

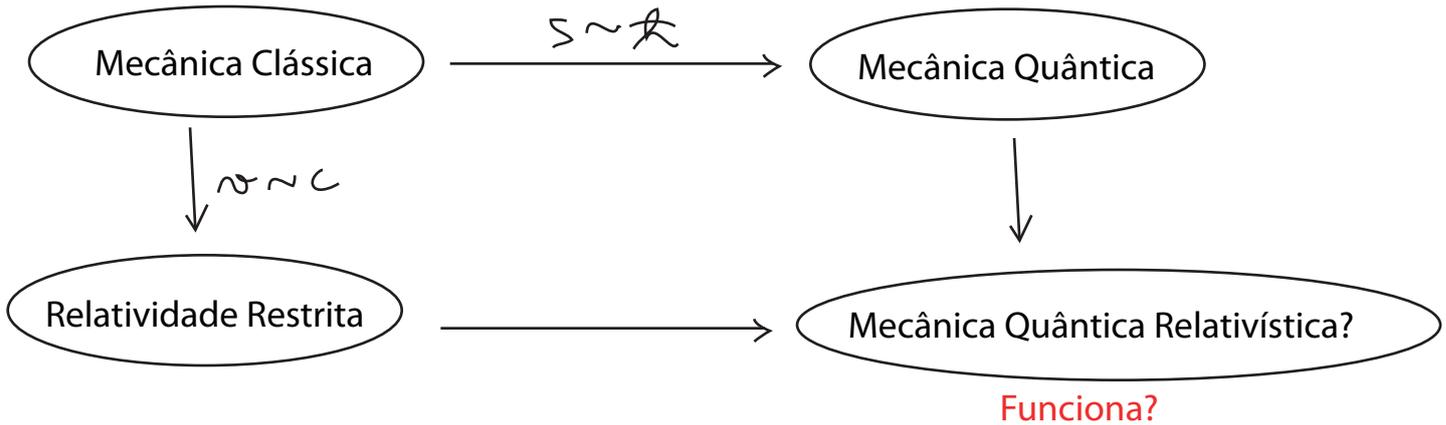
Teoria Quântica de Campos

(escopo do curso e um pouco de história)

(Weinberg cap 1, Peskin 2.1, Nastase 1)

Objetivo: uma teoria Quântica e Relativística (no sentido restrito)

Em se tratando de partículas(-onda):



Mecânica Clássica: "estado" definido por um conjunto de coordenadas canônicas $\{q_i, p_i\}$ e a evolução temporal deste estado é dado pela Hamiltoniana do sistema.

Quantizar é essencialmente transformar estas coordenadas em operadores, impondo:

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$$

Convenção! $\hbar = 1$
unidades naturais: $c = 1$

e os estados passam a ser determinados por vetores no espaço de Hilbert, onde agem estes operadores. Representando estes vetores em termos de funções de onda $\Psi(\vec{x}, t)$ os operadores são:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \\ \text{(partícula)} \\ (\hbar=1) \end{array} \right\} \begin{cases} \hat{p}^i = -i \nabla^i \\ \hat{x}^i = x^i \\ \hat{H} = i \frac{\partial}{\partial t} \end{cases}$$

(é importante notar que o tempo não é um operador, não é um observável, e sim um parâmetro. Logo há uma grande assimetria no tratamento do espaço e do tempo)

Podemos então obter a equação de Schrödinger para uma partícula livre:

Classicamente:

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

Versão quantizada:

$$\hat{H} \psi = \frac{\hat{p}^2}{2m} \psi \implies i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t) \quad (\text{eq. 1.1})$$

Primeira derivada no tempo, segundas derivadas no espaço, mau sinal

Lembrando que a interpretação probabilística nos diz que:

$$\rho(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2 \xrightarrow{\text{(eq. 1.1)}} \frac{d\rho(\vec{x}, t)}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = 0$$

(densidade de probabilidade)

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = -\frac{i}{2m} [\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*]$$

ρ é conservada e positivo definida!

Poderíamos fazer a mesma coisa com a Hamiltoniana relativística? (Klein, Gordon e Schrödinger tentaram:)

$$H^2 = p^2 + m^2 \longrightarrow -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, t) = -\nabla^2 \psi + m^2 \psi$$

$c=1$

$$\square (\square^2 + m^2) \psi = 0 \quad \text{(eq. 2.1)}$$

Equação de Klein-Gordon

$$\psi(x, t) = N e^{i p x - i E t}$$

solução

$$\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

A segunda derivada no tempo, deixa a equação de continuidade na forma:

$$-i\psi^* (\text{2.1}) + i\psi (\text{2.1})^* = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[i (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[-i (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \right] = 0$$

(essencialmente a mesma de antes)

$$\rho = 2E |N|^2$$

No entanto:

$$\text{(eq. 2.1)} \longrightarrow E = \pm \sqrt{(p^2 + m^2)}$$

Energia e densidade de probabilidades negativas!

O Dirac encontrou outra solução, envolvendo apenas primeiras derivadas:

$$\hat{H}^2 \psi = (\hat{p}^2 + m^2) \psi \longleftarrow \text{buscamos} \longrightarrow \hat{H} \psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) \psi$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$$

$$i \neq j \Rightarrow \{\alpha_i, \alpha_j\} = \{\alpha_i, \beta\} = 0$$

$$\hat{H}^2 = \alpha_i^2 p_i^2 + (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_j p_i + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i m + \beta^2 m^2$$

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta\} \Rightarrow (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_\mu$$

(matrizes)

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (\text{eq. 3.1})$$

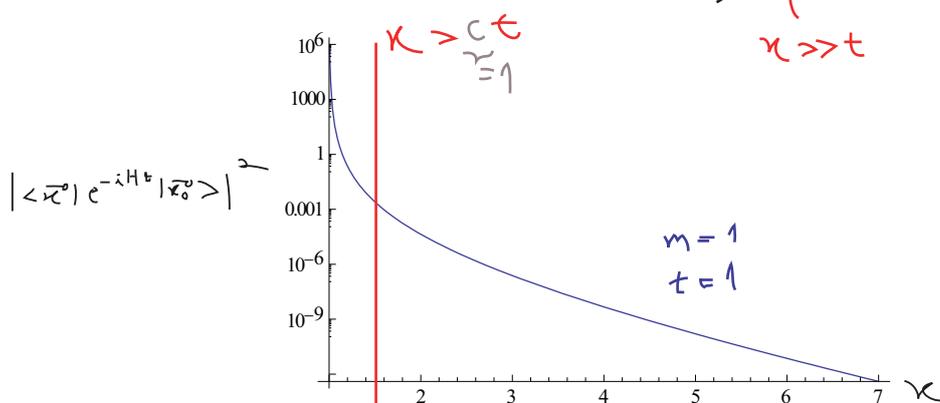
Equação de Dirac

- $\psi = u(\vec{p}^0) e^{-i p_\mu x^\mu}$ Spinores que descrevem uma partícula de spin 1/2 (neste "approach" isto é um fortuito acidente)
- $\rho = |\psi|^2$ ✓ Probabilidades estão bem definidas
- $u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix}$
 - $E > 0$
 - $E < 0$ Os estados de energia negativa ainda estão presentes, o que leva ao famoso mar de Dirac (solução ruim para os férmions e inútil para Bósons)

Além disso a teoria assim obtida tem problemas de causalidade, o que pode ser visto se calcularmos:

$$\begin{aligned}
 U(t) &= \langle \vec{x} | e^{-iHt} | \vec{x}_0 \rangle = \langle \vec{x} | e^{-it\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} | \vec{x}_0 \rangle \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-it\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}_0)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-it\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} e^{i|\vec{p}||\vec{x}-\vec{x}_0|\cos(\theta)} \\
 &= \frac{i}{2\pi^2 |\vec{x}-\vec{x}_0|} \int_0^\infty p dp \text{Sen}(p|\vec{x}-\vec{x}_0|) e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} \quad (\text{Gradshteyn 6th ed., eq 3.914(6)}) \\
 &= \frac{i}{2\pi^2 r} \frac{ixtm^2}{r^2-t^2} K_2(m\sqrt{r^2-t^2}) = -\frac{tm^2}{2\pi^2 r^2} K_2(mr) \neq 0 !!
 \end{aligned}$$

(Gradshteyn 6th ed., eq 3.914(6))



Poderíamos também aproximar esta integral usando a Saddle point approximation:

$$x_0: f'(x_0) = 0 \implies f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \dots$$

$$\int dx e^{f(x)} = e^{f(x_0)} \int dx e^{\frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0)} = e^{f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}}$$

$dx = d(\delta x)$ $f''(x_0) < 0$

A idéia é que para qualquer ponto $x_1 \neq x_0$

$e^{x_1} \ll e^{x_0}$ porque x_0 é um máximo

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}^0 | e^{-iHt} | \vec{x}^0 \rangle &= \frac{i}{2\pi^2 x} \int_0^\infty p dp \underbrace{\text{Sen}(px)}_{\text{Seno}(px)} e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2 x} \int_0^\infty p dp (e^{-ipx} - e^{ipx}) e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} \end{aligned}$$

Rigorosamente eu teria que rodar isso para o eixo real (em x_μ) e depois voltar

$$I_{\pm}(x,t) = \int_0^\infty p dp e^{\pm ipx} e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} = \pm i \frac{1}{dx} \int_0^\infty dp e^{\underbrace{\pm ipx - it\sqrt{p^2+m^2}}_{f(p)}}$$

$$f'(p_0) = 0 \implies \pm ix - it p_0 (p_0^2+m^2)^{-1/2} = 0 \iff p_0 = \pm \frac{ix}{\sqrt{x^2-t^2}}$$

$$f''(p_0) = -it(p_0^2+m^2)^{-3/2} + it p_0^2 (p_0^2+m^2)^{-3/2} = -im^2 t \left(-\frac{x^2-t^2}{m^2 t^2} \right)^{3/2} = -\frac{1}{m t^2} (x^2-t^2)^{3/2} < 0 \quad \text{p/ } x^2 > t^2$$

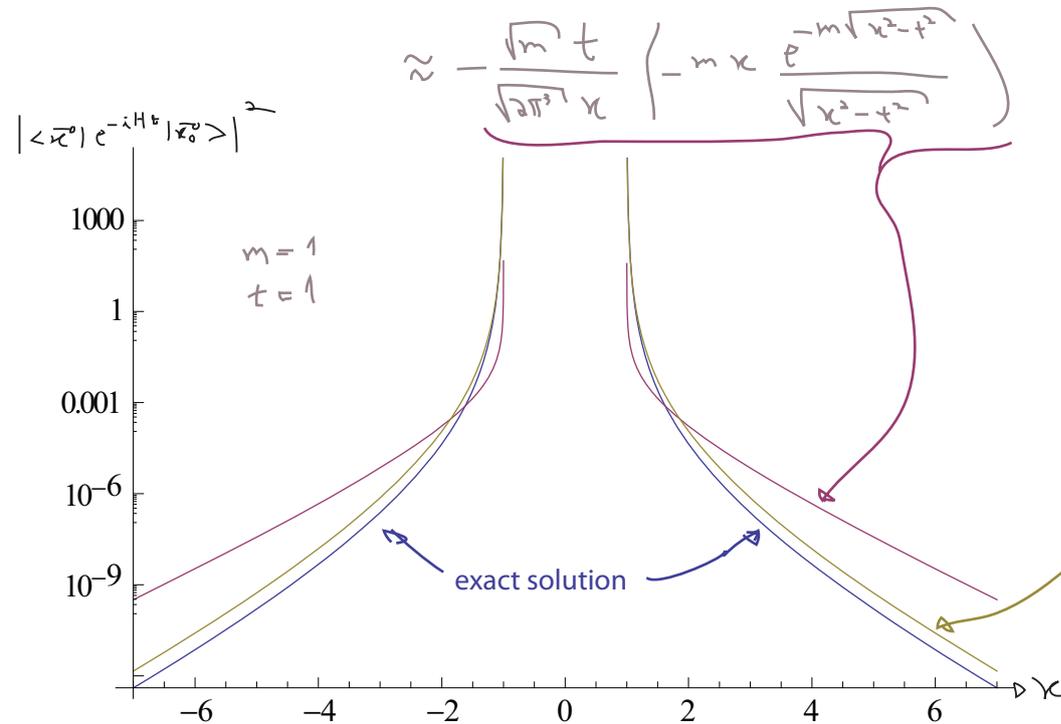
$$f(p_0) = \pm ix \left(\pm \frac{ix}{\sqrt{x^2-t^2}} \right) - it \sqrt{-\frac{m^2 t^2}{x^2-t^2}} = -\frac{m x^2}{\sqrt{x^2-t^2}} + \frac{m t^2}{\sqrt{x^2-t^2}} = -m \sqrt{x^2-t^2}$$

$$I_{\pm} = \pm i \frac{1}{dx} \left[e^{f(p_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(p_0)|}} \right]$$

$$\langle \vec{x}^0 | e^{-iHt} | \vec{x}^0 \rangle = -\frac{1}{4\pi^2 x} \left[I_-(x,t) - I_+(x,t) \right]$$

$$\langle \vec{x}_0 | e^{-iHt} | \vec{x}_0 \rangle = -\frac{1}{2\pi^2 x} i \frac{d}{dx} \left[e^{p(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{p''(x_0)}} \right] = -\frac{\sqrt{m} t}{\sqrt{2\pi^3} x} \frac{d}{dx} \left[\frac{e^{-m\sqrt{x^2-t^2}}}{(x^2-t^2)^{3/2}} \right]$$

Ignorando esta parte, já que o comportamento é dominado pela exponencial



Estes problemas estão intrinsicamente ligados ao fato de estarmos partindo de uma descrição quântica de UMA partícula e então introduzindo a relatividade. Esta teoria, que tem um número bem definido de partículas (UMA) não dá conta da possibilidade de que o número de partículas pode mudar dinamicamente, o que é um fato experimental uma vez que chegemos em energias comparáveis com as massas destas partículas (o limite relativístico). Olhando o problema deste ponto de vista, os problemas eram mesmo de se esperar.

Uma forma encontrada para "concertar" estas teorias ficou conhecida como **Segunda Quantização** (muito cuidado com este nome):

$$(\square^2 + m^2) \psi(x, t) = 0 \quad (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x, t) = 0$$

Estas funções são re-interpretadas. Não mais como funções de onda de 1 partícula livre, mas como campos definidos em todo espaço e cuja amplitude está ligada ao número de partículas.

Para determinar o estado deste sistema (clássico!) em um dado momento, preciso dizer o valor do campo em todos os pontos e seu momento canonicamente conjugado:

$$\left\{ \psi(\vec{x}), \pi(\vec{x}) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\psi}} \right\}$$

Quantizar este sistema (a tal segunda quantização) consiste em transformar estas novas coordenadas canônicas em operadores, impondo:

$$[\hat{\psi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})]_{\pm} = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

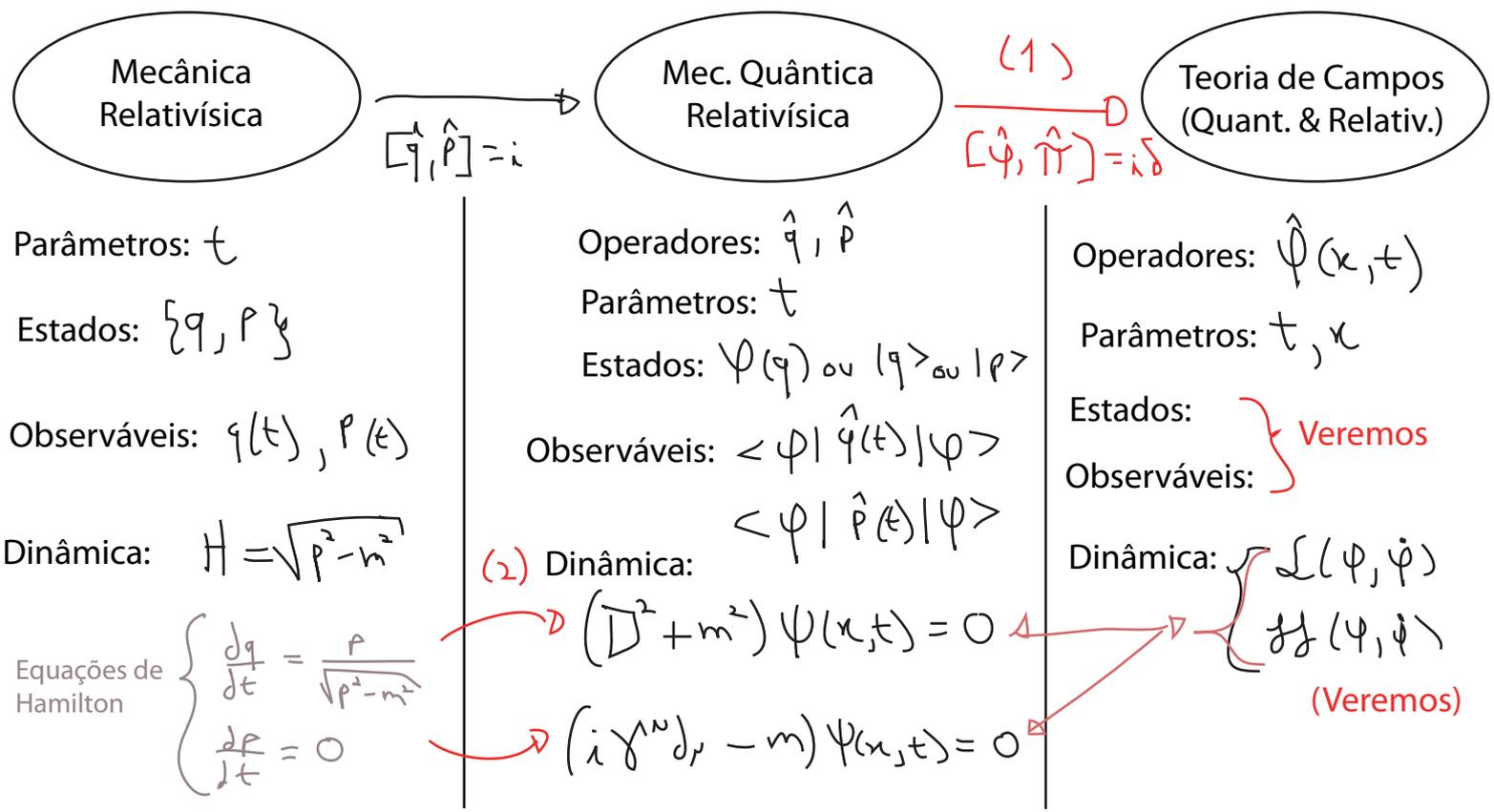
De forma que agora temos que especificar um estado $|\sigma\rangle$ e o valor esperado do campo naquele estado é um observável: $\langle \sigma | \hat{\psi}(x) | \sigma \rangle$

Assim como antes, a evolução temporal deste sistema vai ser especificada pelo Hamiltoniano do campo, que pode ser obtido com um pouco de engenharia reversa a partir das equações de movimento.

Note que a posição "x" que aparece em $\psi(x,t)$ foi "rebaixada" para o mesmo status que o tempo tinha na MQ, é apenas um índice (contínuo) para o campo. Ela não é mais uma coordenada canônica do sistema e não há mais operador posição do campo. Faz tanto sentido querer medir a "posição do campo" quanto faria querer medir o "tempo do campo". Isto é bem mais promissor do ponto de vista de quem está querendo fazer uma teoria relativística.

Com esta re-interpretação passamos de fato a trabalhar com uma Teoria de Campos Relativística e Quantizada que, como veremos (ao longo do semestre), não tem problemas nem com energias e probabilidades negativas e não viola causalidade. Fomos forçados, no entanto, a abandonar a descrição da mecânica para uma descrição de campos.

Qual é problema com o nome Segunda Quantização? Note o caminho que fizemos:



No passo (1) o que estamos fazendo é quantizar (transformar em operadores) uma função definida em todo espaço (um campo) e cuja equação de movimento CLÁSSICA é de Dirac ou Klein-Gordon. Uma vez obtidas estas equações e abandonada a interpretação de ψ como amplitude de probabilidade, os operadores de posição e momento perdem todo significado. O que estamos realmente fazendo é pegar uma teoria clássica (relativística) de campos e a quantizando UMA VEZ. O nome segunda quantização portanto se refere mais ao fato de que ela veio depois historicamente do que ao fato que estamos quantizando de novo o mesmo sistema (não estamos).

De fato, parece que a única função da "primeira" quantização foi nos fornecer as equações de Dirac e Klein-Gordon no passo (2), existe alguma outra forma de obter estas equações?

A resposta é sim. Uma vez que aceitemos que o objeto básico da teoria deve ser um campo, podemos obter equações de movimento para estes campos baseado somente nas simetrias que o sistema deve ter. A primeira delas é a invariância por mudança entre referenciais inerciais, e de fato as equações de Dirac e Klein-Gordon podem ser obtidas se buscarmos todos os campos que tem uma transformação bem definida sob estas transformações (campos que pertencem à representação do grupo definido por estas transformações, o grupo de Poincaré). Aí basta quantizar esta teoria. Esta visão, que decorre mais diretamente de primeiros princípios, tem ainda a vantagem de nos fornecer outras equações clássicas, como por exemplo àquela para partículas de spin 1. É este caminho que faremos ao longo deste curso.

A obtenção destas equações de movimento é o domínio da teoria clássica de campos, sob a qual faremos agora uma (rápida) revisão, notando que estamos interessados sempre em teorias relativísticas:

	Ñ-Relativístico	Relativístico	
Clássico	Teoria de Campos (ñ-relativ)	Teoria Clássica de Campos	Revisão
Quântico	Teoria Quântica de Campos (ñ-relativ)	Teoria Quântica de Campos	Resto do curso

Teoria Clássica de Campos

(Ramond 1.1 - 1.7)

Em mecânica clássica:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}_{\text{Lagrangiana}} \quad (\text{eq. 7.1})$$

Ação

Coordenadas

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (\text{eq. 7.2})$$

Equações de Lagrange (equações do movimento)

Também podemos mudar para o formalismo Hamiltoniano:

$$H(P, q) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i) \quad (\text{eq. 8.1})$$

(transformada de Legendre)

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Neste caso as equações de movimento são as Equações de Hamilton:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad (\text{eq. 8.2})$$

A passagem para a teoria de campos pode ser feita imaginando um conjunto de infinitos q_i que agora não mais representam coordenadas de uma partícula mas servem de índices para o campo (e no limite do contínuo trocamos $q_i \rightarrow x$)

$$\{q_i(t)\} \Rightarrow \{\phi_i(t)\} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}, t)$$

Estamos interessados em teorias locais, nas quais a Lagrangeana pode ser escrita como:

$$L(t) = \int d^3\vec{x} \underbrace{\mathcal{L}(\vec{x}^0, t)}_{\text{Densidade Lagrangeana (mas que chamaremos de Lagrangeana)}}$$

o que equivale a dizer (no limite discretizado) que a dinâmica de um dos pontos não depende de pontos distantes deste. Também queremos teorias relativísticas, para tanto a densidade Lagrangeana será uma função invariante relativística, construída a partir de campos (e suas derivadas) com transformações bem determinadas:

$$\mathcal{L}(\vec{x}^0, t) = \mathcal{L}(\phi(\vec{x}, t), \partial_\nu \phi(\vec{x}, t))$$

E a ação (considerando que temos vários campos ϕ_a):

$$S = \int L dt = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\nu \phi_a) \quad (\text{eq. 8.3})$$

As equações de movimento para os campos são completamente análogas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi_a)} \right] = 0 \quad (\text{eq. 9.1})$$

Como já comentamos, construiremos estas Lagrangeanas com campos com transformações relativísticas bem determinadas:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

Coordenadas antes e depois da transformação

Transformação de Lorentz

$$\phi'_i(x') = R_i^{\ j} \phi_j(x)$$

a coordenada foi transformada, mas a própria forma funcional do campo pode ter mudado

note que, em geral, a transformação pode misturar campos com índices diferentes (ϕ_1 e ϕ_2) - neste caso é claramente mais natural pensar nestes "campos" como componentes de um campo mais complicado que se misturam sob transformações de Lorentz.

$$A_\mu = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

Por definição, para um campo escalar:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \hat{1} \\ \phi'(x') = \phi(x) \end{array} \right.$$

A lagrangeana mais geral (invariante e renormalizável) contendo somente um campo escalar é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) = \\ &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \phi|^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \end{aligned}$$

Convenção! Estou seguindo a convenção das notas do Prof. Nastase:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A maioria dos livros usa o sinal oposto (diag{1,-1,-1,-1}) lembre-se disso quando for comparar resultados

O momento canonicamente conjugado ao campo é (não confundir com o momento de uma partícula):

$$P(x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(x)} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)} \int d^3 y \mathcal{L}(\phi(y), \dot{\phi}(y)) \equiv \Pi(x) d^3 \vec{x}$$

$$\boxed{\Pi(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}(x)}} \quad (\text{eq. 10.1})$$

Densidade de momento conjugado (mas que chamaremos de momento conjugado)

A Hamiltoniana:

$$H = \sum_{\vec{x}} P(x) \dot{\phi}(x) - L \rightarrow \int d^3 \vec{x} [\Pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}] \equiv \int d^3 \vec{x} \mathcal{H}(x)$$

$$\boxed{\mathcal{H}(x) = \Pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}} \quad \begin{array}{l} \text{Densidade Hamiltoniana} \\ \text{(advinhe como vamos chamar)} \end{array} \quad (\text{eq. 10.2})$$

Note a importância da suposição de localidade aqui também (quando trocamos p por π), essencialmente ela permite que trabalhem só com estas densidades em cada ponto, sem efeitos correlacionando pontos distantes.

Teorema de Noether

Outra importante consequência das simetrias impostas à Lagrangiana é a conservação de grandezas físicas. Segundo o Teorema de Noether:

“Para cada simetria contínua do sistema, há uma quantidade conservada ao longo do tempo”

Alguns exemplos:

Simetria \longleftrightarrow “Carga” Conservada (em geral só usamos a palavra carga para simetrias internas do sistema - como as que geram a carga elétrica ou a carga de cor da QCD - mas isso é puramente convencional)

Translação Temporal \longleftrightarrow Energia E
 $t \rightarrow t + \omega$

Translação Espacial \longleftrightarrow Momento \vec{p}
 $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a}$

Rotação \longleftrightarrow Momento Angular \vec{L}
 $x_i \rightarrow R_{ij} x_j$

Mudança de Fase U(1) \longleftrightarrow Carga Elétrica Q^{QED}
 $\phi(x_\mu) \rightarrow e^{i\theta} \phi(x_\mu)$

Uma forma conveniente de expressar essa conservação é em termos de **correntes conservadas** e **equações de continuidade** do tipo:

$$\partial_\nu j^\nu = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_\alpha j^\alpha + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$


↪ corrente conservada

$$\frac{d}{dt} \int \underbrace{\delta^3 \vec{x}}_Q j^0 = - \int \delta^3 \vec{x} \cdot \vec{j}$$

Podemos obter a corrente conservada a partir da Lagrangeana. Suponha uma transformação que deixe a ação invariante (uma simetria):

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \underbrace{\alpha \Delta \phi}_{\text{versão infinitesimal de uma transformação contínua}}$$

$$\hookrightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \alpha \partial_\nu J^\nu \quad (\text{eq. 11.1})$$

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad \longrightarrow \quad S + \alpha \int d^4x \partial_\nu J^\nu$$

$$\propto \int dS_\nu J^\nu = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{se considerarmos que } J \\ \text{é zero nas bordas de todo} \\ \text{o espaço tempo} \end{array} \right)$$

Considerando que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ podemos escrever a variação de \mathcal{L} na forma:

$$\begin{aligned} \alpha \Delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\alpha \Delta \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \partial_\nu (\alpha \Delta \phi) = \\ &= \alpha \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \Delta \phi \right) + \alpha \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \right) \right]}_{=0 \text{ (Euler Lagrange)}} \Delta \phi = \end{aligned}$$

Por outro lado (eq 11.1): $\alpha \Delta \mathcal{L} = \alpha \partial_\nu J^\nu$

$$\partial_\nu J^\nu = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \Delta \phi \right) \Rightarrow \partial_\nu \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \Delta \phi - J^\nu}_{j^\nu} \right) = 0$$

Temos então a corrente conservada:

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - \mathcal{J}^\mu \quad (\text{eq. 12.1})$$

No caso de um campo com várias componentes, se a transformação for linear em ϕ , podemos escrever:

$$(\alpha \Delta \phi)^\mu \equiv \alpha^\nu (T^\mu)_\nu \phi^\delta$$

De forma que ($\mathcal{J}^\mu = 0$):

$$j^{\mu, \alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (T^\mu)_\nu \phi^\delta \quad (\text{eq. 12.2})$$

Um exemplo: $x^\mu \rightarrow x^\mu + \alpha^\mu \quad \alpha^\mu \ll 1$

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x + \alpha) = \phi(x) + \alpha^\mu \partial_\mu \phi(x)$$

$$j^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{J}^\mu_\nu \equiv T^\mu_\nu \quad (\text{Tensor energia momento})$$

$\equiv \mathcal{L} \delta^\mu_\nu$

Representações do Grupo de Lorentz

O grupo de Lorentz é uma generalização das rotações para o espaço 4-dimensional de Minkowski, e é um $SO(1,3)$ (determinante 1, ortogonal e 1,3 indica uma coordenada tipo tempo e 3 tipo espaço)

A representação fundamental é dada por:

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$$

↳ Matrizes da representação

↳ obtidas pela propriedade

$$\eta_{\mu\nu} = \text{Diag}\{-1, 1, 1, 1\} \Rightarrow \Lambda \eta \Lambda^T = \eta$$

O que é uma generalização da ortogonalidade: $\Lambda \Lambda^T = 1$

que poderia ser escrita: $\Lambda 1 \Lambda^T = 1$ ou generalizada para: $\Lambda g \Lambda^T = g$

com: $g = \text{Diag}\{\underbrace{-1, \dots, -1}_P \text{ VEZES}, \underbrace{+1, \dots, +1}_Q \text{ VEZES}\} \Rightarrow SO(P, Q)$