + \epsilon_{\nu}^{+*} \epsilon_{\sigma}^{-}) (iM^{P\sigma}) = \\
 & \quad M^{\mu\nu} \epsilon_{\nu}^{-*} \epsilon_{\nu}^{-*} = M^{\mu\nu} \epsilon_{\nu}^{+*} \epsilon_{\nu}^{+*} = 0 \quad (\text{cheque se quiser, mas é só algebra}) \\
 &= \frac{1}{2} iM^{\mu\nu} (\epsilon_{\nu}^{-*} \epsilon_{\rho}^{+} \epsilon_{\nu}^{+*} \epsilon_{\sigma}^{-} + \epsilon_{\nu}^{+*} \epsilon_{\rho}^{-} \epsilon_{\nu}^{-*} \epsilon_{\sigma}^{+}) iM^{P\sigma} = \\
 &= \frac{1}{2} (iM^{\mu\nu} \epsilon_{\nu}^{-*} \epsilon_{\nu}^{+*}) (iM^{P\sigma} \epsilon_{\rho}^{+} \epsilon_{\sigma}^{-}) + \frac{1}{2} (iM^{\mu\nu} \epsilon_{\nu}^{+*} \epsilon_{\nu}^{-*}) (iM^{P\sigma} \epsilon_{\rho}^{-} \epsilon_{\sigma}^{+})
 \end{aligned}$$

$$iM^{\mu\nu} \epsilon_{\nu}^{-*}(k_1) \epsilon_{\nu}^{+*}(k_2) = i \left( M_{a,b}^{\mu\nu} + M_c^{\mu\nu} \right) \epsilon_{\nu}^{-*}(k_1) \frac{k_{2\nu}}{\sqrt{2}|k_{2\perp}|} =$$

(eq 154.1)

$$\begin{aligned}
 &= -\gamma^2 \bar{v}(P_+) \gamma^{\nu} u(P) \epsilon_{\nu}^{-*}(k_1) f^{abc} \epsilon^c \frac{1}{\sqrt{2}|k_{2\perp}|} + \\
 &+ \gamma^2 \bar{v}(P) \gamma_{\rho} \epsilon^{\rho} u(P) \left( \frac{1}{k_3^2} \right) \epsilon_{\nu}^{-*}(k_1) f^{abc} \left[ k_1^{\mu} k_1^{\rho} - k_3^{\mu} k_3^{\rho} - g^{\mu\rho} (k_1^2 - k_3^2) \right] \frac{1}{\sqrt{2}|k_{2\perp}|} =
 \end{aligned}$$

pag 155

estes termos sobrevivem agora  
 este termo cancela com a linha de cima

$$iM^{\mu\nu} \epsilon_{\nu}^{-*}(k_1) \epsilon_{\nu}^{+*}(k_2) = \gamma^2 \bar{v}(P) \gamma_{\rho} \epsilon^{\rho} u(P) \left( \frac{1}{k_3^2} \right) \epsilon_{\nu}^{-*}(k_1) k_1^{\mu} k_1^{\rho} \frac{1}{\sqrt{2}|k_{2\perp}|}$$

$$k_1^{\mu} = \epsilon^{\mu+*}(k_1) \sqrt{2}|k_{1\perp}|$$

$$iM^{\mu\nu} \epsilon_{\nu}^{-*}(k_1) \epsilon_{\nu}^{+*}(k_2) = \gamma^2 \bar{v}(P) \gamma_{\rho} \epsilon^{\rho} u(P) \left( \frac{1}{k_3^2} \right) f^{abc} k_1^{\rho} \frac{|k_{1\perp}|}{|k_{2\perp}|}$$

A conta para  $iM^{1P\sigma} \in_P^+(k_1) \in_\sigma^-(k_2)$  é analoga, e os termos que trocamos + por - equivalem a uma troca de  $k_1$  por  $k_2$ , obtemos então:

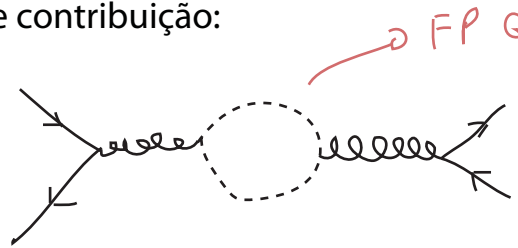
$$M^T = \frac{1}{2} \left( \int \bar{\psi}(P_+) \gamma_\nu t^c u(P) \left( \frac{1}{k_3^2} \right) \rho^{abc} k_1^\mu \left( \frac{k_1}{|k_1|} \right) \right) \left( \int \bar{u}(P') \gamma_\nu t^d v(P') \left( \frac{1}{k_3^2} \right) \rho^{abc} (-k_2^\mu) \left( \frac{k_2}{|k_2|} \right) \right) + (k_1 \leftrightarrow k_2)$$

De fato:  $\bar{\psi}(P_+) \gamma_\nu k_3^\nu u(P) = 0$  (pg 155)

logo:  $\bar{\psi}(P_+) \gamma_\nu (k_1 + k_2)^\nu u(P) = 0 \Rightarrow \bar{\psi}(P_+) \cancel{k_1} u(P) = -\bar{\psi}(P_+) \cancel{k_2} u(P)$   
 este termo é igual ao primeiro ( $k_3^2 = (k_1 + k_2)^2$ )

$$M^T = \left( \int \bar{\psi}(P_+) \gamma_\nu t^c u(P) \left( \frac{1}{k_3^2} \right) \rho^{abc} k_1^\mu \right) \left( \int \bar{u}(P') \gamma_\nu t^d v(P') \left( \frac{1}{k_3^2} \right) \rho^{abc} (-k_2^\mu) \right) \quad (\text{eq. 158.1})$$

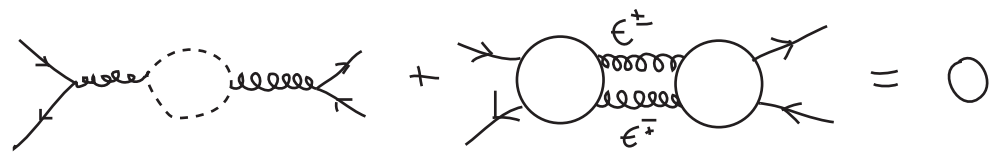
Esta expressão mede a contribuição dos estados com a polarização não física para o espalhamento elétron-pósitron. O ponto chave que queremos notar é que este espalhamento também recebe a seguinte contribuição:



Que também pode ser calculado usando o teorema óptico:

$$\Rightarrow iM_{GH} = i \int \bar{\psi}(P_+) \gamma^\nu t^c u(P) \frac{-i g^{\mu\nu}}{k_3^2} \rho^{abc} k_1^\mu$$

que é igual ao primeiro fator de 158.1. De fato o segundo fator vai ser obtido pelo diagrama com os Ghosts no estado inicial e os férmions no final. No entanto quando combinamos as duas partes é preciso incluir um fator -1, porque os Ghosts tem estatística de Fermi. Isto significa que o loop de Ghosts cancela exatamente a contribuição das polarizações não físicas do Bóson de Gauge:



Este exemplo nos indica que os Ghosts agem como graus de liberdade "negativos" e sua única função é cancelar as polarizações não físicas dos bósons de Gauge.

Este cancelamento nos loops deve estar ligado ao mesmo tipo de cancelamento nas pernas externas, fazendo com que não seja possível observar nem Ghosts nem bósons de gauge com a polarização indesejada. Isto não fica claro no que fizemos acima, de fato nem fica claro que o cancelamento acontece em qualquer diagrama. Para melhorar isto precisamos explorar uma simetria menos óbvia da Lagrangiana:

### A simetria BRST

(Weinberg 15.7, Ashok Das [Finite Temperature Field Theory] 4.2, Peskin 16.4, Ryder 7.5)

Após a fixação de Gauge ficamos com a seguinte Lagrangiana efetiva (eq. 150.1):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\vec{F}_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\nu A_\nu^a)^2 + \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi + \bar{c}_a (-\partial^\nu \vec{D}_\nu^{ac}) c_c$$

Lembrando que:

$$Z[\text{Fontes}] = \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{Fontes}})}$$

Note que podemos escrever o termo advindo de  $-\frac{1}{2\xi} (\partial^\nu A_\nu^a)^2$  na forma:

$$e^{i \int d^4x \left[ -\frac{1}{2\xi} (\partial^\nu A_\nu^a)^2 \right]} = \int \mathcal{D}B e^{i \int d^4x \left[ \frac{\xi}{2} (B^a)^2 + B^a (\partial_\nu A_\nu^a) \right]}$$

O campo  $B^a(x)$ , assim introduzido, não tem termo cinético e portanto não tem dinâmica alguma e é chamado de **campo auxiliar**. Podemos fazer a integral funcional neste campo e desaparecer com ele da teoria. De fato:

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}B e^{i \int d^4x \left[ \frac{\xi}{2} (B^a)^2 + B^a (\partial_\nu A_\nu^a) - \frac{1}{2\xi} (\partial^\nu A_\nu^a)^2 + \frac{1}{2\xi} (\partial^\nu A_\nu^a)^2 \right]} = \\ & (\xi B^a + \partial^\nu A_\nu^a) (\xi B^a + \partial^\nu A_\nu^a) = \xi^2 (B^a)^2 + 2\xi (\partial^\nu A_\nu^a) B^a + (\partial^\nu A_\nu^a)^2 \\ & = e^{i \int d^4x \left[ -\frac{1}{2\xi} (\partial^\nu A_\nu^a)^2 \right]} \int \mathcal{D}B e^{i \int d^4x \frac{1}{2\xi} [\xi B^a + \partial^\nu A_\nu^a]^2} = \\ & \qquad \qquad \qquad B'^a = \xi B^a + \partial^\nu A_\nu^a \quad \mathcal{D}B' = \xi \mathcal{D}B \\ & = e^{i \int d^4x \left[ -\frac{1}{2\xi} (\partial^\nu A_\nu^a)^2 \right]} \int \xi \mathcal{D}B e^{i \int d^4x \frac{1}{2\xi} [B'^a]^2} \end{aligned}$$

que é só um número que pode ser absorvido na normalização de Z

Obtemos enfim:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\vec{F}_{\mu\nu})^2 + \frac{\xi}{2} (B^a)^2 + B^a (\partial_\nu A_\nu^a) + \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi + \bar{c}_a (-\partial^\nu \vec{D}_\nu^{ac}) c_c$$

Consideremos uma transformação infinitesimal que age sobre todos os campos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \delta A_\mu^a &= \epsilon D_\mu^{ac} c^c & (d) \quad \delta \bar{c}^a &= \epsilon B^a \\
 (b) \quad \delta \psi &= i g \epsilon c^a t^a \psi & (e) \quad \delta B &= 0 \\
 (c) \quad \delta c^a &= -\frac{1}{2} g \epsilon f^{abc} c^b c^c
 \end{aligned}$$

(eq. 160.1)

Transformação BRST (Becchi, Rouet, Stora, Tyutin)

Onde  $\epsilon$ , o parâmetro infinitesimal da transformação, é um número de Grassmann. As transformações de  $A$  e  $\psi$ , não passam de transformações de Gauge com parâmetro:

$$\begin{aligned}
 \alpha^a(x) &= g \epsilon c^a(x) \\
 A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a + \frac{1}{g} \left( \delta^{ac} \partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^b \right) \overbrace{g t^c(x)}^{\alpha^c(x)} \\
 \psi &\rightarrow (1 + i g \epsilon c^a(x) t^a) \psi
 \end{aligned}$$

este produto de dois Grassmann é um c-number

Note, no entanto, que a Lagrangeana 159.1 **não é invariante de Gauge** (uma vez que temos um termo de fixação de Gauge). Outra observação importante é que a transformação dos campos físicos é proporcional ao Ghost  $c^a$  (e não o anti-ghost), mas que o parâmetro infinitesimal da BRST é  $\epsilon$ , e portanto **estas transformações são globais** ( $\epsilon$  não é função de  $x$ ). Temos total liberdade para definir como os outros campos se transformam (e, do ponto de vista do formalismo de integral de trajetória, o campo do Ghost e do anti-ghost são completamente independentes) e o objetivo das definições 160.1 (c), (d) e (e) ficará claro em seguida.

Vejamos o que acontece com a Lagrangeana 159.1:

$$\left. \begin{aligned}
 &-\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 \\
 &\bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi
 \end{aligned} \right\} \text{trivialmente invariantes, já que se trata de uma transformação de Gauge para estes}$$

$$\delta \left[ \frac{\xi}{2} (B^a)^2 \right] = 0 \quad (B \text{ não se transforma})$$

$$\delta \left[ \bar{c}_a (-\partial^\nu D_\nu^{ac}) c_c \right] = ? \Rightarrow D_\nu^{ac} c^c \rightarrow \left[ \delta^{ac} \partial_\nu + g f^{abc} (A_\nu^b + \delta A_\nu^b) \right] [c^c + \delta c^c]$$



$$\delta [D_\nu^{ac} c^c] = \left[ S^{ac} d_\nu + g f^{abc} A_\nu^b \right] \delta c^c + g f^{abc} \delta A_\nu^b c^c =$$

$$= \left[ S^{ac} d_\nu + g f^{abc} A_\nu^b \right] \left( -\frac{1}{2} g f^{cde} d_\nu c^e \right) + g f^{abc} \left( D_\nu^b c^d \right) c^c =$$

$$= -\frac{1}{2} g f^{ade} d_\nu (c^d c^e) - \frac{1}{2} g^2 f^{abc} f^{cde} A_\nu^b c^d c^e +$$

$$+ g f^{abc} \left( S^{bd} (d_\nu c^d) \right) c^c + g f^{abc} \left( g f^{bed} A_\nu^e \right) c^d c^c =$$

$$\left. \begin{aligned} & f^{ade} (d_\nu c^d) c^e + f^{ade} c^d (d_\nu c^e) = f^{ade} d_\nu (c^d c^e) \\ & f^{aed} (d_\nu c^e) c^d = (-f^{ade}) (-c^d (d_\nu c^e)) = f^{ade} c^d (d_\nu c^e) \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} & f^{ade} (d_\nu c^d) c^e = \frac{1}{2} f^{ade} d_\nu (c^d c^e) \\ & \text{o primeiro e o terceiro termos (proporcionais a } \frac{1}{2} g \text{)} \\ & \text{se cancelam} \end{aligned} \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} g^2 f^{abc} f^{cde} A_\nu^b c^d c^e + g^2 f^{abc} f^{bed} A_\nu^e c^d c^c =$$

$e \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow d, d \rightarrow e$

$$f^{acd} f^{cbe} A_\nu^b c^e c^d = -\frac{1}{2} f^{adc} f^{cbe} A_\nu^b c^e c^d - \frac{1}{2} f^{adc} f^{cbe} A_\nu^b c^e c^d =$$

$$= -\frac{1}{2} f^{aec} f^{cbe} A_\nu^b c^d c^e - \frac{1}{2} f^{adc} f^{ceb} A_\nu^b c^d c^e$$

cíclico em "bde"

$$= -\frac{1}{2} g^2 \left[ f^{abc} f^{cde} + f^{aec} f^{cbe} + f^{adc} f^{ceb} \right] A_\nu^b c^d c^e = 0$$

○ identidade de Jacobi

$$\delta \left[ \bar{c}_a (-d^\nu D_\nu^{ac}) c_c \right] = -\delta \bar{c}_a d^\nu (D_\nu^{ac} c_c) - \bar{c}_a d_\nu \delta [D_\nu^{ac} c^c] = -\epsilon B^a d^\nu (D_\nu^{ac} c_c)$$

Finalmente:

$$\delta [B^a (\partial_\mu A_\mu^a)] = B^a \partial_\mu (\delta A_\mu^a) = \epsilon B^a \partial_\mu (D_\mu^{ac} c^c)$$

De forma que:

$$\delta \left[ \bar{c}_a (-\partial^\mu D_\mu^{ac}) c_c \right] + \delta [B^a (\partial_\mu A_\mu^a)] = 0$$

Vemos que a Lagrangeana, após a fixação de Gauge (e para qualquer fixação  $\xi$ ), é invariante por transformação BRST (global). Além disso temos mais duas simetrias globais sobre as quais a Lagrangeana é invariante:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= \bar{c}^a D_\mu^{ac} c^c & \delta B^a &= -\bar{c}^a f^{abc} B^b c^c \\ \delta c^a &= \bar{c}^a (-B^a - g f^{abc} c^b c^c) & \delta \psi &= i g \bar{c}^a t^a \psi \\ \delta \bar{c}^a &= -\frac{\bar{c}^a}{2} f^{abc} \bar{c}^b c^c \end{aligned}$$

(eq. 162.1)

Transformação anti-BRST

e também:

$$\begin{aligned} \delta c^a &= \theta c^a \\ \delta \bar{c}^a &= -\theta \bar{c}^a \end{aligned}$$

(eq. 162.2)

(leva a conservação do número de Ghosts)

(essa transformação é uma transformação de escala, ao invés de uma fase, por conta do tipo de hermicidade exigida para os campos de Ghost)

Definamos  $s\phi$  como a transformação BRST infinitesimal do campo  $\phi$ , eg:

$$\delta\phi = \epsilon s\phi \Rightarrow \begin{cases} sA^a = D_\mu^{ac} c^c \\ s\psi = i g c^a t^a \psi \end{cases}$$

Esta transformação está ligada ao gerador Q das transformações BRST:

$$| \rangle \rightarrow | \rangle' = e^{i\epsilon Q} | \rangle \approx | \rangle + i\epsilon Q | \rangle \quad \delta | \rangle = i\epsilon Q | \rangle$$

$$\begin{aligned} \psi_\pm \rightarrow \psi_\pm' &= e^{i\epsilon Q} \psi_\pm e^{-i\epsilon Q} \sim (1 + i\epsilon Q) \psi_\pm (1 - i\epsilon Q) = \\ &= 1 + i\epsilon Q \psi_\pm - i \underbrace{\psi_\pm \epsilon Q}_{\pm \in \psi_\pm} + \dots = \psi_\pm + i\epsilon \underbrace{[Q, \psi_\pm]}_{\delta\psi} \end{aligned}$$

+ → # campos fermiônicos par ou zero  
- → # campos fermiônicos ímpar

Logo:

$$\delta \phi_{\pm} = i \in [Q, \phi_{\pm}]_{\mp} = \in s \phi_{\pm} \Rightarrow s \phi_{\pm} = i [Q, \phi_{\pm}]_{\mp}$$

Temos que:  $\delta(s\phi) = \in s(s\phi) = 0 \quad \forall \in$

$$s s \phi = 0 \quad (\text{eq. 163.1})$$

Isto pode ser provado para cada um dos campos (ou produto de campos) [Weinberg vol 2, pgs 29-31], no caso do campo A:

$$s A^{\mu} = D_N^{\mu \nu} C^{\nu}$$

$\in s [s A^{\mu}] = \in s [D_N^{\mu \nu} C^{\nu}] \Rightarrow s s A^{\mu} = 0$  (conforme mostrado na pg 161)

e então:  $s s \phi_{\pm} = 0 \Rightarrow i [Q, s \phi_{\pm}]_{\pm} = 0$

notando que a transformação de um campo bosônico é fermiônico e vice versa (veja 160.1)

$$[Q, i [Q, \phi_{\pm}]_{\mp}]_{\pm} = 0 \Rightarrow [Q^2, \phi_{\pm}]_{\pm} = 0 \quad (\text{eq. 163.2})$$

$$[Q, [Q, \phi_{\pm}]_{\mp}]_{\pm} = Q [Q, \phi_{\pm}]_{\mp} \pm [Q, \phi_{\pm}]_{\mp} Q = Q(Q\phi_{\pm} \mp Q\phi_{\pm}) \pm (Q\phi_{\pm} \mp \phi_{\pm}Q)Q =$$

$$= Q^2\phi_{\pm} \mp Q\phi_{\pm}Q \pm Q\phi_{\pm}Q - \phi_{\pm}Q^2 = [Q^2, \phi_{\pm}]_{\pm}$$

$$[Q, c^{\pm}]_{\pm} = -\frac{1}{2} \int \eta^{ab} c^{\pm} c^{\pm}$$

$$Qc^{\pm} + c^{\pm}Q = -\frac{1}{2} \int \eta^{ab} c^{\pm} c^{\pm}$$

(GHOST NUMBER = 2)

Isto implica que  $Q^2 = 0$  ou  $Q^2$  é proporcional a identidade.  $Q^2$  não pode ser proporcional a  $\hat{1}$  pois a ação de  $Q$  muda o número de campos de Ghost (sempre na mesma direção), então:

$$Q^2 = 0 \quad (\text{operador nilpotente})$$

Esta simetria global leva a uma carga conservada que é dada justamente por este operador  $Q$ :

$$[Q, H] = 0$$

O que queremos agora é usar esta simetria para selecionar, dentre todos os graus de liberdade extra que foram introduzidos na teoria (pela fixação de gauge), aqueles que identificaremos com os estados físicos. É preciso garantir, especialmente, que os estados selecionados não são levados nos não-físicos pela evolução temporal do sistema. Dois operadores que comutam com a hamiltoniana, pois são geradores de transformações contínuas do sistema, são justamente o  $Q$  definido acima e também  $Q_c$ , que gera a transformação 162.2. Com isso em mente, definimos os estados físicos:

$$Q | \text{PHYS} \rangle = 0 \quad Q_c | \text{PHYS} \rangle = 0$$

Notemos então que:

$$\begin{aligned} S\left(\bar{c}_a(\partial^\mu A_\mu^a) + \frac{\xi}{2} \bar{c}_a B^a\right) &= \epsilon B^a(\partial^\mu A_\mu^a) + \bar{c}_a(\epsilon \partial^\mu D_\mu^{ac} c^c) + \frac{\xi}{2} \epsilon B^a B^a = \\ &= \epsilon \left[ B^a(\partial^\mu A_\mu^a) - \bar{c}_a(\partial^\mu D_\mu^{ac} c^c) + \frac{\xi}{2} B^a B^a \right] \\ S\left(\bar{c}_a(\partial^\mu A_\mu^a) + \frac{\xi}{2} \bar{c}_a B^a\right) &= B^a(\partial^\mu A_\mu^a) - \bar{c}_a(\partial^\mu D_\mu^{ac} c^c) + \frac{\xi}{2} (B^a)^2 = \mathcal{L}_{\text{GF+FB}} \end{aligned}$$

que são justamente os termos que adicionamos na Lagrangeana para fixar o Gauge (compare isto com a equação 159.1). Logo:

$$\langle \text{PHYS} | \mathcal{L}_{\text{GF+FB}} | \text{PHYS} \rangle = \langle \text{PHYS} | \underbrace{S\left(\bar{c}_a(\partial^\mu A_\mu^a) + \frac{\xi}{2} \bar{c}_a B^a\right)}_{\Psi} | \text{PHYS} \rangle = 0$$

mostrando que este novo pedaço da Lagrangeana não contribue em nada para espalhamento entre estados físicos.

Adicionalmente, é natural exigir que elementos de matriz entre estados físicos sejam independentes da escolha para a fixação de gauge. Nossa lagrangeana pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = \underbrace{\mathcal{L}_{\text{GI}}}_{\text{"gauge invariant" (pedaço sem fixação de Gauge)}} + s\Psi$$

Se definirmos  $\tilde{\delta}$  como a variação obtida por mudar o termo de fixação:

$$\Psi \rightarrow \Psi + \tilde{\delta}\Psi$$

$$\text{então: } \tilde{\delta} \langle \alpha | \beta \rangle = i \langle \alpha | \tilde{\delta} \mathcal{L} | \beta \rangle \stackrel{\tilde{\delta} \mathcal{L}_{\text{GI}} = 0}{=} i \langle \alpha | \tilde{\delta} s\Psi | \beta \rangle = - \langle \alpha | [Q, \tilde{\delta}\Psi]_{\mp} | \beta \rangle$$

$$\text{exigir que } \tilde{\delta} \langle \alpha | \beta \rangle = 0 \text{ implica: } \langle \alpha | Q = Q | \beta \rangle = 0$$

O que nos diz que somente estados no núcleo de Q podem aparecer em elementos de matriz que sejam independentes da fixação de gauge. Ainda mais, considere estados do tipo:

$$\begin{aligned} |\alpha_2\rangle &= |\alpha_1\rangle + Q|\alpha\rangle \quad \text{está na imagem de } Q \\ \langle \beta | \alpha_1 \rangle &= \langle \beta | \alpha_2 \rangle \quad \forall \langle \beta | \\ &\quad \text{fisicamente equivalentes} \end{aligned}$$

Por isso os estados físicos independentes pertencem ao núcleo de Q módulo sua Imagem (a [cohomologia de Q](#))

É possível mostrar (veja Weinberg vol 2, pgs 33-34, para o caso simplificado da QED) que os Ghosts pode ser escritos na forma:

$$|C\rangle = Q|\alpha\rangle$$

E portanto são equivalentes a zero (podem ser removidos da teoria com escolha certa de gauge)

### Identidades de Slavnov-Taylor

(Ryder 7.6)

A partir da lagrangeana 159.1, podemos voltar para a 150.1 usando as equações de movimento para o campo  $B^a$  (deixando os férmions de lado):

(eq. 159.1)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\vec{F}_{\mu\nu})^2 + \frac{\xi}{2} (B^a)^2 + B^a (\partial^\nu A_\nu^a) + \bar{c}_a (-\partial^\nu D_\nu^{ac}) c_c$$

$$\partial_\mu \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu B^a)} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta B^a} = 0 \Rightarrow -\xi B^a - \partial^\nu A_\nu^a = 0 \Rightarrow B^a = -\frac{1}{\xi} \partial^\nu A_\nu^a$$

(eq. 150.1)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\vec{F}_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\nu A_\nu^a)^2 + \bar{c}_a (-\partial^\nu D_\nu^{ac}) c_c$$

Neste caso a transformação BRST do anti-ghost fica:

$$\delta \bar{c}^a = -\frac{\epsilon}{\xi} \partial^\nu A_\nu^a$$

(eq. 165.1)

$$\delta B^a = \delta \left( -\frac{1}{\xi} \partial^\nu A_\nu^a \right) = 0$$

(eq. 165.2)

Para esta Lagrangeana, escrevemos o funcional gerador:

$$\mathbb{Z}[S, \chi, \eta, u, v] = \int DA DC D\bar{c} e^{i \int d_{TOT} dx}$$

$$\mathcal{L}_{TOT} = \mathcal{L} + S_\mu^a A^{\mu a} + \chi^a c^a + \eta^a \bar{c}^a + u_\mu^a (\partial^\mu c^a) + v^a \left( -\frac{1}{2} g f^{abc} c^b c^c \right)$$

(eq. 165.2)

$\chi, \eta, u$  ← anticomutam

$S, v$  ← comutam

note que colocamos duas fontes a mais do que o "necessário" logo ficará claro porque queremos fazer isto

$$\delta (\partial^\mu c^a) = \delta (D^{\mu ab} c^b) = 0 \quad \text{pg. 161}$$

$$\begin{aligned}
\delta(\rho^{abc} c^b c^c) &= \rho^{abc} (\delta c^b) c^c + c^b (\delta c^c) = \\
&= -\frac{1}{2} g \left[ \epsilon \rho^{abc} \rho^{bde} c^d c^e c^c + \rho^{abc} \rho^{cde} c^b \epsilon c^d c^e \right] = \\
&= +g \epsilon \rho^{abc} \rho^{cde} c^d c^e c^b = \\
&= \frac{1}{3} g \epsilon \left[ \rho^{abc} \rho^{cde} + \rho^{aec} \rho^{cbd} + \rho^{adc} \rho^{ceb} \right] c^d c^e c^b = 0
\end{aligned}$$

$$\delta(\delta c) = \delta(\rho^{abc} c^b c^c) = 0$$

A jacobiano da transformação BRST é dado por:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J} \left( \frac{A_\nu^a(x) + \delta A_\nu^a(x), c^a(x) + \delta c^a(x), \bar{c}^a(x) + \delta \bar{c}^a(x)}{A_\nu^b(y), c^b(y), \bar{c}^b(y)} \right)$$

e queremos mostrar que ele é a unidade. Os únicos elementos diferentes de zero são:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta[A_\nu^a(x) + \delta A_\nu^a(x)]}{\delta A_\nu^b(y)} &= \delta_\nu^a \delta^b(x-y) \delta^{ab} + \frac{\delta}{\delta A_\nu^b(y)} \left[ \epsilon D_\nu^{ac} c^c \right] = \\
&= \delta_\nu^a \delta^b(x-y) \left[ \delta^{ab} + \epsilon g \rho^{abc} c^c \right]
\end{aligned}$$

$\delta^{ac} \delta_\mu^c + g \rho^{abc} A_\mu^b$

$$\frac{\delta[A_\nu^a(x) + \delta A_\nu^a(x)]}{\delta c^b(y)} = \frac{\delta}{\delta c^b(y)} \left[ \epsilon D_\nu^{ac} c^c \right] = -\epsilon D_\nu^{ab} \delta^b(x-y)$$

$$\frac{\delta[c^a(x) + \delta c^a(x)]}{\delta c^b(y)} = \delta^{ab} \delta^a(x-y) + \frac{\delta}{\delta c^b(y)} \left[ -\frac{1}{2} g \epsilon \rho^{abc} c^b c^c \right] =$$

$$= \int^{a,b} \delta^4(x-y) + \frac{1}{2} g \in \rho^{a,b,c} \frac{d}{dC^b(y)} (c^b(x) c^c(x)) =$$

$$\delta^4(x-y) \left[ \delta^{a,b} c^c(x) - c^b(x) \delta^{b,c} \right]$$

$$= \delta^4(x-y) \left[ \delta^{a,b} + g \in \rho^{a,b,c} c^c(x) \right]$$

$$\frac{[\bar{c}^a(x) + \delta \bar{c}^a(x)]}{\delta A_\nu^b(y)} = -\frac{\epsilon}{\xi} \frac{d}{\delta A_\nu^b(y)} \left( \int d^4x A_\nu^a \right) = -\frac{\epsilon}{\xi} \delta_\nu^a \int d^4x \delta^4(x-y)$$

$$\frac{[\bar{c}^a(x) + \delta \bar{c}^a(x)]}{\delta \bar{c}^b(y)} = \delta^{a,b} \delta^4(x-y)$$

elemento ab de uma matriz n x n (n é o # geradores do grupo)

$$J = \begin{vmatrix} \left( \delta_\nu^a \delta^4(x-y) \left[ \delta^{a,b} + \epsilon g \rho^{a,b,c} c^c \right] \right)_{n \times n} & \left( -\epsilon D_\nu^{a,b} \delta^4(x-y) \right)_{n \times n} & 0 \\ 0 & \left( \delta^4(x-y) \left[ \delta^{a,b} + g \in \rho^{a,b,c} c^c(x) \right] \right)_{n \times n} & 0 \\ \left( -\frac{\epsilon}{\xi} \delta_\nu^a \int d^4x \delta^4(x-y) \right)_{n \times n} & 0 & \left( \delta^{a,b} \delta^4(x-y) \right)_{n \times n} \end{vmatrix}$$

só a diagonal das matrizes n x n vai contribuir  $\leftarrow$   $\epsilon^2 = 0$

$$J = \left( \delta_\nu^a \right)^n \left( \delta^4(x-y) \right)^{3n} = \hat{1} \quad (\text{eq. 167.1})$$

Podemos então fazer a transformação BRST no funcional gerador para obter (a medida de integração é invariante):

$$\mathcal{Z}[S, \kappa, \eta, u, v] = \int DA Dc D\bar{c} e^{i \int d^4x (S_{TOT} + S_\nu^a \delta A_\nu^a + \kappa^a \delta c^a + \eta^a \delta \bar{c}^a)} d\mu =$$

$$\simeq \int DA Dc D\bar{c} \left[ 1 + i \int d^4x (S_\nu^a \delta A_\nu^a + \kappa^a \delta c^a + \eta^a \delta \bar{c}^a) \right] e^{i \int d^4x S_{TOT}}$$

Se exigirmos a invariância BRST do funcional gerador teremos a condição (compare o que faremos a seguir com o que fizemos nas pags 23 a 25):

$$\int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \int d^4x (S_{\mu}^a \delta A^{\mu a} + \kappa^a \delta c^a + \gamma^a \delta \bar{c}^a) e^{i \int \mathcal{L}_{tot} d^4x} = 0$$

note que:

$$S_{\mu}^a \delta A^{\mu a} + \kappa^a \delta c^a + \gamma^a \delta \bar{c}^a = S_{\mu}^a \underbrace{D^{\mu c^a}}_{\text{justamente o que está multiplicando a fonte u na lagrangeana 165.2}} + \kappa^a \underbrace{\left(-\frac{1}{2} g f^{abc} c^b c^c\right)}_{\text{o mesmo para a fonte v}} + \gamma^a \underbrace{\left(-\xi \delta^{\mu\nu} \partial_{\nu} A_{\mu}^a\right)}_{\text{fonte s}}$$

Podemos então trocar estes termos por derivadas nas fontes:

$$\int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \int d^4x \left[ S_{\mu}^a \frac{\delta}{\delta u_{\mu}^a} + \kappa^a \frac{\delta}{\delta v^a} - \frac{1}{\xi} \gamma^a \left( \partial_{\nu} \frac{\delta}{\delta S_{\mu}^a} \right) \right] e^{i \int \mathcal{L}_{tot} d^4x} = 0$$

$$\therefore \int d^4x \left[ S_{\mu}^a \frac{\delta Z}{\delta u_{\mu}^a} + \kappa^a \frac{\delta Z}{\delta v^a} - \frac{1}{\xi} \gamma^a \left( \partial_{\nu} \frac{\delta Z}{\delta S_{\mu}^a} \right) \right] = 0$$

(a vantagem de introduzir u e v foi obter esta equação só com primeiras derivadas, o que não seria o caso usando as fontes usuais)

$$Z = e^{iW} \Rightarrow \int d^4x \left[ S_{\mu}^a \frac{\delta W}{\delta u_{\mu}^a} + \kappa^a \frac{\delta W}{\delta v^a} - \frac{1}{\xi} \gamma^a \left( \partial_{\nu} \frac{\delta W}{\delta S_{\mu}^a} \right) \right] = 0 \quad (\text{eq. 168.1})$$

Assim com fizemos na pg 24, queremos uma equação para as funções geradoras dos vértices  $\Gamma$  conseguimos isso fazendo a transformada de Legendre:

$$W[S, \kappa, \gamma; u, v] = \Gamma[A_{\mu}^a, c_a, \bar{c}_a; u, v] + \int d^4x (S_{\mu}^a A_{\mu}^a + \kappa^a c_a + \gamma^a \bar{c}_a)$$

↳ não transformamos estes

$$S_{\mu}^a = - \frac{\delta \Gamma}{\delta A_{\mu}^a} \quad ; \quad \kappa^a = \frac{\delta \Gamma}{\delta c_a} \quad ; \quad \gamma^a = \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{c}_a}$$

$$\frac{\delta W}{\delta S_{\mu}^a} = A_{\mu}^a \quad ; \quad \frac{\delta W}{\delta u} = \frac{\delta \Gamma}{\delta u} \quad ; \quad \frac{\delta W}{\delta v} = \frac{\delta \Gamma}{\delta v}$$

A equação 168.1 agora fica:



$$\int d^4x \left[ -\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\alpha^{\nu a}} \frac{\delta \Gamma}{\delta u_\mu^{\nu a}} + \frac{\delta \Gamma}{\delta c_\alpha^{\nu a}} \frac{\delta \Gamma}{\delta v^{\nu a}} - \frac{1}{\xi} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{c}_\alpha^{\nu a}} (\partial_\nu A_\alpha^{\nu a}) \right] = 0 \quad (\text{eq. 169.1})$$

É possível simplificar ainda mais esta equação notando que:

$\bar{c}^a \rightarrow \bar{c}^a + \delta \bar{c}^a \Rightarrow D\bar{c} = D\bar{c}$

mudança de variáveis na integral de Z

$$\mathcal{L}_{TOT} \rightarrow \mathcal{L}_{TOT} + \delta \bar{c}_\alpha (-\partial^\nu D_\nu^{\alpha c}) c_c + \gamma^a \delta \bar{c}_\alpha =$$

$$\mathcal{L}_{TOT} = \dots + \bar{c}_\alpha (-\partial^\nu D_\nu^{\alpha c}) c_c + \gamma^a \bar{c}^a + \dots$$

$$= \mathcal{L}_{TOT} - \delta \bar{c}_\alpha \left[ \partial^\nu D_\nu^{\alpha c} c_c + \gamma^a \right]$$

não deve alterar Z (expandindo em  $\delta \bar{c}_\alpha$ )

$$\int DA DC D\bar{c} i \int d^4x (-\delta \bar{c}_\alpha) \left[ \partial^\nu D_\nu^{\alpha c} c_c + \gamma^a \right] e^{i \int \mathcal{L}_{TOT} d^4x} = 0$$

$-i \frac{\delta}{\delta u^{\nu a}}$

$$(\delta \bar{c}_\alpha) \left[ -i \partial^\nu \frac{\delta}{\delta u^{\nu a}} + \gamma^a \right] e^{iW} = 0 \Rightarrow \partial^\nu \frac{\delta W}{\delta u^{\nu a}} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{c}_\alpha^{\nu a}} = 0$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{c}_\alpha^{\nu a}} = -\partial^\nu \frac{\delta \Gamma}{\delta u^{\nu a}} \quad (\text{eq. 169.2})$$

de forma que 169.1 agora fica:

$$\int d^4x \left[ -\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\alpha^{\nu a}} \frac{\delta \Gamma}{\delta u_\mu^{\nu a}} + \frac{\delta \Gamma}{\delta c_\alpha^{\nu a}} \frac{\delta \Gamma}{\delta v^{\nu a}} + \frac{1}{\xi} \left( \partial^\nu \frac{\delta \Gamma}{\delta u^{\nu a}} \right) (\partial_\nu A_\alpha^{\nu a}) \right] = 0$$

$(-)$       partes

$$\int d^4x \left\{ \frac{\delta \Gamma}{\delta u_\nu^{\nu a}} \left[ -\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\alpha^{\nu a}} - \frac{1}{\xi} (\partial_\nu \partial_\nu A_\alpha^{\nu a}) \right] - \frac{\delta \Gamma}{\delta v^{\nu a}} \frac{\delta \Gamma}{\delta c_\alpha^{\nu a}} \right\} = 0$$

$$\Gamma' = \Gamma - \frac{1}{2\xi} \int d^4x (\partial^\nu A_\nu^{\nu a})^2$$

$$\int d^4x \left[ \frac{\delta \Gamma'}{\delta u_\nu^{\nu a}} \frac{\delta \Gamma'}{\delta A_\alpha^{\nu a}} - \frac{\delta \Gamma'}{\delta v^{\nu a}} \frac{\delta \Gamma'}{\delta c_\alpha^{\nu a}} \right] = 0$$

(eq. 169.3)  
 Identidades de Lee-Zinn-Justin  
 Generalização das Slanov-Taylor

Rigorosamente falando, as identidades de Slavnov-Taylor são relações do tipo:

$$\frac{Z_4}{Z_1} = \frac{Z_1}{Z_3} \quad \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_1}{Z_3}$$

onde os Z's vão aparecer quando fizemos a renormalização da teoria. Veremos que estas relações são necessárias para garantir a renormalizabilidade da teoria (da mesma forma que precisávamos de  $Z_2 = Z_1$  na QED, o que é garantido pelas identidades de W-T, veja página 52). A equação 169.3 nos permite provar as relações de Slavnov-Taylor a todas as ordens em teoria de perturbação, e por isso contém todo o conteúdo físico das identidades S-T.

## Correções radiativas em teorias não-Abelianas

(Peskin 16.5, Ryder 9.8)

Consideremos agora as correções a um loop para teorias não abelianas. Assim como na QED, esperamos que a simetria de Gauge coloque restrições importantes para que tipo de correção pode aparecer e, conseqüentemente, limite o número de divergências. Começemos com as correções ao propagador do próprio bóson de Gauge

### Auto-energia do bóson de Gauge

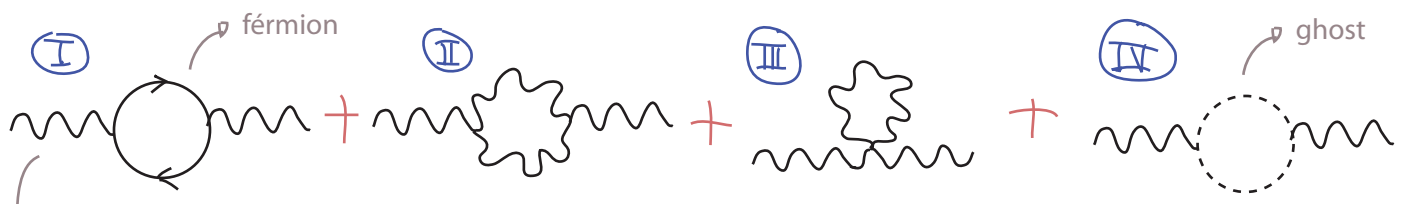
Na QED tínhamos:

$$i^N \left( \text{diagrama de auto-energia} \right) = 0 \iff \text{diagrama de auto-energia} = \sim (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2)$$

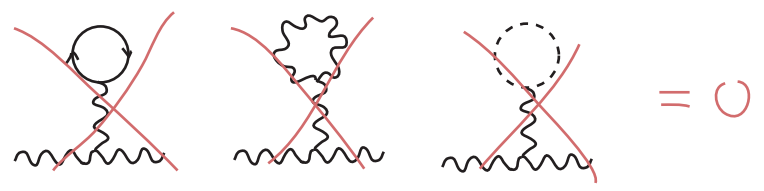
a única divergência possível era logarítmica (veja pg 70)

→ Esta relação continua valendo, portanto a correção deve ter a mesma forma. No entanto vamos calculá-la explicitamente para ver como isto acontece no caso não-Abeliano.

Até ordem  $g^2$ , os diagramas que precisamos calcular são:



uma vez que os tadpoles são zero: (proporcionais ao  $v$  de  $j_{\mu}$ , ver pg 69)



O loop fermiônico (I) é muito parecido com o caso abeliano (pgs 52-60) com a diferença de que agora temos um gerador  $t^a$  em cada vértice (regra de Feynman 152.1, e como é um loop, tomamos o traço):

$$\text{Diagrama} = \text{Tr}[t^a t^b] i (q^\alpha g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \frac{-ig^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(m^2 - x(1-x)q^2)^{2 - \frac{d}{2}}}$$

(compare com 60.1 e 60.2)

(eq. 171.1)

$\delta^{ab} C(\alpha)$

$SU(N)$   
 fundamental:  $C(N) = \frac{1}{2}$   
 adjunta:  $C(G) = N$

$$\left( \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \sim \frac{2}{\epsilon} + \dots \right) \times \left( \frac{1}{\Delta^{2 - \frac{d}{2}}} \sim \frac{1 - \frac{1}{2} \epsilon \ln(\Delta) + \dots}{\Delta^2} \right) \times \left( \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \sim \frac{1}{4\pi^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right)$$

parte divergente vem daqui

$$\text{Diagrama} \sim \delta^{ab} C(\alpha) i (q^\alpha g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \frac{-ig^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \Gamma(2 - \frac{d}{2})$$

Note que temos um diagrama deste tipo para cada férmion na teoria que interaja com o campo de gauge. Assumindo que temos  $n_f$  férmions, todos se transformando na mesma representação a contribuição total para a parte divergente será:

$$\sum_{n_f} (\text{Diagrama}) = i (q^\alpha g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \delta^{ab} \left[ \frac{-g^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} n_f C(\alpha) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) + \dots \right]$$

(eq. 171.2)

Ok! O bóson não ganha massa daqui. A divergência é Log.

Usando 151.2 e 152.2 (faremos esta conta no Gauge de Feynman-'t Hooft,  $\xi = 1$ ), calculamos o diagrama (II):

$$\text{Diagrama II} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{-i}{p^2} \frac{-i}{(p+q)^2} g^2 p^{acd} p^{bcd} N^{\mu\nu}$$

$\rightarrow$  simetria

$= C_2(G) \delta^{ab}$

$SU(N)$   
 $C_2(G) = C(G) = N$

Onde:

$$N^{\mu\nu} = [g^{\mu\rho} (q-p)^\sigma + g^{\rho\sigma} (p - (-q-p))^\mu + g^{\sigma\mu} (-q-p-q)^\rho] g_{\sigma\sigma'} g_{\rho\rho'} \times [g^{\nu\rho'} (-q+p)^{\sigma'} + g^{\rho'\sigma'} (-p - (q+p))^\nu + g^{\sigma'\nu} (q+p - (-q))^\rho]$$

Usando o procedimento usual:

$$\frac{1}{p^2} \frac{1}{(p+q)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{(Q^2 - \Delta)^2} \quad \begin{aligned} \ell &= p + xq \\ \Delta &= -x(1-x)q^2 \end{aligned}$$

Álgebra:  $p = \ell - xq$ ;  $\int d^d \ell \ell_\mu = 0$ ;  $\ell^\mu \ell^\nu = g^{\mu\nu} \frac{\ell^2}{d}$

$$N^{\mu\nu} = \underbrace{-g^{\mu\nu} \ell^2}_{\text{blue}} \underbrace{6 \left(1 - \frac{1}{d}\right)}_{\text{green}} - \underbrace{g^{\mu\nu} q^2 \left[ \frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{1}{2}(1+x)^2 \right]}_{\text{green}} + \underbrace{q^\mu q^\nu \left[ (2-d)(1-2x)^2 + 2(1+x)(2-x) \right]}_{\text{red}}$$

Passando então para o espaço euclidiano e fazendo as integrais em  $\int d^d \ell_E$ :

$$\text{Diagram} = \frac{i g^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \left\{ \underbrace{\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2 \left[ \frac{3}{2}(d-1)x(1-x) \right]}_{\text{blue}} + \underbrace{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2 \left[ \frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{1}{2}(1+x)^2 \right]}_{\text{green}} - \underbrace{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) q^\mu q^\nu \left[ (1-\frac{d}{2})(1-2x)^2 + (1+x)(2-x) \right]}_{\text{red}} \right\}$$

(eq. 172.1)

O diagrama (III) é obtido usando a regra 153.1:

$$\begin{aligned} & \text{Diagram} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{-i g_{\rho\alpha}}{p^2} \delta^{cd} (-i g^{\alpha\beta}) \times \\ & \times \left[ \underbrace{f^{abc} f^{cde}}_{\text{green}} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho}) + \underbrace{f^{ace} f^{bde}}_{\text{green}} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho}) + \underbrace{f^{abc} f^{dce}}_{\text{green}} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho}) \right] \\ & \underbrace{(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho})}_{\text{green}} f_{\rho\alpha} + \underbrace{(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho})}_{\text{green}} f_{\rho\alpha} = 2 (g^{\mu\nu} d - g^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

$$\text{Diagram} = -g^2 C_2(G) \delta^{ab} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2} g^{\mu\nu} (d-1)$$

(eq. 172.2)

Para facilitar a soma dos diagramas (II) e (III), vamos complicar a expressão 172.2:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama} &= -g^2 C_2(G) \delta^{ab} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} g^{\mu\nu} (d-1) \frac{(q+p)^2}{(q+p)^2} = \\
 &= -g^2 C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{g^{\mu\nu} (d-1)}{(\ell^2 - \Delta)^2} [\ell^2 + (1-x)^2 q^2] =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{i g^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \left\{ -\Gamma(1-d/2) g^{\mu\nu} q^2 \left[ \frac{1}{2} d(d-1)x(1-x) \right] - \Gamma(2-d/2) g^{\mu\nu} q^2 \left[ (d-1)(1-x)^2 \right] \right\}$$

(eq. 173.1)

Somando 173.1 e 172.1 temos (considerando os coeficientes dos termos em azul):

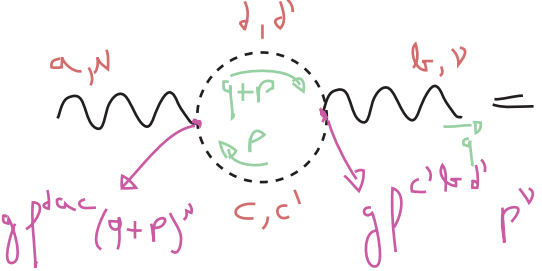
(eqs. 173.2)

$$\Gamma(1-d/2) g^{\mu\nu} q^2 \Rightarrow -\left[ \frac{1}{2} d(d-1)x(1-x) \right] + \left[ \frac{3}{2} (d-1)x(1-x) \right] = \frac{1}{2} (3-d)(d-1)x(1-x)$$

$$\Gamma(2-d/2) g^{\mu\nu} q^2 \Rightarrow -\left[ (d-1)(1-x)^2 \right] + \left[ \frac{1}{2} (2-x)^2 + \frac{1}{2} (1+x)^2 \right]$$

$$\Gamma(2-d/2) q^\mu q^\nu \Rightarrow -\left[ (1-d/2)(1-2x)^2 + (1+x)(2-x) \right]$$

O que precisamos é que o coeficiente de (b) e (c) sejam iguais (com sinal oposto), e que (a) desapareça. Mais uma vez o diagrama do Ghost é essencial, calculemos (IV) (usando 149.2 e 149.3):



$$= (-1) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2} \frac{i}{(p+q)^2} g^2 f^{abc} f^{abd'} \delta^{cc'} \delta^{dd'} (q+p)^\mu p^\nu$$

(eq. 173.3)

$$= \frac{i g^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \left\{ -\Gamma(1-d/2) g^{\mu\nu} q^2 \left[ \frac{1}{2} x(1-x) \right] + \Gamma(2-d/2) q^\mu q^\nu \left[ x(1-x) \right] \right\}$$

Vejamos primeiramente como isto muda o termo 173.2(a):

$$\boxed{\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2}^{(a)} \Rightarrow \frac{1}{2} \underbrace{(3-d)(d-1)}_{4d-3-d^2} \kappa(1-\kappa) - \frac{1}{2} \kappa(1-\kappa) = \kappa(1-\kappa) \frac{1}{2} \left[ \overbrace{4d-4-d^2}^{-(2-d)^2} \right] =$$

$$= \kappa(\kappa-1) \left(1-\frac{d}{2}\right) (2-d)$$

O efeito deste  $\left(1-\frac{d}{2}\right)$  é eliminar o polo em  $d=2$ . Lembre-se (pgs. 79-80) que a função  $\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)$  tem polos em  $d=2$  e  $d=4$ , o que equivale a uma divergência quadrática. No entanto:

$$\left(1-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)$$

E a função  $\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)$  só tem polo em  $d=4$  (o que equivale a uma divergência logarítmica, que é o que queremos). Assim, podemos trocar 173.2(a) por adicionar uma contribuição igual a:

$$\kappa(\kappa-1) (2-d)$$

Ao termo 173.2 (b):

$$\boxed{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2}^{(b)} \Rightarrow \underbrace{-(d-1)(1-\kappa)^2 + \frac{1}{2}(2-\kappa)^2 + \frac{1}{2}(1+\kappa)^2 + \kappa(\kappa-1)(2-d)}_{}$$

Se tudo der certo isto deve ser o termo 173.2 (c) com sinal oposto, vejamos como ficou o termo (c) com a contribuição do Ghost:

$$\boxed{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) q^\mu q^\nu}^{(c)} \Rightarrow -\left[ \left(1-\frac{d}{2}\right)(1-2\kappa)^2 + (1+\kappa)(2-\kappa) \right] + \left[ \kappa(1-\kappa) \right] =$$

$$= -\left(1-\frac{d}{2}\right)(1-2\kappa)^2 - \underbrace{(1+\kappa)(2-\kappa) + \kappa(1-\kappa)}_{-2 + \kappa - 2\kappa + \kappa^2 + \kappa - \kappa^2} = -\left(1-\frac{d}{2}\right)(1-2\kappa)^2 - 2$$

Para colocar (b) nesta forma note que estes termos se encontram dentro da integral:

$$\int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} f(x) \quad \text{onde: } \Delta = -\kappa(1-\kappa)q^2$$

$$\Delta(x) = \Delta(1-\kappa) \Rightarrow \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} f(x) \stackrel{\kappa \rightarrow 1-\kappa}{=} -\int_1^0 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} f(1-\kappa) = \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} f(1-\kappa)$$

Então podemos fazer esta troca em qualquer um dos termos somados. Em particular:

$$x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x \rightarrow \frac{x}{2} + \frac{1-x}{2} = \frac{1}{2}$$

Voltando ao (b):

$$-(d-1)(1-x)^2 + \frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{1}{2}(1+x)^2 + x(x-1)(2-d) =$$

$$= x^2 \left[ -(d-2) - (d-1) + 1 \right] + x \left[ 2(d-1) + (d-2) - 1 \right] - (d-1) + \frac{5}{2} =$$

$$-2d+4 = 4\left(1-\frac{d}{2}\right) \quad 2d-2+d-2-1 = 2d-7+(d-1)$$

$$= 4x^2\left(1-\frac{d}{2}\right) - 4x\left(1-\frac{d}{2}\right) + x(d-1) - (d-1) + \frac{5}{2} =$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}$$

$$= 4x^2\left(1-\frac{d}{2}\right) - 4x\left(1-\frac{d}{2}\right) + \frac{d}{2} - \frac{1}{2} - d + 1 + \frac{5}{2} =$$

$$-\frac{d}{2} + \frac{6}{2} = \left(1-\frac{d}{2}\right) + 2$$

$$= \left(1-\frac{d}{2}\right)(2x-1)^2 + 2 \quad \text{que é exatamente o termo (c) com sinal trocado.}$$

Logo a soma dos diagramas (II), (III) e (IV) nos dá:

$$\frac{i g^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \left[ \left(1-\frac{d}{2}\right)(2x-1)^2 + 2 \right]$$

(eq. 175.1)

Que tem a forma necessária para não dar massa ao bóson de Gauge e está livre de divergências quadráticas, como esperávamos. A parte divergente da soma destes diagramas é dada por:

$$\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \sim \frac{1}{(4\pi)^2} \quad \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \sim 1$$

$$\rightarrow \frac{i g^2}{(4\pi)^2} C_2(G) \delta^{ab} (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx \left[ \left(1-\frac{d}{2}\right)(2x-1)^2 + 2 \right] =$$

$$= \frac{i g^2}{(4\pi)^2} C_2(G) \delta^{ab} (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \left[ -\frac{1}{3} + 2 \right] =$$

$$= i (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \delta^{ab} \left[ -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( -\frac{5}{3} \right) C_2(G) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \right] \quad (\text{eq. 176.1})$$

Parte dependente de Gauge 4

Lembrando que este resultado foi obtido no gauge Feynman-'t Hooft ( $\xi = 1$ ). Se tivéssemos feito o mesmo em um gauge geral, muito pouco mudaria. Basta fazer a troca:

$$-\frac{5}{3} \rightarrow -\left(\frac{13}{6} - \frac{\xi}{2}\right)$$

em 176.1 para obter o resultado geral:

$$\text{Diagrama 1} + \text{Diagrama 2} + \text{Diagrama 3} = i (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \delta^{ab} \left[ -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( -\frac{13}{6} + \frac{\xi}{2} \right) C_2(G) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \right] + \dots$$

(eq. 176.2)

### Função $\beta$

Uma vez que façamos a renormalização da teoria de gauge não-abeliano teremos que introduzir os seguintes contratermos:

$$\text{Diagrama 1} = -i (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \delta^{ab} \delta_3 \quad (\xi = 0)$$

$$\text{Diagrama 2} = i \delta_2$$

$$\text{Diagrama 3} = i g t^a \gamma^\mu \delta_1$$

(obteremos a relação entre  $\gamma_3$  e  $\delta_3$ , que é a mesma para qualquer escolha de  $\xi$ , com  $\xi = 0$  a conta é mais fácil)

Consideremos o propagador do bóson de Gauge (estamos seguindo o mesmo raciocínio da pag 109):

$$\Gamma^{(L)}(p) = \text{Diagrama 1} + (\text{LEAD LOOP}) + \text{Diagrama 2} + \dots$$

$$\tilde{D}(k)_{\mu\nu}^{ab} \left[ -i (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \delta^{cd} \right] \delta_3 \tilde{D}(k)_{\mu\nu}^{cd}$$

$$\tilde{D}(k)_{\mu\nu}^{ab} \left[ i (g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) \delta^{cd} A L_N \left( \frac{\Delta^2}{-k^2} \right) + \dots \right] \tilde{D}(k)_{\mu\nu}^{cd}$$

(151.2)

Soma das eqs. 176.2 e 171.2 trocando:  $\Gamma(2 - \frac{d}{2}) \rightarrow L_N \left( \frac{\Delta^2}{-k^2} \right)$



A equação de Callan-Symanzik para a função de dois pontos é:

$$\left[ M \frac{d}{dM} G^{(2)} + \beta(g) \frac{d}{dg} G^{(2)} + 2\gamma(g) G^{(2)} \right] = 0$$

Toda dependência de  $G^{(2)}$  em  $M$  estará embutida em  $\delta_3$ . Notemos que:

$$\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} (k^\mu g^{\alpha\beta} - k^\alpha k^\beta) = \frac{k_\nu}{k^2} (k^\mu k^\beta - k^\mu k^\beta) = 0 = (k^\mu g^{\alpha\beta} - k^\alpha k^\beta) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

Então:

$$\begin{aligned} \tilde{D}(k)_{\mu\nu}^{ac} (k^\mu g^{\alpha\beta} - k^\alpha k^\beta) \delta^{cd} \tilde{D}(k)_{\beta\gamma}^{de} &= \delta^{\alpha\beta} \left( -i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} \right) (k^\mu g^{\alpha\beta} - k^\alpha k^\beta) \left( -i \frac{g^{\beta\gamma}}{k^2} \right) = \\ &= -\frac{\delta^{\alpha\beta}}{k^4} (k^\mu g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \end{aligned}$$

Portanto:  $\frac{dG^{(2)}}{dM} = \left[ \frac{i}{k^4} (k^\mu g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \delta^{\alpha\beta} \right] \frac{d}{dM} \delta_3$

Comparemos as ordens em  $g$  dos dois outros termos:

$$A = \mathcal{O}(g^2) \Rightarrow \underbrace{\beta(g)}_{\mathcal{O}(g^n)} \underbrace{\frac{d}{dg} G^{(2)}}_{\mathcal{O}(g)} + 2 \underbrace{\gamma(g)}_{\mathcal{O}(g^n)} \underbrace{G^{(2)}}_{\mathcal{O}(1)} \quad \downarrow n \geq 1$$

Podemos, em primeira ordem, ignorar a função  $\beta$  e obter a  $\gamma$ :

$$2\gamma_3(g) G^{(2)} = -M \frac{d}{dM} G^{(2)}$$

$$G^{(2)} = -\frac{i}{k^2} \left[ g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \delta_{ab} \quad \frac{-i}{k^2} \int \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \delta^{\mu\nu} \rightarrow 0$$

(151.2)  $\int \delta = 0$

$$2\gamma_3(g) \left\{ + \frac{i}{k^2} \left[ g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \delta_{ab} \right\} = + M \left[ \frac{i}{k^4} (k^\mu g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \delta^{\alpha\beta} \right] \frac{d}{dM} \delta_3$$

$$\gamma_3(g) = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta_3$$

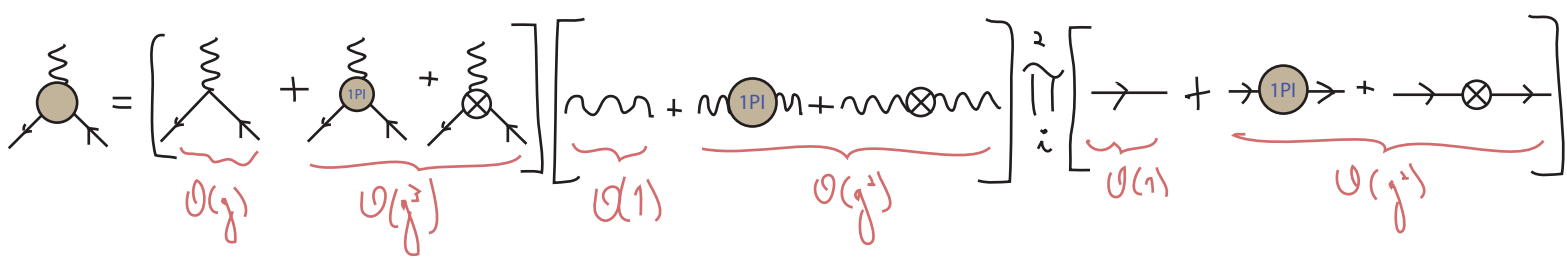
(eq. 177.1)

Que é exatamente o mesmo que obtivemos para um escalar na página 109. O mesmo raciocínio nos daria, para o férmion:

$$\gamma_2(g) = \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta_2$$

(eq. 177.2)

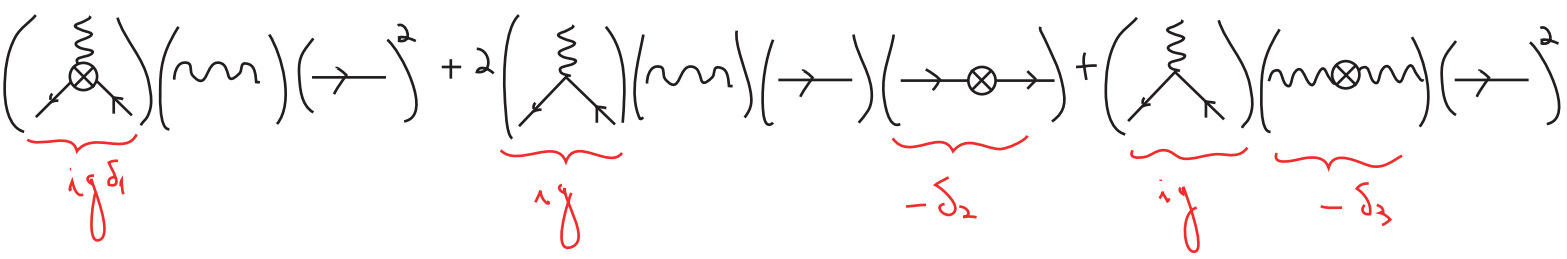
A função de Green de três pontos nos fornece o contratermo  $\delta_1$  e a função beta:



A lógica é analoga àquela da pag 110. A equação de Callan-Symanzik é:

$$\left[ M \frac{d}{dM} + \beta(g) \frac{d}{dg} + 2\delta_2(g) + \delta_3(g) \right] G^{(3)} = 0$$

As contrinuições para  $\frac{dG^{(3)}}{dM}$  vêm dos contratermos e começam em ordem  $g^3$ :



$$M \frac{d}{dM} G^{(3)} = (\text{tree-level diagram with loop})^2 M \frac{d}{dM} (i g \delta_1 - i 2 g \delta_2 - i g \delta_3)$$

$$\frac{dG^{(3)}}{dg} \underset{\text{L.O.}}{=} i (\text{tree-level diagram with loop})^2 \quad G^{(3)} \underset{\text{L.O.}}{=} i g (\text{tree-level diagram with loop})^2$$

$$(\text{tree-level diagram with loop})^2 \left[ M \frac{d}{dM} (i g \delta_1 - i 2 g \delta_2 - i g \delta_3) + \beta(g) + i g M \frac{d}{dM} \delta_2 + i g \frac{1}{2} M \frac{d}{dM} \delta_3 \right] = 0$$

$$\beta(g) = g M \frac{d}{dM} \left( -\delta_1 + 2\delta_2 + \delta_3 - \delta_2 - \frac{1}{2}\delta_3 \right)$$

$$\boxed{\beta(g) = g M \frac{d}{dM} \left[ -\delta_1 + \delta_2 + \frac{1}{2}\delta_3 \right]} \quad (\text{eq. 178.1})$$

Agora só resta determinar os contratermos,  $\delta_3$  tem que cancelar a parte divergente das equações 171.2 e 176.2, portanto deve ser:

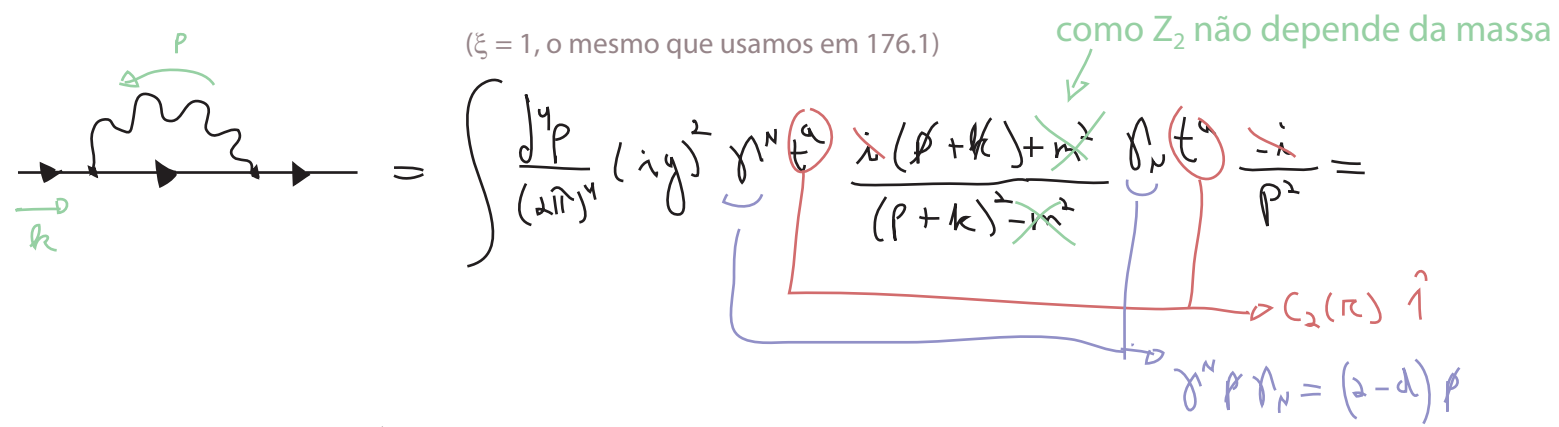
$$\delta_3 = \left( \frac{-g^2}{(4\pi)^2} \right) \left[ \frac{4}{3} \eta_F C(\pi) + \left( -\frac{5}{3} \right) C_2(G) \right] \frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} =$$

$SU(N) \rightarrow C_2(G) = C(\pi) = N$        $\ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)$

$$\delta_3 = \frac{g^2}{4\pi^2} \left[ \frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} \eta_F C(\pi) \right] \frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}}$$

(eq. 179.1)

Para obter  $\delta_2$  temos que calcular o diagrama:



$$= -g^2 C_2(\pi) (2-d) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(p+k)}{(p+k)^2 p^2} = g^2 C_2(\pi) (d-2) \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(1-x)k}{(l^2 - \Delta)^2} =$$

$$= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(\pi) k \int_0^1 dx (1-x) (d-2) \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Delta^{2-d/2}} = \frac{ig^2}{(4\pi)^2} k C_2(\pi) \Gamma(2-d/2) + \dots$$

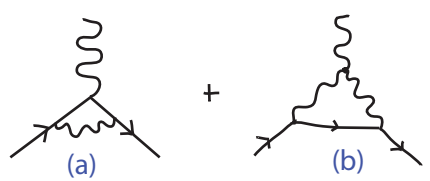
(eq. 179.2)

parte divergente

$$\delta_2 = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} C_2(\pi)$$

(eq. 179.3)

Resta apenas calcular  $\delta_1$ , que vem das correções ao vértice, que a 1-loop são:



$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} g^3 t^b t^a t^b \frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}') \gamma^\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\nu}{(p+k')^2 (p+k)^2 p^2}$$

$$t^b t^a t^b = \underbrace{t^b t^b t^a}_{C_2(\mathfrak{r})} + t^b \underbrace{[t^a, t^b]}_{i f^{abc} t^c} = C_2(\mathfrak{r}) t^a + i f^{abc} t^b t^c =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ f^{abc} t^b t^c + f^{abc} t^c t^b \right] =$$

$$= \frac{1}{2} f^{abc} [t^b, t^c] = \frac{1}{2} f^{abc} i f^{bcd} t^d$$

$$= C_2(\mathfrak{r}) t^a - \frac{1}{2} \underbrace{f^{abc} f^{bcd}}_{C_2(\mathfrak{g}) \delta^{ad}} t^d = \left[ C_2(\mathfrak{r}) - \frac{1}{2} C_2(\mathfrak{g}) \right] t^a$$

Podemos obter a divergência deste diagrama de forma simples, tomando o limite p grande (nos casos anteriores haviam potenciais divergências quadráticas que se cancelaram, por isso foi tomado um cuidado maior).

$$\sim g^3 \left[ C_2(\mathfrak{r}) - \frac{1}{2} C_2(\mathfrak{g}) \right] t^a \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu \not{p} \gamma^\mu \not{p} \gamma_\nu}{(p^2)^3} =$$

$$= \frac{i g^3}{(4\pi)^2} \left[ C_2(\mathfrak{r}) - \frac{1}{2} C_2(\mathfrak{g}) \right] t^a \gamma^\mu \left[ \Gamma(2 - \frac{d}{2}) + \dots \right]$$

(eq. 180.1)


Usando a mesma lógica para o diagrama (b), temos:

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (i g \not{\partial}_\nu t^b) \frac{1}{p^2} (i g \not{\partial}_\mu t^c) \frac{-i}{(q-k-p)^2} \frac{-i}{(k-p)^2}$$

$$\cdot g f^{abc} \left[ g^{\mu\nu} (q+k-p)^\rho + g^{\nu\rho} (-q-k+p)^\mu + g^{\rho\mu} (k-p-q)^\nu \right]$$

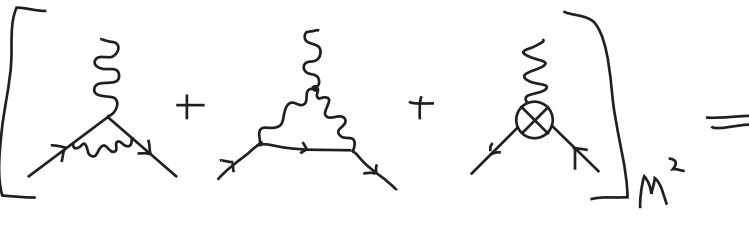
$$f^{abc} t^b t^c = \frac{1}{2} f^{abc} i f^{bcd} t^d = \frac{i}{2} C_2(\mathfrak{g}) t^a$$

↳ conforme vimos acima



$$p \gg \hbar, k, l \quad \frac{g^3}{2} C_2(G) t^a \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_\nu \not{p} \gamma_\rho \frac{g^{\mu\nu} p^\rho - 2g^{\nu\rho} p^\nu + g^{\rho\mu} p^\rho}{(p^2)^3} \sim$$

$$\sim \frac{i g^3}{(4\pi)^2} \frac{3}{2} C_2(G) t^a \gamma^N \left( \Gamma(2 - \frac{d}{2}) + \dots \right) \quad (\text{eq. 181.1})$$



$$\left[ \text{triangle gluon} + \text{triangle fermion} + \text{ghost loop} \right]_{M^2} = D \quad \int_1 = \frac{-g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2 - \frac{d}{2}}} \left[ C_2(R) + C_2(G) \right] \quad (\text{eq. 181.2})$$

Finalmente, usando 178.1, 179.1 e 179.3:

$$\beta(g) = g M \frac{d}{dM} \left[ -\delta_1 + \delta_2 + \frac{1}{2} \delta_3 \right] \stackrel{(\text{eq. 179.3})}{=} -2g \left[ \frac{g^2}{(4\pi)^2} (C_2(R) + C_2(G)) - \frac{g^2}{(4\pi)^2} C_2(R) + \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(R) \right) \right] =$$

$M \frac{d}{dM} \frac{1}{(M^2)^{2 - \frac{d}{2}}} = (d-1) M^{d-4}$   
 $M^{d-4} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \sim -\frac{2}{(d-1)} + \dots$

(eq. 179.1)

$$= -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left[ \cancel{+2 C_2(R)} + 2 C_2(G) - \cancel{2 C_2(R)} + \frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(R) \right] =$$

$$= -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left[ \frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(R) \right]$$

Que é negativo para  $n_f \cdot C(R) < \frac{11}{4} C_2(G)$

SU(N):  $C_2(G) = N$   
 Férmiões na fundamental:  $C(N) = \frac{1}{2}$  }  $\Rightarrow n_f < \frac{11}{2} N$

$$\text{QCD: } \begin{cases} N=3 \\ n_f=6 < \frac{33}{2} \end{cases}$$

Teorias que satisfizerem esta condição terão constantes de acoplamento que vão a zero (asintoticamente) para energias altas, é isto que chamamos de **Liberdade Assintótica** e isto de fato ocorre na QCD).

