$$= \int \mathcal{D}q \frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \left\{ e^{i\left[S[q] + \int dt\, q(t)J(t)\right]} \frac{\delta}{i\delta J(t_2)} \left[i\left(S[q] + \int dt\, q(t) J(t) \right)\right] \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}q \frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \left\{ e^{i\left[S[q] + \int dt\, q(t)J(t)\right]} \int dt\, q(t)\, \delta(t - t_2) \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}q\, q(t_2) \underbrace{\frac{\delta}{i\delta J(t_1)} e^{i\left[S[q] + \int dt\, q(t)J(t)\right]}}_{q(t_1)\, e^{i[\dots]}} = \int \mathcal{D}q\, q(t_2) q(t_1)\, e^{iS[q,J]}$$

$$\therefore \left.\frac{\delta^2}{i\delta J(t_1)\, i\delta J(t_2)} Z[J]\right|_{J=0} = \int \mathcal{D}q\, q(t_2) q(t_1)\, e^{iS[q]} = G_2(t_1, t_2)$$

Com este conjunto de idéias e ferramentas podemos passar para a quantização dos campos.

Quantização Canônica do Campo Escalar

(Peskin 2.3, Nastase 3)

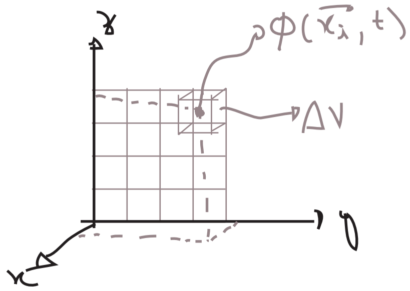
Queremos agora fazer a quantização do campos mais "simples" a disposição, o campo escalar. A lagrangeana mais geral, invariante de lorentz, para um campo escalar real é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - V(\phi, \partial^\mu \phi) \qquad \text{(eq. 27.1)}$$

Para generalizar a quantização para o caso dos campos precisamos primeiro obter os Brackets de Poison da teoria. Uma vez que sabemos como fazer isto no caso de partículas (pontos), discretizaremos o espaço, definindo:

$$q_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V}\, \phi_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V}\, \phi(\vec{x}_i, t)$$

$$p_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V}\, \pi_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V}\, \pi(\vec{x}_i, t)$$



$$\frac{1}{\Delta V}\frac{\partial f_i(t)}{\partial \phi_j(t)} \underset{\text{discretização}}{\overset{\text{contínuo}}{\rightleftarrows}} \frac{\delta f(\phi(\vec{x}_i,t),\pi(\vec{x}_i,t))}{\delta\phi(\vec{x}_j,t)}$$

$$\Delta V \longleftrightarrow d^3x$$

Com isso transformamos o espaço em um conjunto de coordenadas discretas, com o seguinte Bracket de Poison:

$$\{f,g\}_{P.B.}=\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)=\underbrace{\frac{1}{\Delta V}}_{\frac{\Delta V}{\Delta V^2}}\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_i}\frac{\partial g}{\partial \pi_i}-\frac{\partial f}{\partial \pi_i}\frac{\partial g}{\partial \phi_i}\right)=$$

CONT

$$=\int d^3x\left[\frac{\delta f}{\delta\phi}\frac{\delta g}{\delta\pi}-\frac{\delta f}{\delta\pi}\frac{\delta g}{\delta\phi}\right]$$

$$\{\phi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)\}_{P.B.}=\overbrace{\frac{\delta\phi(\vec{x}',t)}{\delta\phi(\vec{x}',t)}}^{1}\overbrace{\frac{\delta\pi(\vec{x}',t)}{\delta\pi(\vec{x},t)}}^{\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')}-0=\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\{\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{x}',t)\}_{P.B.}=\{\pi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)\}_{P.B.}=0$$

relações de comutação para tempos iguais

A partir destas relações, fica fácil fazer a quantização canônica do campo escalar:

$$\{\ ,\ \}_{P.B.}\longrightarrow -\frac{i}{\hbar}[\ ,\ ]$$

$$\boxed{\begin{gathered}[\phi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)]=i\hbar\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\\ [\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{x}',t)]=[\pi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)]=0\end{gathered}}$$

(eq. 28.1)
relações de comutação para tempos iguais

Façamos algumas definições extras, usando um paralelo com o oscilador harmônico:
(nada nos impede de fazer estas definições, a questão é se elas serão úteis - o que depende de quão similar a um conjunto de osciladores é este campo. Veremos ao final.)

$$\phi(\vec{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}\,\phi(\vec{p},t)\longrightarrow\phi(\vec{p},t)=\int d^3x\,e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\,\phi(\vec{x},t)$$

$$\Pi(\vec{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}\,\Pi(\vec{p},t)\longrightarrow\Pi(\vec{p},t)=\int d^3x\;e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\,\Pi(\vec{x},t)$$

$$\boxed{\begin{aligned}a(\vec{k},t)&=\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\,\phi(\vec{k},t)+\frac{i}{\sqrt{2\omega_k}}\,\Pi(\vec{k},t)\\ a^\dagger(\vec{k},t)&=\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\,\phi^\dagger(\vec{k},t)-\frac{i}{\sqrt{2\omega_k}}\,\Pi^\dagger(\vec{k},t)\end{aligned}}$$

note que, para o campo real: $\phi^\dagger=\phi$, $\Pi^\dagger=\Pi$

(eq. 29.1)

Determinaremos o valor de ω_k em seguida, por enquanto vamos apenas assumir que:

$$\omega_k=\omega(|\vec{k}|)$$

$$\therefore\;\phi(\vec{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left(a(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}+\underbrace{a^\dagger(\vec{p},t)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}}\right)$$

$$\int\frac{d^3p}{\omega_p}\,a^\dagger(\vec{p},t)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}=\int_{\infty}^{-\infty}\!\int_{\infty}^{-\infty}\!\int_{\infty}^{-\infty}\frac{(-d^3p)}{\omega_p}\,a^\dagger(-\vec{p},t)\,e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}=$$

$\vec{p}\to-\vec{p}$

$\omega_p\to\omega_p$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int$$

$$=\int\frac{d^3p}{\omega_p}\,a^\dagger(-\vec{p},t)\,e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\phi(\vec{x},t)&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\left(a(\vec{p},t)+a^\dagger(-\vec{p},t)\right)\\ \Pi(\vec{x},t)&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(-i\sqrt{\frac{\omega_p}{2}}\right)\left(a(\vec{p},t)-a^\dagger(-\vec{p},t)\right)e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\end{aligned}}$$

(eq. 29.2)

Colocando estas expressões em 28.1, obtemos as relações de comutação para os *a*'s:

$$\boxed{\begin{aligned}&[a(\vec{p},t),a^\dagger(\vec{p}',t)]=(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ &[a(\vec{p},t),a(\vec{p}',t)]=[a^\dagger(\vec{p},t),a^\dagger(\vec{p}',t)]=0\end{aligned}}$$

(eq. 29.3)

Checando: $[\phi(\vec{x},t),\Pi(\vec{x}',t)]=$

$$=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p'}{\cancel{(2\pi)^3}}\left(\cancel{+}\frac{i}{\cancel{2}}\right)\sqrt{\frac{\omega_p'}{\omega_p}}\Big(\cancel{-}\overbrace{\underbrace{[a(\vec{p},t),a^\dagger(-\vec{p}',t)]}_{\cancel{(2\pi)^3}\delta(\vec{p}+\vec{p}')}+\underbrace{[a^\dagger(-\vec{p},t),a(\vec{p}',t)]}_{-\cancel{(2\pi)^3}\delta(\vec{p}+\vec{p}')}}^{\cancel{2}\delta(\vec{p}+\vec{p}')}\Big)e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}'}=$$

$\vec{p}'=-\vec{p}$

$\omega_p'=\omega_p$

$$=i\int d^3p\sqrt{\frac{\cancel{\omega_p}}{\cancel{\omega_p}}}\,e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}'}=i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

O que vai fixar o valor de ω_p é a dinâmica do campo, que ainda não fixei uma vez que o potencial não foi especificado na eq. 27.1. Comecemos com o caso mais simples, o do Campo Escalar Livre:

$$V(\phi, \partial_\mu\phi) = 0 \Rightarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2$$

eq 9.1 $\Rightarrow$ $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] = 0 \Rightarrow -m^2\phi - \partial_\mu\left[-\partial^\mu\phi\right] = 0$

$$\boxed{\left(\partial_\mu\partial^\mu - m^2\right)\phi(x,t) = 0} \quad \text{(eq. 30.1)}$$

Eq. de Klein-Gordon

$$\partial_\mu\partial^\mu = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 = -\Box^2 \Rightarrow \left(\Box^2 + m^2\right)\phi = 0 \quad \text{(eq. 2.1)}$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - m^2\right)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{x}\vec{p}}\,\phi(\vec{p},t) = 0$$

$$\nabla^2 e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}} = \vec{\nabla}\cdot(i\vec{p})\, e^{i\vec{x}\vec{p}} = -|\vec{p}|^2 e^{i\vec{x}\vec{p}}$$

$$\int d^3x\, e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}'} \times \left(\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{x}\vec{p}}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + |\vec{p}|^2 + m^2\right)\phi(\vec{p},t) = 0\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{p}^{\,2} + m^2\right)\phi(\vec{p},t) = 0} \quad \text{(eq. 30.2)}$$

Klein-Gordon no espaço dos momentos

Esta equação tem como solução:

$$\phi(\vec{p},t) = \underbrace{F(\vec{p})\, e^{\mp i\omega t}}_{\text{Oscilador harmônico de frequência } \omega} \qquad \left(\text{LEMBRE QUE } \hbar = 1\right)$$

$$\Rightarrow \left((\pm i\omega)^2 + p^2 + m^2\right)F(\vec{p}) = 0 \qquad \boxed{\omega^2 = \omega_p^2 \equiv p^2 + m^2}$$

O que nos mostra que isso realmente se comporta como um oscilador harmônico e as definições acima serão úteis. Para deixar isto mais rigoroso, vamos calcular o operador Hamiltoniano:

$$H = \int d^3x\, \underbrace{\left[\pi(x,t)\,\dot{\phi}(x,t) - \mathcal{L}\right]}_{\mathcal{H}}$$

$$\pi(x,t) = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{\phi}} = \frac{\delta}{\delta\dot{\phi}}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}\dot{\phi} + \dots\right) = \dot{\phi}(\vec{x},t)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2$$

usando as definições de 29.2:

$$H = \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\Big\{ \frac{1}{2}\overbrace{(-i)^2\sqrt{\frac{\omega_p\omega_{p'}}{4}}\left[a(\vec{p},t)-a^{\dagger}(-\vec{p},t)\right]\left[a(\vec{p}',t)-a^{\dagger}(-\vec{p}',t)\right]e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\vec{x}}}^{\pi^2(\vec{x},t)}$$

$$+\frac{1}{2}\overbrace{\frac{1}{\sqrt{4\omega_p\omega_{p'}}}\left[a(\vec{p},t)+a^{\dagger}(-\vec{p},t)\right]\left[a(\vec{p}',t)+a^{\dagger}(-\vec{p}',t)\right]\overbrace{(\vec{\nabla}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}})\cdot(\vec{\nabla}e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}})}^{=-\vec{p}\cdot\vec{p}'e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\vec{x}}}}^{(\vec{\nabla}\phi)^2}$$

$$+\frac{1}{2}\overbrace{\frac{m^2}{\sqrt{4\omega_p\omega_{p'}}}\left[a(\vec{p},t)+a^{\dagger}(-\vec{p},t)\right]\left[a(\vec{p}',t)+a^{\dagger}(-\vec{p}',t)\right]e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\vec{x}}}^{m^2\phi^2}\Big\} =$$

$$=\int d^3x\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\vec{x}}\Big\{-\frac{\sqrt{\omega_p\omega_{p'}}}{4}\underbrace{(a(\vec{p},t)-a^{\dagger}(-\vec{p},t))(a(\vec{p}',t)-a^{\dagger}(-\vec{p}',t))}_{\mathrm{I}}$$

$$+\frac{-\vec{p}\cdot\vec{p}'+m^2}{4\sqrt{\omega_p\omega_{p'}}}\underbrace{(a(\vec{p},t)+a^{\dagger}(-\vec{p},t))(a(\vec{p}',t)+a^{\dagger}(-\vec{p}',t))}_{\mathrm{II}}\Big\} =$$

$$\int d^3x\, e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\vec{x}} = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')$$

fazemos a integral $\int d^3p' \longrightarrow \vec{p}' = -\vec{p}$

$$-\frac{\sqrt{\omega_p\omega_{p'}}}{4}\longrightarrow -\frac{\omega_p}{4} \qquad \frac{-\vec{p}\cdot\vec{p}'+m^2}{4\sqrt{\omega_p\omega_{p'}}}\longrightarrow\frac{\overbrace{\vec{p}^2+m^2}^{\omega_p^2}}{4\omega_p} = \frac{\omega_p}{4}$$

suprimi t só para encurtar a notação

$$\mathrm{I}\rightarrow\left[a(\vec{p},t)-a^{\dagger}(-\vec{p},t)\right]\left[a(-\vec{p},t)-a^{\dagger}(\vec{p},t)\right] = a(\vec{p})a(-\vec{p})-a(\vec{p})a^{\dagger}(\vec{p})-a^{\dagger}(-\vec{p})a(-\vec{p})+a^{\dagger}(-\vec{p})a^{\dagger}(\vec{p})$$

$$\mathrm{II}\rightarrow\left[a(\vec{p},t)+a^{\dagger}(-\vec{p},t)\right]\left[a(-\vec{p},t)+a^{\dagger}(\vec{p},t)\right] = a(\vec{p})a(-\vec{p})+a(\vec{p})a^{\dagger}(\vec{p})+a^{\dagger}(-\vec{p})a(-\vec{p})+a^{\dagger}(-\vec{p})a^{\dagger}(\vec{p})$$

$$-\mathrm{I}+\mathrm{II} = 2a(\vec{p})a^{\dagger}(\vec{p}) + \underbrace{2a^{\dagger}(-\vec{p})a(-\vec{p})}$$

posso fazer p ⟶ -p na integral

$$\boxed{H = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\omega_p}{2}\left(a^{\dagger}(\vec{p},t)a(\vec{p},t)+a(\vec{p},t)a^{\dagger}(\vec{p},t)\right)} \quad \text{(eq. 31.1)}$$

E aqui fica bem claro que estamos somando sobre um conjunto infinito (e contínuo) de osciladores harmônicos. Podemos obter as dependências temporais dos operadores *a*:

$$i\frac{d}{dt}a(\vec{p},t) = [a, H]$$

$$[a, a'a'^{+}] = a a' a'^{+} - a' \underbrace{a'^{+} a} = a a' a'^{+} - a'\left(-(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,') + a a'^{+}\right) =$$

$a = a(\vec{p})$
$a' = a(\vec{p}\,')$

$$= \cancel{a a' a'^{+}} + a'(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,') - \cancel{\underbrace{a' a}_{a a'} a'^{+}}$$

$$[a, a'^{+}a'] = \underbrace{a a'^{+}} a' - a'^{+} a' a = \left[(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,') + a'^{+} a\right] a' - a'^{+} a' a =$$

$$= a'(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,') + \cancel{a'^{+} a a'} - \cancel{a'^{+} a' a}$$

$$i \frac{d}{dt} a(\vec{p}, t) = \int \frac{d^3 p'}{\cancel{(2\pi)^3}} \frac{\omega_{p'}}{\cancel{2}} \cancel{2}\, a(\vec{p}\,', t) \cancel{(2\pi)^3} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,') = \omega_p\, a(\vec{p}, t) \qquad \text{(eq. 32.1)}$$

Cuja solução é:

$$\boxed{\begin{aligned} a(\vec{p}, t) &= a_{\vec{p}}\, e^{-i\omega_p t} \\ a^{+}(\vec{p}, t) &= a^{+}_{\vec{p}}\, e^{i\omega_p t} \end{aligned}} \qquad \text{(eq. 32.2)}$$

$$\therefore\ \phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} a_{\vec{p}}\, e^{-i\omega_p t} + e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} a^{+}_{\vec{p}}\, e^{i\omega_p t} \right)$$

$$E_p \equiv \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} = \omega_p$$

$$\boxed{\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{ipx} + a^{+}_{\vec{p}}\, e^{-ipx} \right) \Bigg|_{p^0 = E_p}} \qquad \text{(eq. 32.3)}$$

$$\Pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}, t) \qquad \text{(eq. 32.4)}$$

Discretização

Para ter uma imagem física mais clara do que sistema que estamos lidando aqui, vamos imaginar uma sistuação onde o campo esteja restrito a um volume finito *V*. O efeito disto é discretizar o momento, já que em uma direção *z* de comprimento L_z, somente existirão modos com:

$$k_{zn} = \frac{2\pi n}{L_z}$$

e aí fazemos: $\displaystyle \int d^3\vec{k} \to \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}}$ $\qquad$ $\delta^3(\vec{k} - \vec{k}\,') \to V \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$

definimos também: $a_{\vec{k}} \rightarrow \sqrt{V(2\pi)^3}\,\alpha_{\vec{k}}$

de forma que: $\left[a_{\vec{k}}, a^{+}_{\vec{k}'}\right] = (2\pi)^3\,\delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \rightarrow V(2\pi)^3\left[\alpha_{\vec{k}}, \alpha^{+}_{\vec{k}'}\right] = (2\pi)^3\, V\, \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$

$$\boxed{\left[\alpha_{\vec{k}}, \alpha^{+}_{\vec{k}'}\right] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}}$$
(eq. 33.1)

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{\omega_k}{2}\Big[\underbrace{a^{+}(\vec{k},t)\,a(\vec{k},t)}_{a^{+}_{\vec{k}}\cancel{e^{i\omega_k t}}\;a_{\vec{k}}\cancel{e^{-i\omega_k t}}} + a(\vec{k},t)\,a^{+}(\vec{k},t)\Big]$$

$\downarrow$

$$H = \frac{1}{\cancel{V}}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{\cancel{(2\pi)^3}}\,\frac{\omega_k}{2}\,\cancel{V(2\pi)^3}\left[\alpha^{+}_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}}\alpha^{+}_{\vec{k}}\right] = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_k}{2}\left(\alpha^{+}_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}}\alpha^{+}_{\vec{k}}\right)$$
(eq. 33.2)

$$\equiv \sum_{\vec{k}} h_{\vec{k}}$$

$h_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}}\left(N_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\right)$ Hamiltoniano de um oscilador de frequência $\omega_{\vec{k}}$

$\boxed{N_{\vec{k}} \equiv \alpha^{+}_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}}}$ Operador Número para o modo $\vec{k}$
(eq. 33.3)

Consideremos os autoestados deste operador: $N_{\vec{k}}\,|n_{\vec{k}}\rangle = n_{\vec{k}}\,|n_{\vec{k}}\rangle$

Vale toda a análise usual para osciladores harmônicos:

$\alpha^{+}_{\vec{k}}$ operador "levantamento" $\qquad n_{\vec{k}} \in \mathbb{N}_{+}$ número de ocupação

$\alpha_{\vec{k}}$ operador "abaixamento"

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\alpha_{\vec{k}}\,|n_{\vec{k}}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k}}}\,|n_{\vec{k}} - 1\rangle & |n_{\vec{k}}\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{n_k!}}\left(\alpha^{+}_{\vec{k}}\right)^{n}|0\rangle \\
\alpha^{+}_{\vec{k}}\,|n_{\vec{k}}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k}}+1}\,|n_{\vec{k}} + 1\rangle & \langle n_{\vec{k}}|m_{\vec{k}}\rangle = \delta_{mn} \\
h_{\vec{k}}\,|n_{\vec{k}}\rangle = \omega_{\vec{k}}\left(n_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\right)|n_{\vec{k}}\rangle & \\
\alpha_{\vec{k}}\,|0\rangle = 0 & \langle 0|N_{\vec{k}}|0\rangle = 0
\end{array}}$$
(eq. 33.3)

No contexto da teoria quântica de campos, usamos a terminologia:

$\alpha^{+}_{\vec{k}},\ \alpha_{\vec{k}}$ operadores de criação e aniquilação

$n_{\vec{k}}$ número de partículas

pois veremos que cada um destes modos de excitação do campo corresponde a uma partícula (de momento $\vec{k}$)

Espaço de Fock

O espaço de Hilbert construído com os autoestados do operador número é conhecido como Espaço de Fock, a representação do espaço de Fock para um único oscilador é dada por:

$$\{|n_{\vec{k}}\rangle\}$$

Como o Hamiltoniano total é dado pela soma dos Hamiltonianos de cada modo, os espaço de Hilbert é o produto direto dos espaços de cada modo:

$$|\{n_k\}\rangle \in \bigotimes_k \{|n_{\vec{k}}\rangle\}$$

$$|\{n_k\}\rangle = \prod_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}}} (\alpha^{+}_{\vec{k}})^{n_{\vec{k}}} \underbrace{|0\rangle}_{\text{mesmo vácuo para todos os modos}}$$

Ordenamento Normal

Assim como no caso do oscilador harmônico temos uma energia de modo zero para cada um dos modos permitidos:

$$\langle 0|h_{\vec{k}}|0\rangle = \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2}$$

No caso do campo, mesmo dentro de um volume finito, a energia total dada pela soma de todos estes modos zero é infinita:

$$E = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} = \infty$$

O que não pode ser um observável. Portanto definiremos a energia acima desta como a energia observável física do sistema e o estado em que todos os modos estão no estado fundamental fica definido como E = 0. Uma forma de operacionalizar esta redefinição da energia é usando Ordenamento Normal definido na pg 17:

$$:H: = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_k}{2}\left(\alpha^{+}_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}} + \overbrace{\underbrace{\alpha^{+}_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}}}_{\text{(compare com 33.2)}}}^{\alpha^{+}\alpha = \alpha\alpha^{+} - 1}\right) = H - \underbrace{\sum_{\vec{k}} \frac{\omega_k}{2}}_{\text{infinito subtraído}} = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} N_{\vec{k}}$$

$$\langle 0|:H:|0\rangle = 0$$

Nós vamos generalizar este procedimento, dizendo que somente operadores normalmente ordenados são observáveis: $\langle \Omega | :\hat{O}: | \Omega \rangle$