

Temos então a corrente conservada:

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - \mathcal{J}^\mu \quad (\text{eq. 12.1})$$

No caso de um campo com várias componentes, se a transformação for linear em ϕ , podemos escrever:

$$(\alpha \Delta \phi)^\mu \equiv \alpha^\nu (T^\mu)_\nu \phi^\delta$$

De forma que ($\mathcal{J}^\mu = 0$):

$$j^{\mu, \alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (T^\mu)_\nu \phi^\delta \quad (\text{eq. 12.2})$$

Um exemplo: $x^\mu \rightarrow x^\mu + \alpha^\mu \quad \alpha^\mu \ll 1$

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x + \alpha) = \phi(x) + \alpha^\mu \partial_\mu \phi(x)$$

$$j^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{J}^\mu_\nu \equiv T^\mu_\nu \quad (\text{Tensor energia momento})$$

$\mathcal{L} \mathcal{J}^\mu_\nu$

Representações do Grupo de Lorentz

O grupo de Lorentz é uma generalização das rotações para o espaço 4-dimensional de Minkowski, e é um $SO(1,3)$ (determinante 1, ortogonal e 1,3 indica uma coordenada tipo tempo e 3 tipo espaço)

A representação fundamental é dada por:

$$dx^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$$

↳ Matrizes da representação

↳ obtidas pela propriedade

$$\eta_{\mu\nu} = \text{Diag}\{-1, 1, 1, 1\} \Rightarrow \Lambda \eta \Lambda^T = \eta$$

O que é uma generalização da ortogonalidade: $\Lambda \Lambda^T = 1$

que poderia ser escrita: $\Lambda 1 \Lambda^T = 1$ ou generalizada para: $\Lambda g \Lambda^T = g$

com: $g = \text{Diag}\{\underbrace{-1, \dots, -1}_{p \text{ vezes}}, \underbrace{+1, \dots, +1}_{q \text{ vezes}}\} \Rightarrow SO(p, q)$

As matrizes da representação satisfazem às propriedades do grupo, em particular

$$\Lambda = \Lambda^1 \cdot \Lambda^2$$

$\in G \quad \in G \quad \in G$

Podemos encontrar uma representação agindo no espaço dos campos (neste caso um campo com componentes ϕ^a):

$$\phi'^a(x') = R(\Lambda)^a_{\ b} \phi^b(x)$$

$\downarrow \quad \chi'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu}$

$$R(\Lambda_1) R(\Lambda_2) = R(\Lambda_1 \cdot \Lambda_2)$$

Pensando em uma transformação infinitesimal parametrizada por β^a , podemos representar os elementos do grupo como exponenciais:

$$R(\beta) = e^{\lambda \beta^a t_a^{(R)}}$$

\downarrow Geradores da Álgebra de Lie (muitas vezes nos referimos a eles como geradores do grupo de Lie)

\downarrow Álgebra de Lie $[t_a^{(R)}, t_b^{(R)}] = i f_{ab}^c t_c^{(R)}$

\downarrow Constantes de Estrutura

Podemos encontrar algumas representações que satisfazem as propriedades acima:

Representações Bosônicas: se transformam como tensores com um número arbitrário de índices covariantes ou contravariantes:

$$B^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_k \nu_k}(\Lambda x) = (\Lambda_{\mu_1}^{\alpha_1} \Lambda_{\mu_2}^{\alpha_2} \dots \Lambda_{\mu_k}^{\alpha_k}) (\Lambda^{\nu_1}_{\beta_1} \Lambda^{\nu_2}_{\beta_2} \dots \Lambda^{\nu_k}_{\beta_k}) B^{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_k \beta_k}(x)$$

As duas mais óbvias (e úteis):

Escalares: $\phi'(x') = \phi(x)$

Vetores: $A'_{\mu}(x') = \Lambda_{\mu}^{\nu} A_{\nu}(x)$

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} = \eta_{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \Lambda^{\alpha}_{\beta}$$

Representações Fermiônicas: é possível mostrar que existem representações impossíveis de se obter através do simples produto de Λ 's. Em especial o objeto:

$$S^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{eq. 14.1})$$



satisfaz a álgebra de Lie do grupo de Lorentz, e portanto temos uma representação do grupo de Lorentz em:

$$M_D = e^{-\frac{i}{2} \Theta_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} \quad \left(\Theta_{\mu\nu} \text{ e } S^{\mu\nu} \text{ são antissimétricos} \right)$$

Vale: $M_D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu M_D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$

Assim, se definirmos um campo tal que: $\psi'(x') = M_D(\Lambda) \psi(x)$

O objeto $\gamma^\mu \partial_\mu \psi$ será covariante $(\gamma^\mu \partial'_\mu \psi'(x') \rightarrow M_D(\Lambda) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x))$

O que quer dizer que a equação de Dirac será também covariante e a Lagrangeana que leva a ela é invariante. Veremos isso com mais detalhes mais adiante. Os interessados podem estudar o material adicional: http://www.ift.unesp.br/users/matheus/files/courses/2014tqc1/V_Kaplunovsky_Dirac.pdf

Note que, assim como as transformações Lorentz são generalizações das rotações de vetores e escalares em 3D, a transformação dos Spinors é uma generalização da rotação de spins, e de fato o campo spinorial descreverá partículas de spin 1/2.

Quantização por Integrais de Trajetória:

O Oscilador Harmônico

(Ramond cap2, Nastase 2)

Além da imposição de relações de comutação, existe uma outra forma de quantizar um sistema clássico: usando integrais de trajetória. Para entender do que se trata voltemos a um sistema não relativístico que entendemos bem (talvez o único que entendemos bem): o oscilador harmônico.

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2} - \omega^2 \frac{q^2}{2} \quad \Rightarrow \quad H = p \dot{q} - \left(\frac{\dot{q}^2}{2} - \omega^2 \frac{q^2}{2} \right) =$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} \quad = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2)$$

$\hbar = 1$

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega q + i p)$$

$$a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega q - i p)$$

(eq. 14.2)

$$\begin{aligned} p &= -i \sqrt{\frac{\omega}{2}} (a - a^\dagger) \\ q &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a + a^\dagger) \end{aligned} \quad (\text{eq. 15.1})$$

$$H = \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega}{2} (a - a^\dagger)^2 + \frac{\omega}{2} (a + a^\dagger)^2 \right) = \frac{\omega}{2} (a a^\dagger + a^\dagger a) \quad (\text{eq. 15.2})$$

poderíamos juntar isso pois ainda não quantizamos

Definimos os Brackets de Poisson como:

$$\begin{aligned} f &= f(p, q) \\ g &= g(p, q) \end{aligned} \rightarrow \{f, g\}_{\text{PB}} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (\text{eq. 15.3})$$

$$\therefore \{p_i, q_j\}_{\text{PB}} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}_0 \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_0 - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_k}}_{\delta_{kj}} \right) = -\delta_{ij}$$

$\delta_{ik} \cdot \delta_{kj} = \delta_{ij}$

Podemos escrever as equações de Hamilton (eq 8.2) na forma:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\}_{\text{PB}} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_0 \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\}_{\text{PB}} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}_0 \frac{\partial H}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{\delta_{ik}} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \end{aligned} \quad (\text{eq. 15.4})$$

Quantização Canônica do Oscilador Harmônico

O que chamamos de quantização canônica consiste em transformar q e p em operadores \hat{q} e \hat{p} , substituindo os Brackets de Poisson por comutadores:

$$q, p \rightarrow \hat{q}, \hat{p} \quad \{, \}_{\text{PB}} \rightarrow -\frac{i}{\hbar} [,]$$

$\hbar = 1$

$$\{p_i, q_j\}_{PB} = -\delta_{ij} \rightarrow -i [p_i, \hat{q}_j] = -\delta_{ij}$$

$$[p_i, \hat{q}_j] = -i \delta_{ij}$$

(eq. 16.1)

$$[p, \hat{q}] = -i$$

(eq. 15.1)

$$[p, \hat{q}] = \left[-i \sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \right] =$$

$$= -\frac{i}{2} \left\{ [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] - [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \right\} = -i [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = -i$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

(eq. 16.2)

Podemos usar a mesma substituição nas equações de Hamilton (15.4) para obter a evolução destes operadores no quadro de Heisenberg:

$$\dot{\hat{q}}_i = \{q_i, H\}_{PB} \rightarrow \frac{d\hat{q}_i}{dt} = -i [\hat{q}_i, \hat{H}]$$

$$\dot{\hat{p}}_i = \{p_i, H\}_{PB} \rightarrow \frac{d\hat{p}_i}{dt} = -i [\hat{p}_i, \hat{H}]$$

(eq. 16.3)

E o hamiltoniano pode ser obtido de (15.2)

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2} \left(\underbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}}_{1 + \hat{a}^\dagger\hat{a}} \right) = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

(eq. 16.4)

se tivéssemos acompanhado os h's corretamente

Os autoestados deste hamiltoniano são definidos em termos de um número de ocupação n e os operadores \hat{a}^\dagger e \hat{a} são operadores de criação e aniquilação:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = A_n |n+1\rangle \quad ; \quad \hat{a} |n\rangle = A'_n |n-1\rangle$$

(eq. 16.5)

normalizações

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle \equiv \hat{N} |n\rangle = n |n\rangle$$

(eq. 16.6)

Operador Número

No estado fundamental, ou vácuo, definido por $a|\Omega\rangle = 0$

$$\therefore N|\Omega\rangle = 0$$

$$|\Omega\rangle = |n=0\rangle$$

a energia é:

$$\hat{H} = \omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\hat{H}|n=0\rangle = E_0|n=0\rangle$$

$$E_0 = \frac{\omega}{2} \quad \text{Energia de ponto zero ou do vácuo}$$

Podemos definir um hamiltoniano sem esta energia de ponto zero, definindo o **ordenamento normal**:

$$:a^\dagger a + a a^\dagger + a a + a^\dagger a^\dagger: = a^\dagger a + a^\dagger a + a a + a^\dagger a^\dagger$$

Coloca todos os a^\dagger 's a esquerda dos a 's

$$:\hat{H}: = \omega a^\dagger a = \omega \hat{N}$$

Integral de Trajetória de Feynman

(Ryder 5.1)

Uma quantidade de frequentemente queremos saber é, dado que uma partícula estava em uma posição q em um tempo t , qual é a probabilidade de a encontrarmos na posição q' no tempo t' . Em uma linguagem mais "quântica" dada a função de onda:

$$\Psi(q, t)$$

Gostaríamos de conhecer o propagador F , definido por:

$$\Psi(q', t') = \int F(q', t'; q, t) \Psi(q, t) dq \quad (\text{eq. 17.1})$$

$|\Psi(q', t')|^2$ é distribuição de probabilidades para q' no tempo t' , independente do que aconteceu antes de t'

A equação 17.1 é uma simples expressão da causalidade, considerando que a partícula pode ter começado em qualquer lugar. Claramente F é a amplitude de probabilidade de transição entre a função em (q, t) e a em (q', t') e:

$$P(q', t'; q, t) = |F(q', t'; q, t)|^2 \quad \text{é a probabilidade de transição}$$

Vejamos como podemos expressar F em termos de grandezas familiares:

$$\Psi(q, t) = \langle q | \Psi, t \rangle$$

↳ Quadro de Schrödinger

$$|\Psi, t\rangle_S = e^{-i\hat{H}t} |\Psi\rangle_H$$

Quadro de Heisenberg

$$\hat{q}_S |q\rangle = q |q\rangle \quad \hat{q}_H(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{q}_S e^{-i\hat{H}t}$$

$$\hat{q}_H(t) |q, t\rangle = e^{i\hat{H}t} \hat{q}_S e^{-i\hat{H}t} e^{i\hat{H}t} |q\rangle = e^{i\hat{H}t} q |q\rangle = q |q, t\rangle$$

Definamos o vetor:

$$|q, t\rangle = e^{i\hat{H}t} |q\rangle \quad (\text{Moving Frame})$$

$$\therefore \Psi(q, t) = \langle q | e^{-i\hat{H}t} |\Psi\rangle_H = \langle q, t | \Psi\rangle_H$$

$$\hat{1} = \int |q, t\rangle \langle q, t| dq$$

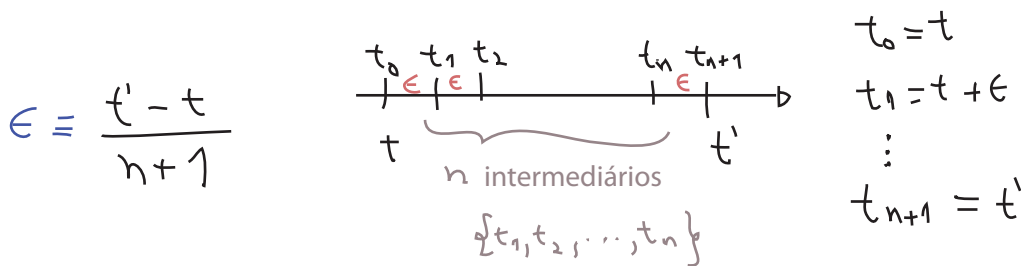
Dado: $\underbrace{\langle q', t' | \Psi\rangle_H}_{\Psi(q', t')} = \int \underbrace{\langle q', t' | q, t\rangle}_{\Psi(q, t)} \underbrace{\langle q, t | \Psi\rangle_H}_{\Psi(q, t)} dq$

$$\Psi(q', t') = \int \langle q', t' | q, t\rangle \Psi(q, t) dq$$

Que, comparada com 17.1, nos dá: $F(q', t', q, t) = \langle q', t' | q, t\rangle = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q\rangle$

Vejamos agora como expressar esta grandeza em termos da integral de trajetória:

Primeiramente, dividimos o tempo em $(n+1)$ pequenos intervalos ϵ :

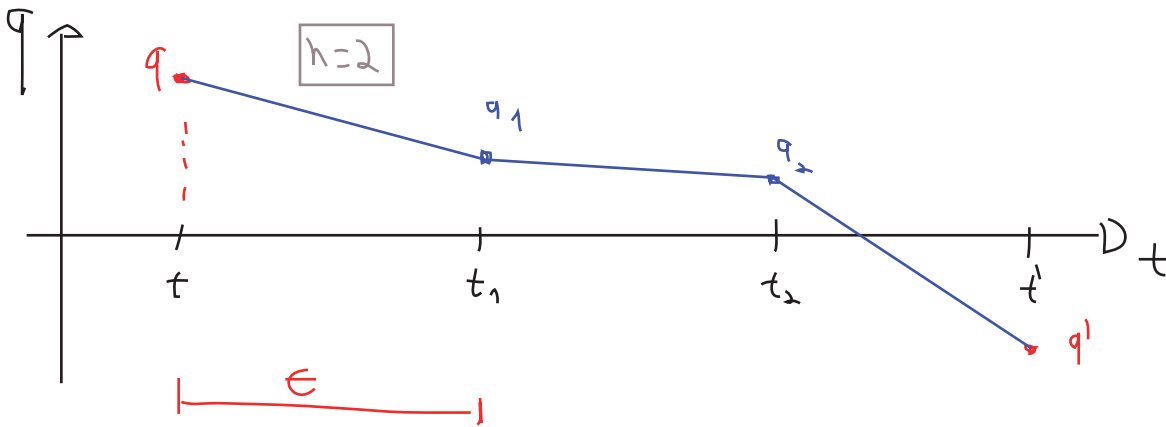


Notando que o tempo é só um índice e para qualquer tempo fixo temos a relação de completeza:

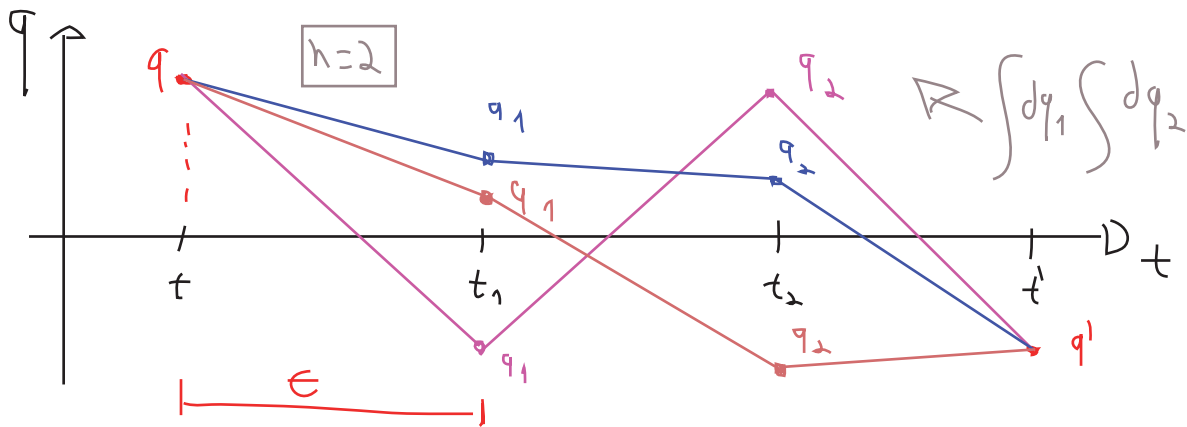
$$\forall t_i \Rightarrow \int dq_i |q_i, t_i\rangle \langle q_i, t_i| = 1 \quad q_i \equiv q(t_i) \quad (\text{estamos sempre pensando no limite do contínuo})$$

$$F(q', t', q, t) = \int dq_1 \dots dq_n \underbrace{\langle q', t' | q_n, t_n\rangle}_{\text{n identidades}} \underbrace{\langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1}\rangle}_{\text{identidade}} \dots \underbrace{\langle q_2, t_2 | q_1, t_1\rangle}_{\text{identidade}} \underbrace{\langle q_1, t_1 | q, t\rangle}_{\text{identidade}}$$

Se esquecermos as integrais por um instante, percebemos que os elementos de matriz estão descrevendo um caminho:



Este caminho, no entanto, é bastante diferente do caminho clássico. Mesmo que façamos $\epsilon \rightarrow 0$, a diferença $q_{i+1} - q_i$ não é forçada a zero e acabamos com um caminho arbitrariamente descontínuo. De fato a expressão 18.1 indica que estamos levando em conta uma infinidade destas trajetórias:



A esta operação daremos o nome de "integral sobre todas as trajetórias" ou "integral de trajetória", e definimos o símbolo:

$$\mathcal{D}q(t) \equiv \prod_{i=1}^n dq(t_i) \quad (\text{eq. 19.1})$$

$$\int \mathcal{D}q(t) \equiv \prod_{i=1}^n \int dq(t_i) \quad (\text{eq. 19.2})$$

Podemos também obter uma expressão no espaço dos momentos:

$$\langle q | P \rangle = e^{iPq}$$

$$|q\rangle = \int \frac{dp}{2\pi} |p\rangle \langle p | q \rangle$$

$$|p\rangle = \int dq |q\rangle \langle q | p \rangle = \int dq \int \frac{dp'}{2\pi} |p'\rangle \langle p' | q \rangle \langle q | p \rangle = \int \frac{dp'}{2\pi} |p'\rangle \int \frac{dp''}{2\pi} \delta(p-p'') = |p\rangle$$

$$\int dq e^{i q (p-p')} = 2\pi \delta(p-p')$$

$$\langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \langle q(t_n) | e^{-i \epsilon \hat{H}} | q(t_{n-1}) \rangle = \int \frac{dp(t_n)}{2\pi} \langle q(t_n) | p(t_n) \rangle \langle p(t_n) | e^{-i \epsilon \hat{H}} | q(t_{n-1}) \rangle$$

É preciso ter cuidado com Hamiltonianas que tenham produtos entre os operadores \hat{p} e \hat{q} , neste caso é preciso "Weyl-ordenar" o Hamiltoniano antes de prosseguir - isto significa usar as relações de comutação até que tenhamos todos os operadores \hat{p} à esquerda dos operadores \hat{q} (ver Peskin pg 281). Assumindo que isto já foi feito e lembrando que, para ϵ pequeno, não precisamos nos preocupar com termos quadráticos em \hat{H} , vale:

$$\begin{aligned} \langle p(t_n) | e^{-i \epsilon \hat{H}(\hat{p}, \hat{q})} | q(t_{n-1}) \rangle &= \langle p(t_n) | 1 - i \epsilon \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) | q(t_{n-1}) \rangle = \\ &= \langle p(t_n) | 1 - i \epsilon H(p(t_n), q(t_{n-1})) | q(t_{n-1}) \rangle = e^{-i \epsilon H[p(t_n), q(t_{n-1})]} \langle p(t_n) | q(t_{n-1}) \rangle = \\ &= e^{-i \epsilon H[p(t_n), q(t_{n-1})]} e^{-i p(t_n) q(t_{n-1})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle &= \int \frac{dp(t_n)}{2\pi} e^{i q(t_n) p(t_n)} e^{-i \epsilon H[p(t_n), q(t_{n-1})]} e^{-i p(t_n) q(t_{n-1})} = \\ &= \int \frac{dp(t_n)}{2\pi} e^{i p(t_n) [q(t_n) - q(t_{n-1})]} e^{-i \epsilon H[p(t_n), q(t_{n-1})]} \end{aligned}$$

Com isso, a eq. 18.1 fica:

$$\begin{aligned} F(q', t', q, t) &= \int \left(\prod_i^n dq_n \right) \underbrace{\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle}_{P_{n+1}} \dots \underbrace{\langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle}_{P_1} = \\ &= \int \left(\prod_i^n dq(t_i) \right) \left(\prod_j^{n+1} \frac{dp(t_j)}{2\pi} \right) e^{i \left\{ \underbrace{p(t_{n+1}) [q(t_{n+1}) - q(t_n)]}_{\epsilon} + \dots + \underbrace{p(t_1) [q(t_1) - q(t_0)]}_{\epsilon} \right\}} \times \\ &\quad \times e^{-i \epsilon \left\{ H[p(t_{n+1}), q(t_n)] + \dots + H[p(t_1), q(t_0)] \right\}} = \end{aligned}$$

$$\begin{cases} t_0 = t \\ t_{n+1} = t' \\ q_0 = q(t) \\ q_{n+1} = q(t') \end{cases}$$

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (n \rightarrow \infty)$

$$= \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) \text{EXP} \left\{ i \int_{t_0}^{t_{n+1}} dt \left[p(t) \dot{q}(t) - H[p(t), q(t)] \right] \right\} \quad (\text{eq. 20.1})$$