A equação 20.1 é bastante geral, mas é possível encontrar uma expressão mais simples (e mais útil) no caso de hamiltonianas que tenham a forma:

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2} + V(q) \qquad (m=1) \qquad \text{(eq. 21.1)}$$

Neste caso temos: $$F(q't', q t) = \int \mathcal{D}q(t)\, \mathcal{D}p(t)\, \exp\left\{ i \int_t^{t'} dt \left[ p(t)\dot{q}(t) - \frac{p(t)^2}{2} - V[q(t)] \right] \right\}$$

(eq. 21.2)

E podemos fazer a integral em *p(t)* como um Gaussiana generalizada, para ver o que isso quer dizer façamos um interlúdio de matemática.

## Gaussianas

A gaussiana que conhecemos é:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Elevando isto ao quadrado podemos obter:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, dy\, e^{-\alpha(x^2+y^2)} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} r\, dr\, e^{-\alpha r^2} = \frac{\pi}{\alpha}$$

Com n integrais multiplicadas (e trocando $\alpha$ por $\alpha_n/2$):

$$\int dx_1 \cdots dx_n \, \exp\left[ -\frac{1}{2} \sum_i^n \alpha_i x_i^2 \right] = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha_1}} \cdots \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha_n}} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\prod \alpha_i^{1/2}}$$

podemos organizar os $\alpha$'s em uma matriz, suponha: $$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Então o produto escalar:

$$(\vec{x}, A\vec{x}) = x_i A_{ij} x_j = \sum_i^n \alpha_i x_i^2 \qquad \& \qquad \text{Det} A = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = \prod \alpha_i$$

Logo, podemos re-escrever a integral:

$$\int d^n x \, e^{-\frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j} = (2\pi)^{n/2} (\text{Det} A)^{-1/2} \qquad \text{(eq. 21.3)}$$

que de fato vale para qualquer matriz (real) A que seja diagonalizável.

Podemos ainda considerar os casos em que o "quadrado não está completo":

$$S = \frac{1}{2}\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b}^T \cdot \vec{x}$$

Pensemos nele como um ação (o que de fato será, quando voltarmos à física). A solução clássica dada pelo princípio da extrema ação seria (mesmo sem pensar nisso como ação, estamos buscando o mínimo de S):

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{2}x_i A_{ij} x_j + b_i x_i\right) = \frac{1}{2}\delta_{ik} A_{ij} x_j + \frac{1}{2} x_i A_{ij}\delta_{jk} + b_k = 0$$

$$\frac{1}{2}A_{kj}x_j + \frac{1}{2}A_{ij}x_i = -b_k$$

$$A_{ij} = A_{ji} \Rightarrow \underbrace{\vec{x}_c}_{\text{clássico}} = -A^{-1}\vec{b}$$

$$S(\vec{x}_c) = \frac{1}{2}\left(-A^{-1}\vec{b}\right)^T \cdot A \cdot \left(-A^{-1}\vec{b}\right) + \vec{b}^T\left(-A^{-1}\vec{b}\right) = -\frac{1}{2}\vec{b}^T A^{-1}\vec{b}$$

Podemos então escrever:

$$S = \underbrace{\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{x}_c)^T \cdot A\,(\vec{x}-\vec{x}_c) - \frac{1}{2}\vec{b}^T A^{-1}\vec{b}}_{\text{equação da parábola com mínimo em } \vec{x}_c}$$

$$\int d^n x\, e^{-\overbrace{\left(\frac{1}{2}\vec{x}^T\cdot A\cdot\vec{x} + \vec{b}^T\cdot\vec{x}\right)}^{S(x)}} = e^{-S(x_c)}\int d^n x\, e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{x}_c)^T\cdot A\cdot(\vec{x}-\vec{x}_c)} = (2\pi)^{n/2}(\mathrm{Det}\,A)^{-1/2}\, e^{\frac{1}{2}\vec{b}^T\cdot A^{-1}\vec{b}}$$

(eq. 22.1)

— // — // —

Voltando a física, podemos fazer a integral destacada abaixo:

$$F(q't', q t) = \int \mathcal{D}q(t)\, \mathrm{EXP}\left\{-i\int_t^{t'} dt\, V[q(t)]\right\} \underbrace{\int \mathcal{D}p(t)\, \mathrm{EXP}\left\{i\int_t^{t'} dt\left[p(t)\dot{q}(t) - \frac{p(t)^2}{2}\right]\right\}}_{\prod_i^n \frac{dp(t_i)}{2\pi}\mathrm{EXP}\left\{i\epsilon\left[p(t_i)\dot{q}(t_i) - \frac{1}{2}p(t_i)^2\right]\right\}}$$

com: $x_i = p(t_i)$ $\quad b = -i\epsilon\dot{q}(t_i)$ $\quad (A^{-1})_{ij} = -\frac{i}{\epsilon}\delta_{ij}$

$A_{ij} = i\epsilon\,\delta_{ij}$

podemos usar 22.1 diretamente, obtendo:

$$\int \mathcal{D}p(t)\, \mathrm{EXP}\left\{ i\int_t^{t'} dt \left[ p(t)\dot{q}(t) - \frac{p(t)^2}{2} \right] \right\} = \frac{1}{(2\pi)^n} (2\pi)^{n/2} (i\epsilon)^{-n/2}\, \mathrm{Exp}\left[ \frac{1}{2} \left(+i\cancel{\epsilon}\, \dot{q}(t_i)\right) \left(+\frac{1}{\cancel{\epsilon}} \delta_{ij}\right) \left(+i\epsilon\, \dot{q}(t_j)\right) \right] =$$

$$= \underbrace{\frac{(i\epsilon)^{-n/2}}{(2\pi)^{n/2}}\, \mathrm{Exp}\left[ i\int_t^{t'} dt\, \frac{\dot{q}(t)^2}{2} \right]}_{\mathcal{N}} \qquad \text{( eq. 23.1 )}$$

Com isso, nossa amplitude de transição, fica em uma forma bastante reveladora:

$$F(q't', q\,t) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t)\, \mathrm{EXP}\left\{ i\int_t^{t'} dt \left[ \frac{\dot{q}(t)^2}{2} - V[q(t)] \right] \right\} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t)\, \mathrm{EXP}\left\{ i\int_t^{t'} dt\, L(q,\dot{q}) \right\}$$

$$\boxed{F(q't', q\,t) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}_{q(t)}\, e^{iS[q]}} \qquad \text{( eq. 23.2 )}$$

Paremos aqui um momento para notar duas coisas:

(1) As equações 20.1 e 23.2 nos dão formas bastante curiosas de calcular um objeto essencialmente quântico: a amplitude de probabilidade de transição. Curiosas porque, no lado direito da equação temos as funções Langrangeana e Hamiltoniana clássicas do sistema (notem que trocamos os operadores $\hat{q}$ e $\hat{p}$ por seus valores esperados no meio da dedução). O comportamento quântico vem do fato de estarmos integrando sobre todas as trajetórias possíveis para *q(t)* e *p(t)* (a exponencial complexa também desempenha um papel)

(2) Na equação 23.2 fica claro que a soma sobre trajetórias é ponderada pela exponencial da ação, e diferentes trajetórias vão ter interferências construtivas ou destrutivas dependendo de diferença entre suas ações.

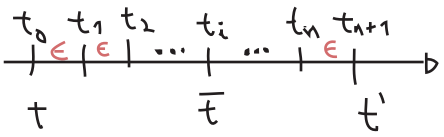
Temos então uma forma alternativa de quantizar um sistema, especialmente útil quando estamos falando de amplitudes de transição. Ao invés de definir operadores e relações de comutação, usamos as integrais de trajetória. Note que os dois métodos são completamente equivalentes, acima usamos a evolução temporal que se obtem como solução da equação de Schrödinger para chegar nas integrais de trajetória. Feynman fez o oposto, ele partiu de expressão 23.2 e mostrou que as funções de onda em 17.1 satizfazem a equação de Schrödinger (o que só vale para Hamiltonianas do tipo 21.1).

## Funções de Correlação

Podemos também usar o método acima para obter outros observáveis, o mais simples sendo a função de um ponto:

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}) | q, t \rangle \qquad\qquad t < \bar{t} < t'$$

É fácil imaginar como tratar este objeto no procedimento anterior. Discretizamos o tempo da mesma forma mas, assumindo que a discretização é "fina" o bastante, podemos identificar $\bar{t}$ com um dos $t_i$ intermediários:




Em meio aos diversos $\langle q_i, t_i | q_{i-1}, t_{i-1} \rangle$ que apareceram antes, vai haver um bracket diferente:

$$\langle q_{i+1}, t_{i+1} | \hat{q}(\bar{t}) | q_i, t_i \rangle \overset{t_i = \bar{t}}{=} \underbrace{q(\bar{t})}_{\text{não é mais um operador}} \langle q_{i+1}, t_{i+1} | q_i, t_i \rangle$$

isto é exatamente o que tínhamos antes. Então a conta procede normalmente, lembrando apenas que temos este q(t) dentro das integrais.

$$\therefore \langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \; e^{iS[q]} q(\bar{t})$$

A função de dois (ou mais) pontos é similar, mas há uma sutileza:

$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) | q, t \rangle \rightarrow$ só sabemos tratar isso se de fato: $t < \bar{t}_1 < \bar{t}_2 < t'$

$$\int \mathcal{D}q \langle q', t' | q_n, t_n \rangle \ldots \underbrace{\langle q_{j+1}, t_{j+1} | \hat{q}(\bar{t}_2) | q_j, t_j \rangle}_{\bar{t}_2 = t_j \;\Rightarrow\; q(\bar{t}_2) \langle\;|\;\rangle} \ldots \underbrace{\langle q_{i+1}, t_{i+1} | \hat{q}(\bar{t}_1) | q_i, t_i \rangle}_{\bar{t}_1 = t_i \;\Rightarrow\; q(\bar{t}_1) \langle\;|\;\rangle} \ldots \langle q_1, t_1 | q, t \rangle$$

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \; e^{iS[q]} q(\bar{t}_2) q(\bar{t}_1) \qquad \text{(eq. 24.1)}$$

note que são funções e comutam

Por outro lado, poderíamos ter calculado:

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}_1) \hat{q}(\bar{t}_2) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \; e^{iS[q]} q(\bar{t}_2) q(\bar{t}_1) \qquad \text{(eq. 24.2)}$$

desde que $t < \bar{t}_2 < \bar{t}_1 < t'$

Logo vemos que, tentando escrever 24.1 e 24.2 como uma única expressão, temos:

$$\boxed{\int \mathcal{D}q \; e^{iS[q]} \, q(\bar{t}_2)\, q(\bar{t}_1) = \langle q', t' | T\{\hat{q}(\bar{t}_2)\, \hat{q}(\bar{t}_1)\} | q, t \rangle} \quad \text{(eq. 25.1)}$$

onde aparece o Produto Temporalmente Ordenado:

$$\boxed{T\{\hat{q}(\bar{t}_2)\, \hat{q}(\bar{t}_1)\} \equiv \begin{cases} \hat{q}(\bar{t}_1)\, \hat{q}(\bar{t}_2) & \leftrightarrow \; \bar{t}_2 < \bar{t}_1 \\ \hat{q}(\bar{t}_2)\, \hat{q}(\bar{t}_1) & \leftrightarrow \; \bar{t}_1 < \bar{t}_2 \end{cases}} \quad \text{(eq. 25.2)}$$

Tanto 25.1 e 25.2 são generalizados de forma direta para um número maior de operadores:

$$T\{\hat{q}(\bar{t}_1) \ldots \hat{q}(\bar{t}_N)\} \equiv \hat{q}(\bar{t}_1) \ldots \hat{q}(\bar{t}_N) \leftrightarrow \bar{t}_N < \ldots < \bar{t}_1$$

ordenados temporalmente

$$\boxed{G_n(\bar{t}_1, \ldots \bar{t}_n) = \langle q', t' | T\{\hat{q}(\bar{t}_1) \ldots \hat{q}(\bar{t}_n)\} | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \; e^{iS[q]} \, q(\bar{t}_1) \ldots q(\bar{t}_n)} \quad \text{(eq. 25.3)}$$

Função de n-pontos ou Função de Correlação (de n pontos) ou Correlator.

Em breve veremos em que contexto estes correlatores aparecem e porque estamos interessados neles. Definamos um outro objeto que nos será útil, lembrando que para qualquer conjunto $\{a_n\}$ podemos definir a função geradora F(z):

$$F(z) \equiv \sum_n \frac{1}{n!} a_n z^n$$

tal que: $$a_n = \left. \frac{d^n}{dz^n} F(z) \right|_{z=0}$$

(conhecer esta função nos permiter obter qualquer elemento do conjunto, bastando fazer o número apropriado de derivações)

O equivalente para o conjunto de todos os correlatores $\{G_n\}$ seria o funcional gerador:

$$\boxed{Z[J] \equiv \sum_{N \geq 0} \int dt_1 \ldots \int dt_N \underbrace{\frac{i^N}{N!}}_{\text{convencional}} G_N(t_1, \ldots, t_N)\, J(t_1) \ldots J(t_N)} \quad \text{(eq. 25.4)}$$

A diferença é que os elementos do conjunto em questão são funções (de vários t's) e por isso a variável em que derivaremos deve ser também uma função (os J's) e o gerador vira um funcional.

Podemos escrever ele em uma forma mais conveniente substituindo $G_n$ de 25.3:

$$Z[J] = \sum_{N>0} \int dt_1 \dots \int dt_N \, \frac{i^N}{N!} J(t_1)\dots J(t_N) \int \mathcal{D}q \, e^{iS[q]} q(t_1)\dots q(t_N) =$$

$$\int dt_1 \, iJ(t_1)\, q(t_1) \int dt_2 \, iJ(t_2)\, q(t_2) \dots$$

$$= \int \mathcal{D}q \, e^{iS[q]} \sum_{N>0} \frac{1}{N!} \left[ \int dt \; i\, q(t)\, J(t) \right]^N = \int \mathcal{D}q \, e^{i\underbrace{\left[S[q] + \int dt \, q(t) J(t)\right]}_{S[q,J]}}$$

$$\boxed{Z[J] = \int \mathcal{D}q \, e^{iS[q,J]}}$$

(eq. 26.1)

Para ver como podemos obter qualquer Gn, basta fazer as derivadas funcionais:

$$\boxed{\frac{\delta^N}{i\delta J(t_1)\dots i\delta J(t_N)} Z[J]\Bigg|_{J=0} = \int \mathcal{D}q \, e^{iS[q]} q(t_1)\dots q(t_N) = G_N(t_1,\dots,t_N)}$$

(eq. 26.2)

Para um tratamento um pouco mais longo de derivação funcional, dêem uma olhada nas minhas notas de TQCII/2012 ( http://www.ift.unesp.br/users/matheus/files/courses/2012tqc2/FirstInstallment_b.pdf ), pgs 6 a 10 e as referências lá citadas. Para os nossos fins basta saber que:

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x-y) \qquad\qquad \frac{\delta g(f(x))}{\delta f(y)} = \delta(x-y) \left.\frac{\partial g}{\partial f}\right|_{f=f(x)}$$

De forma que:

$$\frac{\delta^2}{i\delta J(t_1)\, i\delta J(t_2)} Z[J] = \frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \left\{ \frac{\delta}{i\delta J(t_2)} \int \mathcal{D}q \, e^{i\left[S[q] + \int dt \, q(t) J(t)\right]} \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}q \, \frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \left\{ e^{i\left[S[q] + \int dt\, q(t)J(t)\right]} \frac{\delta}{i\delta J(t_2)} \left[ i\left(S[q] + \int dt\, q(t) J(t)\right)\right]\right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}q \, \frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \left\{ e^{i\left[S[q] + \int dt\, q(t)J(t)\right]} \int dt \; q(t)\, \delta(t - t_2)\right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}q \; q(t_2) \underbrace{\frac{\delta}{i\delta J(t_1)} e^{i\left[S[q] + \int dt\, q(t)J(t)\right]}}_{q(t_1)\, e^{i[\dots]}} = \int \mathcal{D}q \;\; q(t_2) q(t_1)\, e^{iS[q,J]}$$

$$\therefore \; \left.\frac{\delta^2}{i\delta J(t_1)\, i\delta J(t_2)} Z[J] \right|_{J=0} = \int \mathcal{D}q \;\; q(t_2) q(t_1)\, \overset{J=0}{e^{iS[q]}} = G_2(t_1, t_2)$$

Com este conjunto de idéias e ferramentas podemos passar para a quantização dos campos.

## Quantização Canônica do Campo Escalar

( Peskin 2.3, Nastase 3)

Queremos agora fazer a quantização do campos mais “simples” a disposição, o campo escalar. A lagrangeana mais geral, invariante de lorentz, para um campo escalar real é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - V(\phi, \partial^\mu \phi) \qquad \text{(eq. 27.1)}$$

Para generalizar a quantização para o caso dos campos precisamos primeiro obter os Brackets de Poison da teoria. Uma vez que sabemos como fazer isto no caso de partículas (pontos), discretizaremos o espaço, definindo:

$$q_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V}\, \phi_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V}\, \phi(\vec{x}_i, t)$$

$$p_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V}\, \pi_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V}\, \pi(\vec{x}_i, t)$$