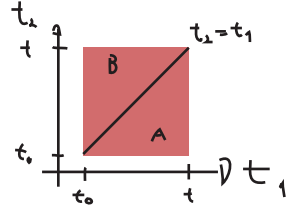


tomando o cuidado de notar que  $[H_{1I}(t_1), H_{1I}(t_2)] \neq 0$

de fato:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} = \underbrace{\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2)}_A + \underbrace{\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H(t_1) H(t_2)}_B = 2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2)$$



$$T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} = \begin{cases} H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) & \text{se } \{t_1, t_2\} \in A \\ H_{1I}(t_2) H_{1I}(t_1) & \text{se } \{t_1, t_2\} \in B \end{cases}$$

Analogamente:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \dots dt_n T \{ H_{1I}(t_1) \dots H_{1I}(t_n) \} = n! \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{1I}(t_1) \dots H_{1I}(t_n)$$

De forma que:

$$\hat{U}_I(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 T \{ H_{1I}(t_1) \} + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} + \frac{(-i)^3}{3!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 T \{ \dots \}$$

$$U_I(t, t_0) = T \left\{ \text{Exp} \left[ -i \int_{t_0}^t dt' H_{1I}(t') \right] \right\}$$

(eq. 51.1)

Esta separação entre a teoria livre e a parte interagente exige um cuidado adicional. Anteriormente usamos a definição para o vácuo como:

$$H_0 |0\rangle \equiv E_0^L |0\rangle = 0$$

Assumindo  $H_0$  normalmente ordenado

Menor autovalor de  $H_0$

Hamiltoniano do sistema

Faremos o mesmo para o Hamiltoniano com a interação:  $H | \Omega \rangle = (H_0 + H_1) | \Omega \rangle \equiv E_0 | \Omega \rangle$

Menor autovalor de  $H = H_0 + H_1$

e, em geral:  $|0\rangle \neq |\Omega\rangle$ . Gostaríamos de expressar este novo vácuo em termos de grandezas conhecidas.

Construindo um conjunto completo com os autoestados do hamiltoniano total temos:

$$H | n \rangle = E_n | n \rangle$$

$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{n \neq 0} |n\rangle\langle n|$$

Tomemos um estado que começou no vácuo "livre" da teoria e está evoluindo com o Hamiltoniano completo:

$$e^{-iHT} |0\rangle = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_n T} |n\rangle\langle n|0\rangle$$

e façamos o limite  $T \rightarrow \infty(1 - \lambda \epsilon)$

$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\epsilon E_n T} \gg e^{-\epsilon E_1 T} \gg e^{-\epsilon E_2 T} \gg \dots$   
 "mata" os estados excitados:

e ficamos só com o zero-ésimo termo da soma do lado direito:

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1 - \lambda \epsilon)} \left[ e^{-iHT} |0\rangle \right] = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle$$

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - \lambda \epsilon)} \frac{e^{-iH(T+t_0)} |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle\Omega|0\rangle} = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - \lambda \epsilon)} \frac{e^{-iH(T+t_0)} e^{iH_0(T+t_0)} |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle\Omega|0\rangle}$$

$H_0|0\rangle = 0$

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - \lambda \epsilon)} \frac{U_I(t_0, -T) |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle\Omega|0\rangle} \quad (\text{eq. 52.1})$$

$$(\text{eq. 50.2}) \Rightarrow U_I(-T, t_0) = e^{iH_0(-T-t_0)} e^{-iH(-T-t_0)} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} U_I(t_0, -T) = e^{+i\hat{H}(-T-t_0)} e^{-i\hat{H}_0(-T-t_0)}$$

$$U_I(-T, t_0) U_I(t_0, -T) = 1$$

De forma semelhante:

$$\langle\Omega| = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - \lambda \epsilon)} \frac{\langle 0| U_I(T, t_0)}{e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0|\Omega\rangle} \quad (\text{eq. 52.2})$$

Esse é um bom ponto para fazer a pertinente pergunta: o que diabos estamos fazendo? Para que serve este quadro de interação?

Pois bem, a imagem que temos em mente é a de experiências aonde temos objetos quânticos e relativísticos: partículas se movendo e interagindo em altas energias. As situações típicas em que conseguimos estudar partículas relativísticas (Raios Cósmicos ou Aceleradores de Partículas) envolvem três "momentos":

(I) Duas ou mais partículas iniciais se aproximam da região de espalhamento a partir de distâncias que podem ser consideradas bem grandes se comparadas com a "região de interação". Estas partículas se movem em linhas retas e são livres (no sentido em que não interagem entre si - pode haver um campo externo que guia sua trajetória, mas ele é tratado classicamente e modifica a geodésica seguida pela partícula).

(II) Ocorre um choque/espalhamento praticamente instantâneo e pontual, no sentido quântico: o tamanho da região de interação e o tempo de duração da mesma estão protegidos pelo princípio da incerteza: não temos como determinar com exatidão aonde nem quando ela aconteceu.

(III) Um número  $n$  de partículas deixa a pequena região de interação. Podem ser as mesmas que entraram (no caso de um choque elástico) ou em número e tipo diferente (no caso inelástico). Estas estão novamente livres (no mesmo sentido do momento I) e se movem por uma distância grande antes de chegar aos detectores, onde são medidas (o que é uma nova interação, completamente independente da anterior).

O quadro de interação, por um lado, faz a evolução dos operadores acontecer segundo a Hamiltoniana livre, o que nos permitirá explorar o fato de o sistema é assintoticamente livre no início e no fim do espalhamento. Além disso a parte de interação do Hamiltoniano depende do tempo, o que nos permitirá restringir sua duração.

Uma expressão que deixa bem clara a utilidade do quadro é a 52.1:

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1 - \lambda \epsilon)} \frac{U_I(t_0, -T) |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)}} \langle \Omega | 0 \rangle$$

Vemos que (a menos de um fator de normalização) o vácuo interagente da teoria é criado a partir do vácuo livre pelo operador de evolução no quadro de interação. Este operador é entre um ponto infinito no passado e  $t_0$ , o que só quer dizer um tempo grande se comparado com o tempo de interação.

Ainda falta entender como podemos relacionar as grandezas observáveis (energia, momento, cargas, polarizações) destas partículas incidentes e espalhadas com as funções de  $n$ -pontos, o que faremos (muito) mais adiante. Por enquanto nos contentaremos em obter as funções de dois pontos da teoria, que já vimos servir para determinar os propagadores. Primeiro notemos que:

$$\phi(x) = \phi(t, \vec{x}) = \phi_H(t, \vec{x}) \quad (\text{definimos nossos operadores de campo no quadro de Heisenberg})$$

$$\phi_H(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH(t-t_0)}$$

$$\phi_I(t, \vec{x}) = e^{iH_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)} =$$

$$= \underbrace{e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}}_{U_I(t, t_0)} \phi_H(x) \underbrace{e^{+iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)}}_{U_I^+(t, t_0)} \quad 50.2$$

$$\phi_H(x) = U_I^+(t, t_0) \phi_I(x) U_I(t, t_0) \quad (\text{eq. 53.1})$$

Podemos então escrever a função de dois pontos:

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | U_{\text{I}}(T, t_0) U_{\text{I}}^{\dagger}(x^0, t_0) \phi_{\text{I}}(x) U_{\text{I}}(x^0, t_0) \times$$

$$\times U_{\text{I}}^{\dagger}(y^0, t_0) \phi_{\text{I}}(y) U_{\text{I}}(y^0, t_0) \frac{U_{\text{I}}(t_0, -T) | 0 \rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle} =$$

$$U_{\text{I}}^{\dagger}(t_1, t_2) = e^{-iH_0(t_1-t_2)} e^{iH(t_1, -t_2)} = U_{\text{I}}(t_2, t_1)$$

$$U_{\text{I}}(t_1, t') U_{\text{I}}(t', t_2) = U_{\text{I}}(t_1, t_2)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{1}{e^{-i\lambda E_0 T} |\langle \Omega | 0 \rangle|^2} \langle 0 | U_{\text{I}}(T, x^0) \phi_{\text{I}}(x) U_{\text{I}}(x^0, y^0) \phi_{\text{I}}(y) U_{\text{I}}(y^0, -T) | 0 \rangle$$

(eq. 54.1)

Por outro lado, sabemos que:

$$1 = \langle \Omega | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | U_{\text{I}}(T, t_0) \overbrace{U_{\text{I}}(T, -T)} U_{\text{I}}(t_0, -T) | 0 \rangle}{e^{-i\lambda E_0 T} |\langle \Omega | 0 \rangle|^2}$$

Podemos dividir 54.1 por esta unidade, obtendo:

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | U_{\text{I}}(T, x^0) \phi_{\text{I}}(x) U_{\text{I}}(x^0, y^0) \phi_{\text{I}}(y) U_{\text{I}}(y^0, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | U_{\text{I}}(T, -T) | 0 \rangle}$$

(eq. 54.2)

Note que, para  $x^0 > y^0$ , ambos os lados da equação estão temporalmente ordenados. Poderíamos ter também calculado:

$$\langle \Omega | \phi(y) \phi(x) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | U_{\text{I}}(T, y^0) \phi_{\text{I}}(y) U_{\text{I}}(y^0, x^0) \phi_{\text{I}}(x) U_{\text{I}}(x^0, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | U_{\text{I}}(T, -T) | 0 \rangle}$$

E esta estaria ordenada para  $y^0 > x^0$ . De forma que podemos escrever:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(y) \phi(x) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ U_{\text{I}}(T, y^0) \phi_{\text{I}}(y) U_{\text{I}}(y^0, x^0) \phi_{\text{I}}(x) U_{\text{I}}(x^0, -T) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | U_{\text{I}}(T, -T) | 0 \rangle}$$

dentro do produto T podemos comutar a vontade

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_{\text{I}}(y) \phi_{\text{I}}(x) U_{\text{I}}(T, -T) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | U_{\text{I}}(T, -T) | 0 \rangle}$$

$$\langle \Omega | T \{ \phi(y) \phi(x) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_{\text{I}}(y) \phi_{\text{I}}(x) \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{I}}(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{I}}(t)] \} | 0 \rangle}$$

Esta expressão é trivialmente generalizada para um número arbitrário de operadores:

$$\langle \Omega | T \{ \mathcal{O}_H(x_1) \dots \mathcal{O}_H(x_n) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \mathcal{O}_I(x_1) \dots \mathcal{O}_I(x_n) \text{Exp} \left[ -i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \text{Exp} \left[ -i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right] \} | 0 \rangle}$$

(eq. 55.1)

**Teorema de Wick**

Na prática, obter  $\langle \Omega | T \{ \mathcal{O}_H(x_1) \dots \mathcal{O}_H(x_n) \} | \Omega \rangle$  envolve calcular:

$$\langle 0 | T \{ \mathcal{O}_I(x_1) \dots \mathcal{O}_I(x_n) \left( \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right)^m \} | 0 \rangle$$

→ pode parecer que teremos que calcular infinitos elementos deste tipo, para todos n's. Isto é verdade para o resultado exato. Mas veremos que, em teoria de perturbação, poderemos truncar a expansão da exponencial

Como tanto os operadores  $\mathcal{O}_I(x)$  quanto o Hamiltoniano de interação são produtos de campos, este problema se reduz a calcular elementos de matriz do tipo:

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) \} | 0 \rangle$$

Para isto faremos a divisão do operador de campo:

$$\phi_I = \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_I^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}} e^{i p x} \\ \phi_I^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i p x} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} x^0 = t - t_0 \\ p^0 = E_p \\ x^0 = t - t_0 \\ p^0 = E_p \end{array} \right.$$

(eq. 55.2)

pg 53

$$\phi_I(x) = e^{i H_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-i H_0(t-t_0)}$$

$\phi(t_0, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\vec{p}} e^{i p \vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i p \vec{x}})$

$e^{i H_0(t-t_0)} \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i H_0(t-t_0)} = \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i E_p(t-t_0)}$   
 $e^{i H_0(t-t_0)} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i H_0(t-t_0)} = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{+i E_p(t-t_0)}$

De forma que:

$$\phi_I^+ | 0 \rangle = 0 = \langle 0 | \phi_I^-$$

(eq. 55.3)

Definiremos também uma nova notação para o produto normal:  $:\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n: \equiv N[\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n]$

Imagine que  $x^0 > y^0$

$$T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \} = \phi_I^+(x) \phi_I^+(y) + \phi_I^-(x) \phi_I^-(y) + \phi_I^+(x) \phi_I^-(y) + \phi_I^-(x) \phi_I^+(y) =$$

$$= \underbrace{\phi_{\mathbb{I}}^+(x)\phi_{\mathbb{I}}^+(y) + \phi_{\mathbb{I}}^-(x)\phi_{\mathbb{I}}^-(y)}_{\text{estão normal. ordenados}} + [\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] + \underbrace{\phi_{\mathbb{I}}^-(y)\phi_{\mathbb{I}}^+(x) + \phi_{\mathbb{I}}^-(x)\phi_{\mathbb{I}}^+(y)}_{\text{estão normal. ordenados}} =$$

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)] + [\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] \quad x^0 > y^0 \quad (\text{eq. 56.1})$$

Poderia ter feito o mesmo para  $y^0 > x^0$  e obteríamos:

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)] + [\phi_{\mathbb{I}}^+(y), \phi_{\mathbb{I}}^-(x)] \quad y^0 > x^0 \quad (\text{eq. 56.2})$$

SIMÉTRICO

Definimos a **contração**:

$$\overbrace{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)} \equiv \begin{cases} [\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] & x^0 > y^0 \\ [\phi_{\mathbb{I}}^+(y), \phi_{\mathbb{I}}^-(x)] & y^0 > x^0 \end{cases} \quad (\text{eq. 56.3})$$

Notem que como o comutador é um número, podemos fazer:

$$[\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] \langle 0|0 \rangle = \langle 0| \phi_{\mathbb{I}}^+ \phi_{\mathbb{I}}^- - \phi_{\mathbb{I}}^- \phi_{\mathbb{I}}^+ |0 \rangle = \langle 0| \phi_{\mathbb{I}}^+ \phi_{\mathbb{I}}^- |0 \rangle = D(x-y)$$

$$[\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] = D(y-x)$$

Isso quer dizer que (pg 47):

$$\overbrace{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)} = D_F(x-y) \quad (\text{eq. 56.4})$$

Pelo mesmo motivo posso incluí-lo no ordenamento normal:

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y) + \overbrace{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)}] \quad (\text{eq. 56.5})$$

A generalização desta relação para um número  $m$  de campos é chamada de **Teorema de Wick** e é dada por:

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x_1) \dots \phi_{\mathbb{I}}(x_m)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x_1) \dots \phi_{\mathbb{I}}(x_m) + \text{todas as contrações possíveis}]$$

Veja que "todas contrações possíveis" inclui contrações parciais:

$$T\{\underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4}_{\phi_{\pm}(x_i)}\} = + \dots + \underbrace{N[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4]}_{\mathcal{D}_F(x_1 - x_3) N[\phi_2 \phi_4]} + \dots + \underbrace{N[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4]}_{\mathcal{D}_F(x_1 - x_3) \mathcal{D}_F(x_2 - x_4)}$$

Em que o teorema de Wick nos ajuda? Note que o que queremos calcular é:

$$\langle 0 | T\{\phi_1 \dots \phi_n\} | 0 \rangle = \langle 0 | N[\phi_1 \dots \phi_n + \text{CONTRAÇÕES}] | 0 \rangle$$

Neste caso, qualquer produto normal que sobre depois da aplicação do teorema dá zero. Ex:

$$\langle 0 | N[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4] | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | \mathcal{D}_F(x_1 - x_3) N[\phi_2 \phi_4] | 0 \rangle = \mathcal{D}_F(x_1 - x_3) \langle 0 | N[\phi_2 \phi_4] | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | 0 \rangle \mathcal{D}_F(x_1 - x_3) \mathcal{D}_F(x_2 - x_4) \neq 0$$

$$\langle 0 | T\{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4\} | 0 \rangle = \mathcal{D}_F(x_1 - x_2) \mathcal{D}_F(x_3 - x_4) + \mathcal{D}_F(x_1 - x_3) \mathcal{D}_F(x_2 - x_4) + \mathcal{D}_F(x_1 - x_4) \mathcal{D}_F(x_2 - x_3)$$

A prova do teorema de Wick é feita por indução. Nós provamos o caso com dois campos, é possível provar o para 3 campos usando o de 2 campos, e então o passo n sabendo que o n-1 vale. Isto está na lista de exercícios.

## Regras de Feynman para $\lambda\phi^4$

(Nastase 6; Peskin 4.4)

Voltemos agora para a eq. 55.1:

$$\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{1}{N} \langle 0 | T\{\phi_{\pm}(x_1) \dots \phi_{\pm}(x_n) \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t)]\} | 0 \rangle$$

E vamos assumir que  $\langle H_1 \rangle$  é (em todos os sentidos) pequeno.

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \hat{H}_1 = \lambda \hat{\mathcal{O}}(\phi) \quad \Rightarrow \quad \langle \hat{H}_1 \rangle &= \lambda \langle \hat{\mathcal{O}}(\phi) \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \hat{H}_1^2 \rangle \ll \langle \hat{H}_1 \rangle \ll \langle \hat{1} \rangle \\ \hookrightarrow \lambda \sim 0 \quad \langle \hat{H}_1^2 \rangle &= \lambda^2 \langle \hat{\mathcal{O}}(\phi)^2 \rangle \quad \langle \phi_1 \dots \phi_n \hat{H}_1^2 \rangle \ll \langle \phi_1 \dots \phi_n \hat{H}_1 \rangle \ll \langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle \end{aligned}$$

Neste caso podemos calcular o produto temporalmente ordenado em uma **aproximação perturbativa**, expandindo as exponenciais em  $H_1$ , e tomando tantos termos quantos necessários (dependendo da precisão necessária):

$$\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left\{ \frac{1}{N} \langle 0 | T\{\phi_{\pm}(x_1) \dots \phi_{\pm}(x_n)\} | 0 \rangle + \dots \right\}$$

$$+ \langle 0 | T \{ \underbrace{\phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n)}_{\mathcal{O}(\lambda)} \underbrace{\left( -i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right)}_{\text{"inserções de HI"}} | 0 \rangle + \langle 0 | T \{ \underbrace{\phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} \underbrace{\left( -i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right)^2}_{\text{"inserções de HI"}} | 0 \rangle + \dots$$

Analisando o produto de quatro campos:  $\langle \Omega | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | \Omega \rangle$

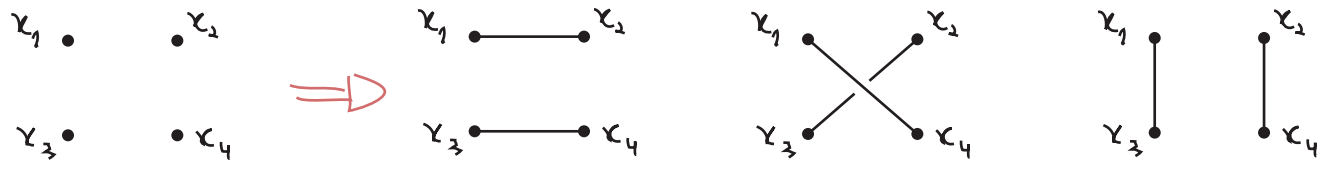
$$\phi_i = \phi_I(x_i)$$

temos em ordem 0 de perturbação (que de fato é a teoria livre):

$\mathcal{O}(\lambda^0)$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | 0 \rangle = \underbrace{D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4)}_{\text{Wick}} + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3) + \dots$$

Este tipo de lógica combinatória imposta pelo teorema de Wick pode ser enormemente agilizada e sistematizada usando um recurso gráfico que ganhou o nome de **Diagramas de Feynman**. No caso simples acima (onde o ganho de usar grafos não é evidente, mas avançaremos rapidamente para casos mais complicados, onde o ganho é enorme), temos quatro pontos no espaço-tempo e os conectamos de todas as formas possíveis:



$$\boxed{x_1 \text{ --- } x_2} \equiv D_F(x_1 - x_2) \quad \text{Propagador} \quad (\text{eq. 58.1})$$

Lembrando também que podemos interpretar  $\phi(x_1)|0\rangle$  como a criação de uma partícula em  $x_1$  e  $\langle 0|\phi(x_2)$  como a aniquilação de uma partícula em  $x_2$ , e que o propagador de Feynman dá conta de todas as possibilidades de ordenamentos temporais, é comum "ler" o diagrama do propagador com esta imagem física em mente: a partícula foi criada em  $x_1$  ( $x_2$ ) e aniquilada em  $x_2$  ( $x_1$ ) (ela não é perfeita, no entanto, como veremos mais adiante).

Considere agora o produto de dois campos:  $\langle \Omega | T \{ \phi_1 \phi_2 \} | \Omega \rangle$

o primeiro termo é trivial:

$\mathcal{O}(\lambda^0)$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \} | 0 \rangle = x_1 \text{ --- } x_2$$

e o segundo (primeira correção perturbativa) é dado por:

$\mathcal{O}(\lambda^1)$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \left( -i \int dt H_{\text{int}}(t) \right) \} | 0 \rangle$$

$$H_{\text{int}}(t) = \int d^3x \mathcal{H}_{\text{int}}(x)$$

Tomemos uma interação específica, conhecida com **Teoria  $\lambda\phi^4$** :  $\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{4!} \phi^4$