$n_{\vec{k}}$ número de partículas

pois veremos que cada um destes modos de excitação do campo corresponde a uma partícula (de momento $\vec{k}$)

Espaço de Fock

O espaço de Hilbert construído com os autoestados do operador número é conhecido como Espaço de Fock, a representação do espaço de Fock para um único oscilador é dada por:

$$\{|n_{\vec{k}}\rangle\}$$

Como o Hamiltoniano total é dado pela soma dos Hamiltonianos de cada modo, os espaço de Hilbert é o produto direto dos espaços de cada modo:

$$|\{n_k\}\rangle \in \bigotimes_k \{|n_{\vec{k}}\rangle\}$$

$$|\{n_k\}\rangle = \prod_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}}} (\alpha^{\dagger}_{\vec{k}})^{n_{\vec{k}}} |0\rangle$$

↳ mesmo vácuo para todos os modos

Ordenamento Normal

Assim como no caso do oscilador harmônico temos uma energia de modo zero para cada um dos modos permitidos:

$$\langle 0|h_{\vec{k}}|0\rangle = \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2}$$

No caso do campo, mesmo dentro de um volume finito, a energia total dada pela soma de todos estes modos zero é infinita:

$$E = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} = \infty$$

O que não pode ser um observável. Portanto definiremos a energia acima desta como a energia observável física do sistema e o estado em que todos os modos estão no estado fundamental fica definido como E = 0. Uma forma de operacionalizar esta redefinição da energia é usando Ordenamento Normal definido na pg 17:

$$:H: = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_k}{2} \left(\alpha^{\dagger}_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} + \overbrace{\underbrace{\alpha^{\dagger}_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}}_{\text{(compare com 33.2)}}}^{\alpha^{\dagger}\alpha = \alpha\alpha^{\dagger} - 1}\right) = H - \underbrace{\sum_{\vec{k}} \frac{\omega_k}{2}}_{\text{infinito subtraído}} = \sum_{\vec{k}} W_{\vec{k}} N_{\vec{k}}$$

$$\langle 0|:H:|0\rangle = 0$$

Nós vamos generalizar este procedimento, dizendo que somente operadores normalmente ordenados são observáveis: $\langle \Omega | :\hat{O}: | \Omega \rangle$

Notamos, finalmente, que:

$$\phi \sim \left(a_{\vec{p}}\, e^{ipx} + a^{\dagger}_{\vec{p}}\, e^{-ipx} \right) \Big|_{p^0 = E_p}$$

$$E_p = +\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} > 0$$

No entanto o segundo termo tem o "sinal errado" em frente a energia: $a_{\vec{p}}\, e^{+iE_p t}$ por isso é comum a seguinte denominação:

$a_{\vec{p}}\, e^{ipx} \sim a_{\vec{p}}\, e^{-iE_p t}$ $\leftrightarrow$ solução de frequência (ou energia) positiva

$a^{\dagger}_{\vec{p}}\, e^{-ipx} \sim a^{\dagger}_{\vec{p}}\, e^{iE_p t}$ $\leftrightarrow$ solução de frequência (ou energia) negativa

Note, no entanto, que o operador hamiltôniano: $H = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} N_{\vec{k}} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \omega_{\vec{k}} \underbrace{a^{\dagger}(\vec{k})\, a(\vec{k})}_{N^{CONT.}_{\vec{k}}}$

só tem autovalores maiores ou iguais a zero. Portanto não há mais o problema de energia negativa (não há nenhum estado com energia menor que zero).

Interpretação de Partícula

Lembrando que a quantidade conservada quando fazemos translações espaço-temporais é o tensor energia momento: $T^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \partial_{\nu}\phi - \mathcal{L}\,\delta^{\mu}{}_{\nu}$

E que podemos pensar nas componentes conservadas só por translações espaciais ou temporais:

$$t: \quad H = \int T^{00}\, d^3x = \int \left(\pi(x)\, \dot{\phi}(x) - \mathcal{L} \right) d^3x = \int \mathcal{H}\, d^3x$$

$$x^{\mu}: \quad P^{i} = \int T^{0i}\, d^3x = \int \pi\, \partial^{i}\phi\, d^3x \qquad \vec{P} = \int \pi\, \vec{\nabla}\phi\, d^3x$$

$$\boxed{\vec{P} = \int \pi\, \vec{\nabla}\phi\, d^3x = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \vec{p}\, a^{\dagger}_{\vec{p}}\, a_{p}} \quad \text{(eq. 35.1)}$$

Isto nos mostra que o operador $a^{\dagger}_{\vec{p}}$ age no vácuo para criar um estado com momento $\vec{p}$ e energia $E = +\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$ por isso interpretaremos estes estados como partículas de massa m

Note que definimos o momento total do estado em termos da carga conservada pela invariância sob translações, e não como o momento canônicamente conjugado.

Estatística de Bose-Einstein

Uma vez que: $\left[a^{+}_{\vec{k}}, a^{+}_{\vec{k}'}\right] = 0$ temos que:

$$|\psi\rangle = \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} \psi(\vec{k}_1,\vec{k}_2)\, \alpha^{+}_{\vec{k}_1} \alpha^{+}_{\vec{k}_2} |0\rangle = \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} \psi(\vec{k}_1,\vec{k}_2)\, \alpha^{+}_{\vec{k}_2} \alpha^{+}_{\vec{k}_1} |0\rangle$$

$$\underset{\vec{k}_1,\vec{k}_2}{} \rightarrow \vec{k}_2 \quad \vec{k}_1 \quad \vec{k}_1 \quad \vec{k}_2$$

$$= \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} \psi(\vec{k}_2,\vec{k}_1)\, \alpha^{+}_{\vec{k}_1} \alpha^{+}_{\vec{k}_2} |0\rangle$$

Estado qualquer definido pela função de onda $\psi(\vec{k}_1,\vec{k}_2)$

Vemos que este estado é simétrico sobre a troca $\vec{k}_1 \longleftrightarrow \vec{k}_2$ portanto, se interpretarmos cada criação como uma partícula (e neste caso são todas idênticas) de momento k, esta estarão satizfazendo uma estatística de Bose-Einstein: $\psi(\vec{k}_1,\vec{k}_2) = \psi(\vec{k}_2,\vec{k}_1)$

Propagador do Campo Escalar Livre

(Peskin 2.3-2.4, Nastase 4)

Vamos nos preocupar agora em achar expressões relativisticamente invariantes para as soluções da equação de Klein-Gordon e então abordar a questão da causalidade.

Vimos que, na versão discretizada, os estados são normalizados da seguinte forma (eq 33.3):

$$|n_{\vec{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_k!}} \left(\alpha^{+}_{\vec{k}}\right)^{n_{\vec{k}}} |0\rangle \qquad \langle n|m\rangle = \delta_{mn}$$

Lembrando que a relação entre o discreto e o contínuo é:

$$\begin{cases} a_{\vec{k}} \longleftrightarrow \sqrt{V(2\pi)^3}\, \alpha_{\vec{k}} \\ \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \longleftrightarrow V\, \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \end{cases}$$

$$n_{\vec{k}} = 1 \qquad |1_{\vec{k}}\rangle \equiv |\vec{k}\rangle = \alpha^{+}_{\vec{k}} |0\rangle$$

Normalização no contínuo: $\langle \vec{p}|\vec{k}\rangle = (2\pi)^3 \underbrace{\delta^3(\vec{p}-\vec{k})}_{\text{não é invariante}}$

Considere um boost na direção 3:

$$\left.\begin{aligned} p_3' &= \gamma(p_3 + \beta E_p) \\ E_p' &= \gamma(E_p + \beta p_3) \\ k_3' &= \gamma(k_3 + \beta E_k) \\ E_k' &= \gamma(E_k + \beta k_3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta\left(f(x) - f(x_0)\right) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\, \delta(x - x_0)$$

$$\vec{p}\,' = f(\vec{p}) \qquad \vec{k}\,' = f(\vec{k})$$

$$\delta^3(\vec{p}\,' - \vec{k}\,') = \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \frac{1}{\left.\frac{dP_3'}{dP_3}\right|_{\vec{p}=\vec{k}}} \Bigg\} \to \vec{p} = \vec{k} \to E_p = E_k = E$$

$$\delta^3(\vec{p} - \vec{k}) = \delta^3(\vec{p}\,' - \vec{k}\,')\,\gamma\left(1 + \beta \frac{dE}{dP_3}\right) \leftarrow \begin{cases} E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \\ \frac{dE}{dP_3} = \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}\, 2P_3 = \frac{P_3}{E} \end{cases}$$

$$\delta^3(\vec{p} - \vec{k}) = \delta^3(\vec{p}\,' - \vec{k}\,') \frac{\gamma}{E}\left(E + \beta P_3\right) = \delta^3(\vec{p}\,' - \vec{k}\,') \frac{E'}{E}$$

$$\delta^3(\vec{p} - \vec{k}) = \delta^3(\vec{p}\,' - \vec{k}\,') \frac{E'}{E}$$

Fica óbvio então que o objeto: $E\,\delta^3(\vec{p} - \vec{k}) = E'\,\delta^3(\vec{p}\,' - \vec{k}\,')$

é invariante. Por isso usaremos a normalização relativística a seguir:

$$\boxed{\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = 2E_{\vec{p}}\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p} - \vec{q})} \quad \text{(eq. 37.1)}$$

Que, para um número arbitrário de excitações, fica:

$$\langle \{\vec{k}_i\} | \{\vec{q}_j\} \rangle = \underbrace{\sum_{\pi(j)}}_{} \prod_i 2\omega_{\vec{k}_i}\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{k}_i - \underbrace{\vec{q}_{\pi(j)}}_{}) \quad \text{(eq. 37.2)}$$

→ permutações de $\{\vec{q}_j\}$

Se colocarmos um fator adicional de $\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}$ na normalização do estado, obtemos as relações acima:

$$|n_{\vec{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_k!}}(\alpha^\dagger_{\vec{k}})^{n_{\vec{k}}}|0\rangle \xrightarrow{\text{redefino}} |n_{\vec{k}}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}!}}\left(\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}\,\alpha^\dagger_{\vec{k}}\right)^{n_{\vec{k}}}|0\rangle$$

$$|\{n_{\vec{k}}\}\rangle \equiv \prod_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}!}}\left(\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}\,\alpha^\dagger_{\vec{k}}\right)^{n_{\vec{k}}}|0\rangle$$

Que passando para o contínuo:

$$\boxed{|\{\vec{k}_i\}\rangle = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}!}}\left(\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}\,a^\dagger_{\vec{k}}\right)^{n_{\vec{k}}}|0\rangle} \quad \text{(eq. 37.3)} \leftrightarrow \left[\prod_{\vec{k}}\left(\sqrt{V(2\pi)^3}\right)^{n_{\vec{k}}}\right]|\{n_{\vec{k}}\}\rangle$$

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_p}\,a^\dagger_{\vec{p}}\,|0\rangle$$

Temos também que tomar cuidado em mudar esta normalização em todos os lugares:

$$\hat{1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} |p\rangle\langle p|$$

Transformação de Lorentz: $|\Lambda\vec{p}\rangle = \overbrace{U(\Lambda)}^{\text{unitária}} |\vec{p}\rangle \qquad \langle\Lambda\vec{q}|\Lambda\vec{p}\rangle = \langle\vec{q}|\vec{p}\rangle$

Importante: note que agora que quantizamos o campo (transformando o mesmo em um operador) o requisito para que ele seja ESCALAR muda:

$$\phi'_{cl}(x'=\Lambda x) = \underbrace{R(\Lambda)}_{1} \phi_{cl}(x) \Longrightarrow \quad \phi_{cl}(x) \xleftrightarrow{\text{equivalência}} \langle\psi|\hat{\phi}(x)|\psi\rangle$$

$$\phi'_{cl}(x') \longleftrightarrow \langle\psi|U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda)\hat{\phi}(x)U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda)|\psi\rangle$$

$$|\Lambda\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_{\Lambda p}}\, a^{\dagger}_{\Lambda\vec{p}}|0\rangle = U(\Lambda)\sqrt{2E_p}\, a^{\dagger}_{p} \overbrace{|0\rangle}^{U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda)} \qquad U(\Lambda)|0\rangle = |0\rangle$$

$$\boxed{U(\Lambda)\, a^{\dagger}_{\vec{p}}\, U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda p}}{E_p}}\, a^{\dagger}_{\Lambda\vec{p}}} \quad \text{(eq. 38.1)}$$

Outro objeto que gostaríamos de ter em uma forma explicitamente relativística é a expansão do campo escalar:

$$\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{ipx} + a^{\dagger}_{\vec{p}}\, e^{-ipx}\right)\Big|_{p^0=E_p} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sqrt{2}\left(\sqrt{E_p}\, a_{\vec{p}}\, e^{ipx} + \underbrace{\sqrt{E_p}\, a^{\dagger}_{\vec{p}}}_{=U^{-1}(\Lambda)\sqrt{E_{\Lambda p}}\, a^{(\dagger)}_{\Lambda\vec{p}}\, U(\Lambda)} e^{-ipx}\right)\Big|_{p^0=E_p}$$

Para que: $\phi(x) = U^{-1}(\Lambda)\phi'(x')U(\Lambda)$ este pedaço deve ser invariante

De fato:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi)\, \delta(p^2+m^2)\Big|_{p^0>0}$$

só tenho invariantes

$$\delta(p^2+m^2) = \delta(-p_0^2+\vec{p}^2+m^2) = \delta(-p_0^2+E_p^2)$$

$$\delta(f(p^0)-f(E_p)) = \frac{1}{|f'(p^0)|}\delta(p^0-E_p) = \frac{1}{2p^0}\delta(p^0-E_p)$$

o que mostra que esta é uma integral no tri-momento invariante de Lorentz, pois:

$$f(p) \xrightarrow{\text{Lorentz}} f(p) \Longrightarrow \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{f(p)}{2E_p} \longrightarrow \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{f(p)}{2E_p}$$

Podemos enfim escrever:

$$\boxed{\phi(x) \equiv \phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi)\, \delta(p^2+m^2)\Big|_{p^0>0} \left(\sqrt{2E_p}\, a_{\vec{p}}\, e^{ipx} + \sqrt{2E_p}\, a^{\dagger}_{\vec{p}}\, e^{-ipx}\right)\Big|_{p^0=E_p}} \quad \text{(eq. 38.2)}$$

Finalmente consideremos:

$$\phi(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p} e^{-i\vec{p}\vec{x}}|\vec{p}\rangle$$

$[\hat{a}_p, \hat{H}] = \omega_p \hat{a}_p$

$\hat{H}\hat{a}_p = \hat{a}_p(\hat{H} - E_p)$ $\quad \hat{H}^{+}\hat{a}^{+} = \hat{a}^{+}(\hat{H} + E_p)$

$\hat{H}^n\hat{a}_p = \hat{a}_p(\hat{H} - E_p)^n$ $\quad \hat{H}^{+n}\hat{a}^{+} = \hat{a}^{+}(\hat{H} + E_p)^n$

operador na representação de Schödinger, lembre que: $e^{i\hat{H}t}\hat{a}_p e^{-i\hat{H}t} = \hat{a}_p e^{-iE_pt}$ $\quad e^{i\hat{H}t}\hat{a}^{+}_p e^{-i\hat{H}t} = \hat{a}^{+}_p e^{iE_pt}$

É uma superposição de vários estados de uma partícula (cada um deles com momento bem definido), muito similar aos auto-estados da posição em MQ (a diferença vem do fator $1/E_p$). De fato:

$$\langle 0|\phi(\vec{x})|\vec{p}\rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{p'}} e^{+i\vec{p}'\vec{x}} \underbrace{\langle \vec{p}'|\vec{p}\rangle}_{2E_{p'}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}'-\vec{p})} = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

Da mesma forma que na MQ tínhamos $\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle \sim e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$

Por isso podemos interpretar esta função como a função de onda no espaço das posições da partícula criada com momento *p*, e dizemos que $\phi(x)$ cria uma partícula na posição *x*.

Campo Escalar Complexo

Para entender melhor a propagação (a evolução temporal) destes estados, nós passaremos à quatização do campo escalar complexo:

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi^* - m^2\phi^*\phi - U(|\phi|^2)$$

Esta Lagrangeana é simétrica sobre: $\phi \to \phi\, e^{i\alpha}$ (α → NÚMERO)

que é uma simetria U(1) Global. Há várias formas de falar sobre ϕ: dizemos que ϕ é "carregado sobre U(1) Global", "tem carga de U(1) global" ou se "transforma sobre U(1) global".

Notem que temos um fator 1/2 faltando aí: $\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi \longleftrightarrow \partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi^*$

Isso porque um campo complexo tem dois graus de liberdade e trataremos ϕ e ϕ^* como campos independentes.

EOM FOR ϕ: $(\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\phi^* = \frac{\partial U}{\partial\phi}$

FOR ϕ^*: $(\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\phi = \frac{\partial U}{\partial\phi^*}$

Seguimos um procedimento análogo ao do campo real, só que agora com o dobro dos graus de liberdade:

$$\boxed{\begin{aligned}\phi(\vec{x},t) &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left(\underline{a_+(\vec{p},t)}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \underline{a_-^\dagger(\vec{p},t)}e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right)\\ \phi(\vec{x},t) &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left(\underline{a_+^\dagger(\vec{p},t)}e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \underline{a_-(\vec{p},t)}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right)\end{aligned}}$$ (eq. 39.1)

$a_+ \quad a_+^+$

$a_- \quad a_-^+$