

Finalmente consideremos:

$$\phi(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{p}\rangle$$

$[\hat{a}_p, \hat{H}] = \omega_p \hat{a}_p$
 $\hat{H} \hat{a}_p = \hat{a}_p (\hat{H} - E_p)$
 $\hat{H} \hat{a}_p^\dagger = \hat{a}_p^\dagger (\hat{H} + E_p)$
 $e^{i\hat{H}t} \hat{a}_p e^{-i\hat{H}t} = \hat{a}_p e^{-iE_p t}$
 $e^{i\hat{H}t} \hat{a}_p^\dagger e^{-i\hat{H}t} = \hat{a}_p^\dagger e^{iE_p t}$

operador na representação de Schödinger, lembre que:

É uma superposição de vários estados de uma partícula (cada um deles com momento bem definido), muito similar aos auto-estados da posição em MQ (a diferença vem do fator $1/E_p$). De fato:

$$\langle 0 | \phi(\vec{x}) | \vec{p}\rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{p'}} e^{+i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \underbrace{\langle \vec{p}' | \vec{p}\rangle}_{2E_{p'} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p})} = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

Da mesma forma que na MQ tínhamos $\langle \vec{x} | \vec{p}\rangle \sim e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$

Por isso podemos interpretar esta função como a função de onda no espaço das posições da partícula criada com momento p , e dizemos que $\phi(x)$ cria uma partícula na posição x .

Campo Escalar Complexo

Para entender melhor a propagação (a evolução temporal) destes estados, nós passaremos à quatzização do campo escalar complexo:

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* \phi - U(|\phi|^2)$$

Esta Lagrangeana é simétrica sobre: $\phi \rightarrow \phi e^{i\alpha}$ ↳ NÚMERO

que é uma simetria **U(1) Global**. Há várias formas de falar sobre ϕ : dizemos que ϕ é "carregado sobre U(1) Global", "tem carga de U(1) global" ou se "transforma sobre U(1) global".

Notem que temos um fator 1/2 faltando aí: $\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \leftrightarrow \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^*$

Isso porque um campo complexo tem dois graus de liberdade e trataremos ϕ e ϕ^* como campos independentes.

EOM FOR ϕ : $(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi^* = \frac{\partial U}{\partial \phi}$

FOR ϕ^* : $(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi = \frac{\partial U}{\partial \phi^*}$

Seguimos um procedimento análogo ao do campo real, só que agora com o dobro dos graus de liberdade:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_+(\vec{p}, t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_-^\dagger(\vec{p}, t) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}})$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_+^\dagger(\vec{p}, t) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_-(\vec{p}, t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}})$$

$a_+ \quad a_+^\dagger$
 $a_- \quad a_-^\dagger$

(eq. 39.1)

$$\begin{aligned}\pi(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(-i\sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \right) (a_-(\vec{p}, t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_+^\dagger(\vec{p}, t)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \\ \pi^\dagger(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(i\sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \right) (a_-^\dagger(\vec{p}, t)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_+(\vec{p}, t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}})\end{aligned}\quad (\text{eq. 40.1})$$

Podemos repetir todo o procedimento do campo real para mostrar que $\omega_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ que a dependência temporal é a mesma e que:

$$[a_\pm(\vec{p}, t), a_\pm^\dagger(\vec{p}', t)] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (\text{qualquer outro comutador é zero})$$

A carga conservada pela simetria U(1) é (exercício):

$$Q = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\underbrace{a_{+\vec{k}}^\dagger a_{+\vec{k}}}_{N_{+\vec{k}}} - \underbrace{a_{-\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}}_{N_{-\vec{k}}} \right]$$

↙ Número de partículas com carga positiva ↘ Número de partículas com carga negativa

$a_+^\dagger \rightarrow$ cria carga +

$a_-^\dagger \rightarrow$ cria carga -

$a_+ \rightarrow$ aniquila carga +

$a_- \rightarrow$ aniquila carga -

$\phi \rightarrow$ aniquila carga + e cria carga -

$\phi^\dagger \rightarrow$ aniquila carga - e cria carga +

Temos dois estados distintos de uma partícula: $|p, +\rangle \sim a_+^\dagger |0\rangle$
 $|p, -\rangle \sim a_-^\dagger |0\rangle$

ambos tem funções de onda de uma partícula, de mesma massa m e cargas opostas. Assim introduzimos o conceito de **antipartícula** e vemos que o mesmo campo complexo descreve tanto a partícula quanto a antipartícula, de forma indissociável (pense quão mais elegante isto é do que a história do mar de Dirac). Ademais, para este campo:

$$\vec{P} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{k} [N_{+\vec{k}} + N_{-\vec{k}}] \quad H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k [N_{+\vec{k}} + N_{-\vec{k}}]$$

De forma que o momento e a energia (que é positiva) se comportam como esperaríamos de dois conjuntos de partículas (só a carga é subtraída). O campo real pode ser visto como um caso particular, onde as partículas são a própria antipartícula (já que tem carga zero).

Consideremos agora o objeto:

$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$
 cria um estado em y
 aniquila um estado em x



$\langle q', t' | q, t \rangle$
 $(q, t) \rightarrow (q', t')$

$y^\mu = (t_y, \vec{y}) \rightarrow x^\mu = (t_x, \vec{x})$
 Note que esta é a função de dois pontos da teoria (compare com a pg 24 - aqui os estados "fixos" $|q\rangle$ e $|q'\rangle$ são o vácuo da teoria em um tempo não especificado - que mais tarde veremos ser infinito passado e infinito futuro)

Note que: $\langle q', t' | q, t \rangle = \overline{\langle q | e^{iH(t-t')} | q' \rangle}$

O que é o mesmo objeto que calculamos na pg 3:
 $U(t) = \langle \vec{x} | e^{-iHt} | \vec{x}_0 \rangle \quad \left(\begin{array}{l} t' = \vec{x} \quad q = \vec{x}_0 \\ t = t \quad \tau = 0 \end{array} \right)$

E que mostramos ter problemas com probabilidade não nula para propagação fora do cone de luz.

Voltemos por um instante para o campo real: $\phi^+(x) = \phi(x)$

32.3 $\Rightarrow \phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\vec{p}} e^{ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-ipx}) \Big|_{p^0 = E_p}$

$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \sim \langle 0 | (a_{\vec{p}}^\dagger e^{-ipx} + a_{\vec{p}} e^{ipx}) (a_{\vec{q}} e^{iqy} + a_{\vec{q}}^\dagger e^{-iqy}) | 0 \rangle =$
 $\langle 0 | a_{\vec{p}}^\dagger = 0 \quad a_{\vec{q}} | 0 \rangle = 0$

$= \langle 0 | a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger | 0 \rangle e^{ipx - iqy}$
 $\hookrightarrow a a^\dagger = [a, a^\dagger] + a^\dagger a$
 $(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$

$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) e^{ipx - iqy}$
 $\hookrightarrow \vec{p} = \vec{q} \Rightarrow E_p = E_q, p_0 = q_0$

$D(x-y) \equiv \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{ip(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p}$ (eq. 41.1)

Vamos ver o que acontece com este objeto sobre transformações de Lorentz. Temos que analisar dois casos:

- (1) $(x-y)$ é tipo-tempo $\rightarrow (x-y)^2 < 0$ dentro do cone de luz
- (2) $(x-y)$ é tipo-espaco $\rightarrow (x-y)^2 > 0$ fora do cone de luz

No caso (1) (tipo-tempo), podemos escolher um referencial em que: $\begin{cases} t = t_x = t_y \\ \vec{x} - \vec{y} = 0 \end{cases}$

E fazer a integral, usando: $d^3p = d\Omega p^2 dp$ $p = \sqrt{E^2 - m^2}$
 $\frac{dE}{dp} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \Rightarrow \frac{p dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} = dE \Rightarrow \frac{p^2 dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} = \sqrt{E^2 - m^2} dE$

$$D(x-y) = \int d\Omega \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-iE_p t} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dE \sqrt{E^2 - m^2} e^{-iEt} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-imt}$$

método da fase estacionária (ver material adicional)

A probabilidade é oscilatória (não vai a zero), mas como estamos olhando $\vec{x} = \vec{y}$, isto não é um problema.

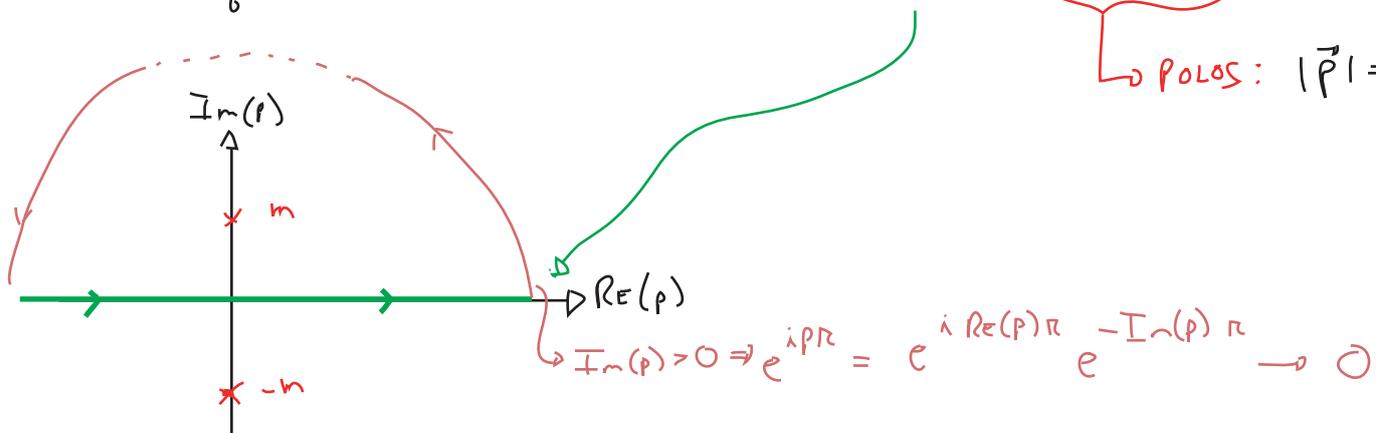
No caso (2) (tipo-espaço), podemos escolher um referencial em que: $\begin{cases} t_x = t_y \\ \vec{x} - \vec{y} = \vec{r} \end{cases}$

Neste caso:

$$D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} = 2\pi \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2E_p (2\pi)^3} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{i p r \cos\theta} =$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2E_p (2\pi)^3} \frac{e^{i p r} - e^{-i p r}}{i p r} = \frac{-i}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} p dp \frac{e^{i p r}}{\sqrt{p^2 + m^2}}$$

POLOS: $|\vec{p}| = \pm i m$



$$D(x-y) = 2\pi i \times \left(\frac{i}{(2\pi)^2 r} \right) (im) e^{-mr} = \frac{im}{4\pi^2 r} e^{-mr} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{-mr}$$

(muito fora do cone de luz)

Ops! Parece que temos (qualitativamente) o mesmo problema que antes! Acontece que ainda não definimos apropriadamente os observáveis desta teoria de campos. Será que este problema afeta quantidades observáveis? Veremos em breve que o que realmente importa são comutadores

do tipo:

$$[\phi(x), \phi(y)]$$

Notemos então que:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \left[(a_{\vec{p}} e^{ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-ipx}), (a_{\vec{q}} e^{iqy} + a_{\vec{q}}^\dagger e^{-iqy}) \right]$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(e^{ip(x-y)} - e^{-ip(y-x)} \right) = D(x-y) - D(y-x)$$

$e^{ipx - iqy} \underbrace{[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger]}_{(2\pi)^3 \delta(\vec{p}-\vec{q})} + e^{-ipx + iqy} \underbrace{[a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{q}}]}_{-(2\pi)^3 \delta(\vec{p}-\vec{q})}$

Note que o comutador de dois campos (operadores) é uma função, por isso: $\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle [\phi(x), \phi(y)]$

Note também que é a primeira vez que estamos falando em comutadores para tempos diferentes, veja a eq. 28.1

Veja que, para separações **tipo-espaço**: $(x-y) = (0, \vec{x} - \vec{y})$ e podemos fazer uma rotação $\vec{x} - \vec{y} \rightarrow -(\vec{x} - \vec{y})$ que é uma transformação de Lorentz. Acontece que D é um invariante por transformações de Lorentz e portanto:

$$(x-y)^2 > 0 \rightarrow D(x-y) = D(y-x)$$

$$\therefore [\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad (\text{fora do cone de luz})$$

Por outro lado, para separações **tipo-tempo** temos: $\begin{cases} (x-y) = (t_x - t_y, 0) \\ (y-x) = (t_y - t_x, 0) \end{cases}$

e não há transformação de Lorentz que leve um vetor no outro (de fato seria necessária uma transformação discreta, a inversão temporal), logo:

$$(x-y)^2 < 0 \rightarrow D(x-y) \neq D(y-x)$$

$$\therefore [\phi(x), \phi(y)] \neq 0 \quad (\text{dentro do cone de luz})$$

Esse resultado é importantíssimo. Ele mostra que, nestes comutadores, a contribuição que causaria violações de causalidade na transição de $x^\mu \rightarrow y^\mu$ é cancelada por uma outra transição na direção oposta $y^\mu \rightarrow x^\mu$ (**inclusive no eixo temporal**). Note também que fizemos esta conta para um campo escalar real, cujas partículas (excitações) são **a própria anti-partícula**, e que a contribuição que caminha na direção contrária também poderia ser lida como uma **solução de frequência negativa**, andando na direção certa $x^\mu \rightarrow y^\mu$.