

Para deixar isto mais claro, vamos olhar estes comutadores com mais cuidado.

Propagador de Klein-Gordon

Considere o número complexo: $[\phi(x), \phi(y)] = \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle =$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left[e^{i p(x-y)} - e^{-i p(x-y)} \right] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2E_p} e^{i p(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p} + \frac{1}{-2E_p} e^{i p(x-y)} \Big|_{p^0 = -E_p} \right]$$

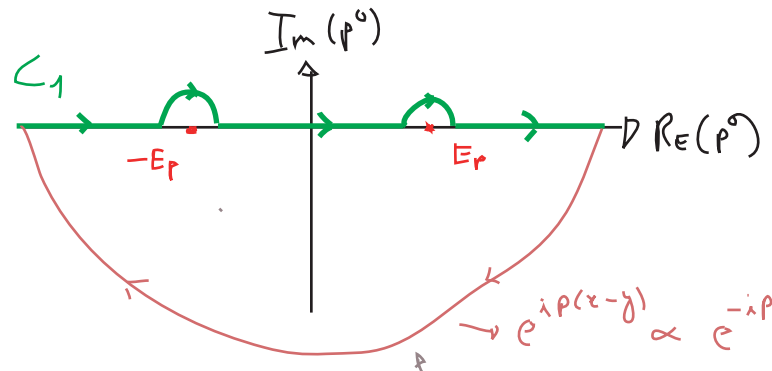
$p^0 = E_p \Rightarrow p^0 = -E_p$
 $\vec{p}^0 \Rightarrow -\vec{p}$
 $e^{-i p(x-y)} \Rightarrow e^{i p(x-y)}$

Transições na mesma direção no espaço tempo

É possível reescrever isto em termos de uma integral em p^0 :

$$x^0 > y^0 \Rightarrow [\phi(x), \phi(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int_{C_1} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{1}{p^2 + m^2} e^{i p(x-y)}$$

\hookrightarrow POLOS: $-(p^0)^2 + \vec{p}^2 + m^2 = 0$
 $p^0 = \pm E_p$



$e^{i p(x-y)} \propto e^{-i p^0(x^0 - y^0)} \propto e^{Im(p^0)(x^0 - y^0)}$

$Im(p^0) < 0 \Rightarrow \dots \rightarrow 0$

$$\int_{C_1} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{1}{-p^2 - m^2} e^{i p(x-y)} = -2\pi i (RES(E_p) + RES(-E_p)) = \frac{1}{2E_p} e^{i p(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p} - \frac{1}{2E_p} e^{i p(x-y)} \Big|_{p^0 = -E_p}$$

$$-p^2 - m^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 = (p^0)^2 - E_p^2 = (p^0 - E_p)(p^0 + E_p)$$

$$\frac{1}{p^0 - E_p} \frac{1}{p^0 + E_p} e^{i p(x-y)} \begin{cases} \hookrightarrow p^0 = E_p \Rightarrow -\frac{1}{2E_p} e^{i p(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p} \\ \hookrightarrow p^0 = -E_p \Rightarrow \frac{1}{2E_p} e^{i p(x-y)} \Big|_{p^0 = -E_p} \end{cases}$$

Esta mesma integral $\left(\int_{C_1} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{1}{p^2 + m^2} e^{i p(x-y)} \right)$ se calculada para $x^0 < y^0$ dá zero. Isto porque seremos forçados a fechar o contorno por cima, sem pegar nenhum polo.

$e^{i p(x-y)} \propto e^{-i p^0(x^0 - y^0)} \propto e^{-Im(p^0)(y^0 - x^0)}$

$Im(p^0) > 0 \Rightarrow \dots \rightarrow 0$

Assim, definiremos o **propagador retardado**:

$$D_R(x-y) \equiv \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} \int_{c_1} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{1}{p^2 + m^2} e^{iP(x-y)} \quad (\text{eq. 45.1})$$

igualdade garantida pela função θ

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + m^2} e^{iP(x-y)} \quad (\text{eq. 45.2})$$

Fazendo uma transformada de Fourier, temos:

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} e^{iP(x-y)} D_R(P) \Rightarrow D_R(P) = \frac{-i}{p^2 + m^2}$$

Considere o operador de Klein-Gordon: $\mathcal{O}_{KG}(x) = (-\square^2 - m^2) = (\partial^\mu \partial_\mu - m^2)$

mostramos que (eq 30.2) no espaço dos (tri-)momentos: $\mathcal{O}_{KG}(t, \vec{p}) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \vec{p}^2 + m^2 \right)$

de forma análoga, poderíamos mostrar que: $\mathcal{O}_{KG}(P) = (P^2 + m^2)$

Vemos então que: $\mathcal{O}_{KG}(P) D_R(P) = -i$ (eq. 45.3)

Voltando para as posições:

$$\int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} e^{iP(x-y)} \mathcal{O}_{KG}(P) D_R(P) = -i \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} e^{iP(x-y)} \delta(x-y)$$

$$(P^2 + m^2) e^{iP(x-y)} = (-\partial_\mu \partial^\mu + m^2) e^{iP(x-y)}$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) D_R(x-y) = i \delta(x-y) \quad (\text{eq. 45.4})$$

O que mostra que este **propagador retardado** é uma **função de Green** do operador de KG.

Propagador de Feynman

Consideremos agora uma forma diferente de definir o caminho no plano complexo. Ao invés de deformar o caminho no eixo real de p^0 , deslocamos um pouco os polos. Além disso passamos "por cima" (eixo imaginário positivo) de um deles e "por baixo" do outro.



$$D_F(x-y) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon} e^{i p(x-y)} \quad (\text{eq. 46.1})$$

o caminho para integração em p^0 é simplesmente o eixo real
 a informação da posição dos polos em relação ao caminho está aqui

não é o mesmo ϵ , mas é um número pequeno > 0

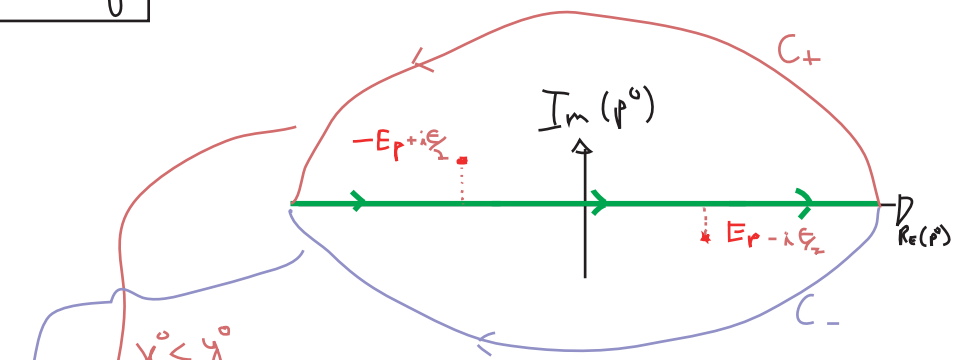
$$p^2 + m^2 - i\epsilon = -(p^0)^2 + \vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon = -\left(p^0 + E_p - \frac{i\epsilon}{2}\right) \left(p^0 - E_p + \frac{i\epsilon}{2}\right)$$

$$\epsilon = \epsilon E_p$$

Assim como no caso anterior, ao fazer a integral em p^0 , temos que decidir como fechar o caminho de integração.

$x^0 > y^0 \Rightarrow e^{i p(x-y)} \sim e^{i p^0(x^0 - y^0)} \xrightarrow{Im(p^0) \rightarrow -\infty} \bigcirc$ Fechamos por baixo (C_-)

$x^0 < y^0 \Rightarrow e^{i p(x-y)} \sim e^{i p^0(x^0 - y^0)} \xrightarrow{Im(p^0) \rightarrow +\infty} \bigcirc$ Fechamos por cima (C_+)



$x^0 < y^0$

$$D_F(x-y) = 2\pi i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{i}{-2E_p + i\epsilon} e^{i p(x-y)} \Big|_{p^0 = -E_p} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i p^0(x^0 - y^0) + i \vec{p}(\vec{x} - \vec{y})} \Big|_{p^0 = -E_p} =$$

$x^0 < y^0$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{+i E_p(x^0 - y^0) - i \vec{p}(\vec{x} - \vec{y})} = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{i p(\vec{y} - \vec{x})} \Big|_{p^0 = E_p} = D(y-x)$$

$x^0 > y^0$

$$D_F(x-y) = -2\pi i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{i}{2E_p - i\epsilon} e^{i p(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p} = D(x-y)$$

$$\therefore D_F(x-y) = \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \Theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle$$

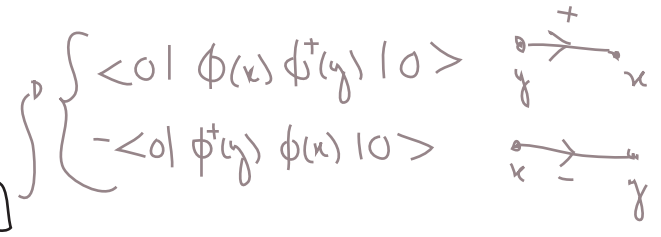
$$D_F(x-y) = \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle \quad (\text{eq. 47.1})$$

$$(\partial^\mu \partial_\mu - m^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon} e^{i p(x-y)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(+i)(-p^2 - m^2)}{p^2 + m^2} e^{i p(x-y)}$$

$$(\partial^\mu \partial_\mu - m^2) D_F(x-y) = i \delta^4(x-y) \quad (\text{eq. 47.2})$$

E o campo escalar complexo? Muitas das expressões acima são diretamente generalizáveis e não adicionam nada de novo. A questão da causalidade, no entanto, é interessante. No caso do campo complexo:

- $\phi \rightarrow$ aniquila carga + e cria carga -
- $\phi^\dagger \rightarrow$ aniquila carga - e cria carga +



Os comutadores de interesse serão: $[\phi(x), \phi^\dagger(y)]$

O resultado é que teremos um termo representando uma partícula de carga positiva fazendo a transição de $y^\mu \rightarrow x^\mu$ menos um outro representando uma carga negativa na direção oposta $x^\mu \rightarrow y^\mu$ (que também pode ser interpretada como uma carga positiva e frequência negativa andando na direção certa $y^\mu \rightarrow x^\mu$). Estas duas contribuições se cancelam exatamente fora do cone de luz, mas não dentro dele. Isto deixa bem claro que a teoria precisa de antipartículas com a mesma massa e carga oposta (na verdade todos os números quânticos) para ser causal.

Ainda não temos com relacionar estas funções com observáveis, porque observáveis só fazem sentido em teorias com interações, tratadas no nosso próximo passo.

Quadro de Interação e o Teorema de Wick

(Nastase 5, Peskin 4.2 e 4.3, Stermann Appendix A)

Os "quadros" da MQ:

Dado um elemento de matriz: $\langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle$
 $\hookrightarrow \hat{A} = \hat{A}(Q, P)$

(no que segue estou forçando minha letra a diferenciar $\frac{d}{dt}$ de $\frac{d}{dt}$)

a evolução temporal é dada por:

$$i \frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle = \langle \psi | [\hat{A}, \hat{H}] | \phi \rangle \quad (\text{eq. 47.3})$$

\hookrightarrow calculado em t

A equação 47.3 tem toda a informação sobre a evolução, mas gostaríamos de separar a evolução dos operadores e estados, definindo:

$$i \frac{d\hat{A}}{dt} \equiv [\hat{A}, \hat{M}]$$

$$\hat{M}^+ = M$$

$$i \frac{d}{dt} |\psi\rangle \equiv \hat{N} |\psi\rangle$$

$$\hat{N}^+ = N$$

$$-i \frac{d}{dt} \langle \psi| \equiv \hat{N}^+ \langle \psi|$$

$$i \frac{d}{dt} \langle \psi| \hat{A} |\phi\rangle = i \left(\frac{d}{dt} \langle \psi| \right) \hat{A} |\phi\rangle + i \langle \psi| \frac{d\hat{A}}{dt} |\phi\rangle + i \langle \psi| \hat{A} \left(\frac{d}{dt} |\phi\rangle \right)$$

$$= -\langle \psi| \hat{N}^+ \hat{A} |\phi\rangle + \langle \psi| [\hat{A}, \hat{M}] |\phi\rangle + \langle \psi| \hat{A} \hat{N} |\phi\rangle =$$

$$\stackrel{N^+ = N}{\downarrow} = \langle \psi| [\hat{A}, \hat{N}] |\phi\rangle + \langle \psi| [\hat{A}, \hat{M}] |\phi\rangle = \langle \psi| [\hat{A}, \hat{H}] |\phi\rangle$$

$$\downarrow \quad \boxed{\hat{N} + \hat{M} = \hat{H}} \quad (\text{eq. 48.1})$$

Um "quadro" consiste em uma escolha de \hat{M} e \hat{N} :

Quadro de Schrödinger: $\left. \begin{array}{l} \hat{M} = 0 \\ \hat{N} = \hat{H} \end{array} \right\} \begin{array}{l} i \frac{d}{dt} |\psi_S(t)\rangle = \hat{H} |\psi_S(t)\rangle \\ i \frac{d}{dt} \hat{A}_S(t) = 0 \end{array}$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\hat{A}_S(t)}{dt} = \frac{d\hat{H}}{dt} \stackrel{\uparrow}{=} 0 \\ \text{não dependem} \\ \text{explicitamente do tempo} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \hat{A}_S(t) = \hat{A}(t_0) \\ |\psi_S(t)\rangle = e^{-i\hat{H}(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle \end{array}} \quad (\text{eq. 48.2})$$

Quadro de Heisenberg: $\left. \begin{array}{l} \hat{M} = \hat{H} \\ \hat{N} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} i \frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = [\hat{A}_H(t), \hat{H}] \\ \frac{d}{dt} |\psi_H(t)\rangle = 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)} \hat{A}(t_0) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \\ |\psi_H(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle \end{array}} \quad (\text{eq. 48.3})$

Para o tempo fixo t_0 os dois quadros coincidem:

$$\boxed{|\psi_S(t_0)\rangle = |\psi_H(t_0)\rangle = |\psi(t_0)\rangle \quad \hat{A}_H(t_0) = \hat{A}_S(t_0) = \hat{A}(t_0)} \quad (\text{eq. 48.4})$$

Podemos mudar entre os dois quadros fazendo uma transformação unitária:

$$|\psi_w\rangle = \hat{W} |\psi\rangle \quad \hat{W}^+ = \hat{W}^{-1}$$

$$\hat{A}_w = \hat{W} \hat{A} \hat{W}^+ = \hat{W} \hat{A} \hat{W}^{-1}$$

Definindo W como a transformação "Q. Heisenberg" \rightarrow "Q. Schrödinger", vemos que:

$$\hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)} \hat{A}(t_0) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \quad \leftrightarrow \quad \hat{W} = e^{i\hat{H}(t-t_0)}$$

O que também poderia ter sido obtido de:

$$|\Psi_H(t)\rangle = \hat{W} |\Psi_S(t)\rangle \Rightarrow |\Psi_S(t)\rangle = \hat{W}^{-1} |\Psi_H(t)\rangle = \underbrace{e^{-i\hat{H}(t-t_0)}}_{U_S(t,t_0)} \underbrace{|\Psi(t_0)\rangle}_{|\Psi(t_0)\rangle} \quad (\text{eq. 48.2})$$

$$\hat{W} = U_S^{-1}(t, t_0) = U_S(t_0, t) \quad (\text{eq. 49.1})$$

De onde vemos que esta transformação é quase o próprio operador evolução (o seu inverso).

Quadro de Interação (ou de Dirac):

Suponha que tenhamos um hamiltoniano do tipo:

$$\hat{H} = \underbrace{\hat{H}_0}_{\text{parte livre (quadrática nos campos)}} + \underbrace{\hat{H}_1}_{\text{parte interagente (potências maiores)}}$$

o quadro interação equivale à escolha:

$$\hat{M} = \hat{H}_0 \quad \hat{N} = \hat{H}_1$$

$$i \frac{d\hat{A}_I(t)}{dt} = [\hat{A}_I(t), \hat{H}_0] \quad (\text{eq. 49.2})$$

$$i \frac{d|\Psi_I(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_1 |\Psi_I(t)\rangle \quad (\text{eq. 49.3})$$

Mais uma vez, todos os quadros são iguais em t_0 :

$$\hat{A}_I(t_0) = \hat{A}_S(t_0) = \hat{A}_H(t_0) = \hat{A}(t_0) \quad |\Psi_I(t_0)\rangle = |\Psi_S(t_0)\rangle = |\Psi_H(t_0)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle$$

A evolução dos operadores se dá como no quadro de Heisenberg da teoria livre:

$$i \frac{d\hat{H}_0}{dt} = 0 \quad \hat{H}_{0I}(t) = \hat{H}_{0S}(t) = \hat{H}_0$$

$$i \frac{d\hat{A}_I(t)}{dt} = [\hat{A}_I(t), \hat{H}_0] \quad \hat{A}_I(t) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{A}(t_0) e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}$$

E o próprio hamiltoniano de interação depende do tempo:

$$i \frac{d\hat{H}_1}{dt} = [\hat{H}_1, \hat{H}_0] \quad \hat{H}_1 \equiv \hat{H}_{1I}(t) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{H}_1(t_0) e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}$$

A evolução dos estados é um pouco mais complicada:

$$|\Psi_I(t)\rangle = \hat{U}_I(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{U}(t, t) = 1 \\ \hat{U}(t, t') \hat{U}(t', t_0) = \hat{U}(t, t_0) \end{array} \right. \quad (\text{eq. 49.4})$$

↳ quero encontrar U, que satisfaça:

Substituindo isto em 49.3

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}_I(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle = \hat{H}_{1I}(t) \hat{U}_I(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle$$

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}_I(t, t_0) = \hat{H}_{1I}(t) \hat{U}_I(t, t_0) \quad (\text{eq. 50.1})$$

Uma solução simples para esta equação é:

$$\hat{U}_I(t, t_0) = e^{i \hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i \hat{H}_S(t-t_0)} \quad (\text{eq. 50.2})$$

(vou suprimir os símbolos de operador daqui para frente)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U_I(t-t_0) &= i H_0 e^{i H_0(t-t_0)} e^{-i H_S(t-t_0)} + e^{i H_0(t-t_0)} (-i H_S) e^{-i H_S(t-t_0)} = \\ &= -i e^{i H_0(t-t_0)} (H_S - H_0) e^{-i H_S(t-t_0)} = -i H_{1I} e^{i H_0(t-t_0)} e^{-i H_S(t-t_0)} = -i H_{1I} \hat{U}_I(t, t_0) \end{aligned}$$

$H_S = H_1(t_0)$

$$H_{1I} = e^{i H_0(t-t_0)} H_1(t_0) e^{-i H_S(t-t_0)} \Rightarrow H_1(t_0) = e^{-i H_0(t-t_0)} H_{1I} e^{i H_0(t-t_0)}$$

Gostaríamos de uma solução similar a $e^{-i H_{1I} t}$, mas isso requer mais cuidado pois H_{1I} na eq. 50.1 depende do tempo. Notemos que a expressão:

$$U_I(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_{1I}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) + (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \dots \quad (\text{eq. 50.3})$$

NOTE

$$\frac{d}{dt} \textcircled{I} = -i H_{1I}(t) \textcircled{I}$$

$$\frac{d}{dt} \textcircled{II} = -i \int_{t_0}^t dt_2 H_{1I}(t) H_{1I}(t_2) = -i H_{1I}(t) \textcircled{I}$$

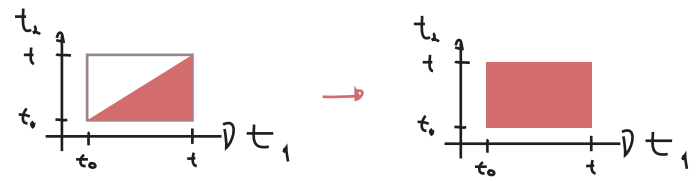
$$\left(\frac{d}{dt} \textcircled{III} = -i H_{1I}(t) \textcircled{II} \right)$$

e assim por diante

$$\therefore \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) = -i H_{1I}(t) U_I(t, t_0)$$

// o que prova que 50.3 é solução de 50.1

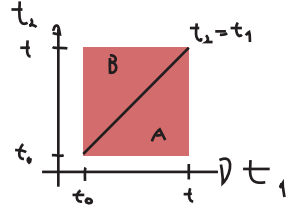
Para simplificar mais o Ansatz 50.3, podemos trocar os limites de integração



tomando o cuidado de notar que $[H_{1I}(t_1), H_{1I}(t_2)] \neq 0$

de fato:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} = \underbrace{\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2)}_A + \underbrace{\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H(t_1) H(t_2)}_B = 2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2)$$



$$T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} = \begin{cases} H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) & \text{se } \{t_1, t_2\} \in A \\ H_{1I}(t_2) H_{1I}(t_1) & \text{se } \{t_1, t_2\} \in B \end{cases}$$

Analogamente:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n T \{ H_{1I}(t_1) \dots H_{1I}(t_n) \} = n! \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{1I}(t_1) \dots H_{1I}(t_n)$$

De forma que:

$$\hat{U}_I(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 T \{ H_{1I}(t_1) \} + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} + \frac{(-i)^3}{3!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_3 T \{ \dots \}$$

$$U_I(t, t_0) = T \left\{ \text{Exp} \left[-i \int_{t_0}^t dt' H_{1I}(t') \right] \right\}$$

(eq. 51.1)

Esta separação entre a teoria livre e a parte interagente exige um cuidado adicional. Anteriormente usamos a definição para o vácuo como:

$$H_0 |0\rangle \equiv E_0^L |0\rangle = 0$$

Assumindo \$H_0\$ normalmente ordenado
 Menor autovalor de \$H_0\$
 Hamiltoniano do sistema

Faremos o mesmo para o Hamiltoniano com a interação: $H | \Omega \rangle = (H_0 + H_1) | \Omega \rangle \equiv E_0 | \Omega \rangle$
 Menor autovalor de $H = H_0 + H_1$

e, em geral: $|0\rangle \neq |\Omega\rangle$. Gostaríamos de expressar este novo vácuo em termos de grandezas conhecidas.

Construindo um conjunto completo com os autoestados do hamiltoniano total temos:

$$H | n \rangle = E_n | n \rangle$$