

$$+ \langle 0 | T \{ \underbrace{\phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n)}_{\mathcal{O}(\lambda)} \underbrace{\left(-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right)}_{\text{"inserções de HI"}} | 0 \rangle + \langle 0 | T \{ \underbrace{\phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} \underbrace{\left(-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right)^2}_{\text{"inserções de HI"}} | 0 \rangle + \dots$$

Analisando o produto de quatro campos: $\langle \Omega | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | \Omega \rangle$

$$\phi_i = \phi_I(x_i)$$

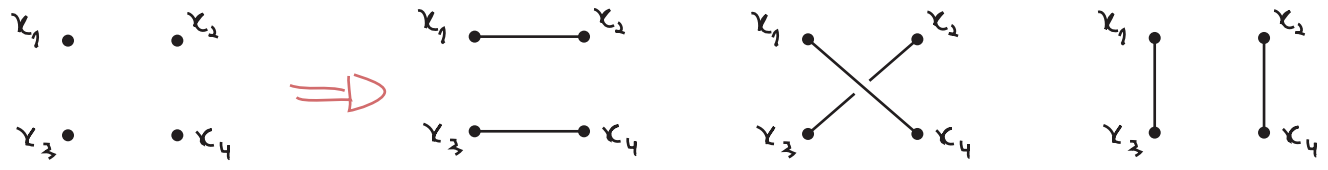
temos em ordem 0 de perturbação (que de fato é a teoria livre):

$\mathcal{O}(\lambda^0)$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | 0 \rangle = D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3) + \dots$$

Wick

Este tipo de lógica combinatória imposta pelo teorema de Wick pode ser enormemente agilizada e sistematizada usando um recurso gráfico que ganhou o nome de **Diagramas de Feynman**. No caso simples acima (onde o ganho de usar grafos não é evidente, mas avançaremos rapidamente para casos mais complicados, onde o ganho é enorme), temos quatro pontos no espaço-tempo e os conectamos de todas as formas possíveis:



$$\boxed{x_1 \text{ --- } x_2} \equiv D_F(x_1 - x_2) \quad \text{Propagador} \quad (\text{eq. 58.1})$$

Lembrando também que podemos interpretar $\phi(x_1)|0\rangle$ como a criação de uma partícula em x_1 e $\langle 0|\phi(x_2)$ como a aniquilação de uma partícula em x_2 , e que o propagador de Feynman dá conta de todas as possibilidades de ordenamentos temporais, é comum "ler" o diagrama do propagador com esta imagem física em mente: a partícula foi criada em x_1 (x_2) e aniquilada em x_2 (x_1) (ela não é perfeita, no entanto, como veremos mais adiante).

Considere agora o produto de dois campos: $\langle \Omega | T \{ \phi_1 \phi_2 \} | \Omega \rangle$

o primeiro termo é trivial:

$\mathcal{O}(\lambda^0)$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \} | 0 \rangle = x_1 \text{ --- } x_2$$

e o segundo (primeira correção perturbativa) é dado por:

$\mathcal{O}(\lambda^1)$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \left(-i \int dt H_{\text{int}}(t) \right) \} | 0 \rangle$$

$$H_{\text{int}}(t) = \int d^3x \mathcal{H}_{\text{int}}(x)$$

Tomemos uma interação específica, conhecida com **Teoria $\lambda\phi^4$** : $\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{4!} \phi^4$


$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \frac{m^2 \phi^2}{2} - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \iff \mathcal{L} = \mathcal{L}(\chi)$$


$$\int dt H_{I, \mathbb{R}} = \int dt \int d^3 z \mathcal{H}_{I, \mathbb{R}}(z) = \int d^4 z \frac{\lambda}{4!} \phi_{\mathbb{R}}(z) \phi_{\mathbb{R}}(z) \phi_{\mathbb{R}}(z) \phi_{\mathbb{R}}(z) \leftarrow \text{todos no mesmo ponto}$$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 (-i \int dt H_{I, \mathbb{R}}(t)) \} | 0 \rangle = -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4 z \langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \} | 0 \rangle$$

Temos que fazer todas as contrações possíveis destes 6 campos, e dividimos isto em dois casos:

- (1) contraímos $\phi(x_1)$ com $\phi(x_2)$ e os $\phi(z)$ só entre si.
- (2) contraímos $\phi(x_1)$ com um dos $\phi(z)$ e $\phi(x_2)$ com outro (os dois $\phi(z)$ que restam são contraídos entre si).

(1) \Rightarrow  $\Rightarrow 3 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4 z D_F(z - z) D_F(z - z)$
 as 3 formas de contrair os $\phi(z)$ dão o mesmo resultado (mas eu devo somar sobre elas)

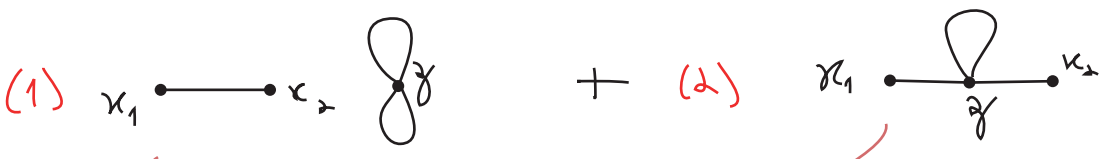
(2) \Rightarrow  \Rightarrow quatro formas de contrair $\phi(x_1)$, e uma vez feito isto, temos três formas de contrair $\phi(x_2)$ e nenhuma ambiguidade nos $\phi(z)$ que restam

$$\therefore 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4 z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z)$$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 (-i \int dt H_{I, \mathbb{R}}(t)) \} | 0 \rangle = 3 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4 z D_F(z - z) D_F(z - z) + 12 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4 z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z) \quad (\text{eq. 59.1})$$

A versão diagramática seria:

$x_1 \cdot \cdot \cdot z \cdot \cdot \cdot x_2 \Rightarrow$ lembrando que temos 4 campos em z logo 4 linhas devem sair/entrar ali



$\leftarrow 3 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4 z D_F(z - z) D_F(z - z)$ \leftarrow a resposta não é função de z
 $\leftarrow 12 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4 z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z)$
 \leftarrow como advinho estes fatores!?

Vejam os um caso mais complicado:

$\mathcal{O}(x)$

$$\langle 0 | T \left\{ \phi_x \phi_y \frac{1}{3!} \left(-i \frac{\Delta}{4!} \right)^3 \int d^4z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \int d^4w \phi_w \phi_w \phi_w \phi_w \int d^4u \phi_u \phi_u \phi_u \phi_u \right\} | 0 \rangle \quad (\text{eq. 60.1})$$

expansão da exponencial

para esta contração

$$= \frac{1}{3!} \left(-i \frac{\Delta}{4!} \right)^3 \int d^4z \int d^4w \int d^4u D_F(x-z) D_F(y-w) D_F(z-w) D_F(z-w) D_F^2(w-u) D_F(u-u)$$

(eq. 60.2)

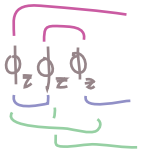
Vamos tentar identificar quantas contrações diferentes poderiam ter levado à mesma expressão 60.2.

Nome dos vértices: 3!

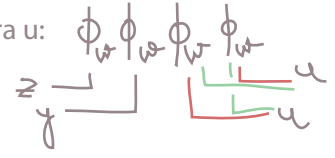
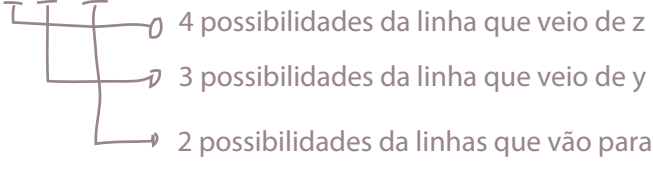
(z, w e u são variáveis mudas. Pense na expressão 60.1: eu poderia ter trocado a ordem de z, w e u sem mudar a posição dos "contratores" e há 3! ordenamentos para w, z e u - zwu, zuw, uzw, uwz, wzu)

Contrações no vértice z: 4.3

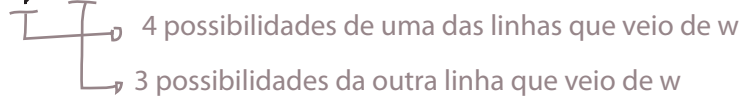
(temos 4 formas de conectar a linha que vem de x. Uma vez feito isto temos três forma de conectar os z's entre si. A linha que sobra vai para w)



Contrações no vértice w: 4.3.2

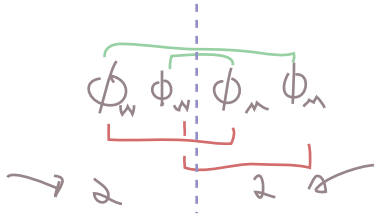


Contrações no vértice u: 4.3



(os dois campos que sobram só tem uma possibilidade)

Dupla contagem w vs. u: 1/2



dupla contagem (acontece sempre que ligo pontos internos com mais de uma linha)

$$3! (4 \cdot 3) (4 \cdot 3 \cdot 2) (4 \cdot 3) \frac{1}{2} = \frac{3! (4!)^3}{8} =$$

De forma que temos 10368 contrações diferentes que levam à mesma expressão 60.2. Note no entanto que este número praticamente cancela o coeficiente presente em 60.2:

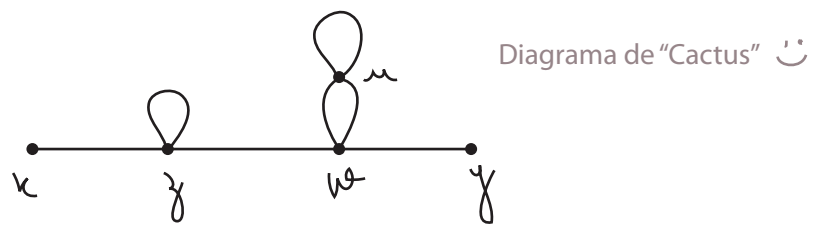
$$\left(\text{Soma sobre todas as contrações} \right) = -\frac{i\lambda}{8} \int d^4z \int d^4w \int d^4\mu D_F(x-z) D_F(y-w) D_F(z-z) D_F(z-w) D_F^2(w-\mu) D_F(\mu-\mu)$$

Este cancelamento não é tão impressionante se pensarmos a respeito:

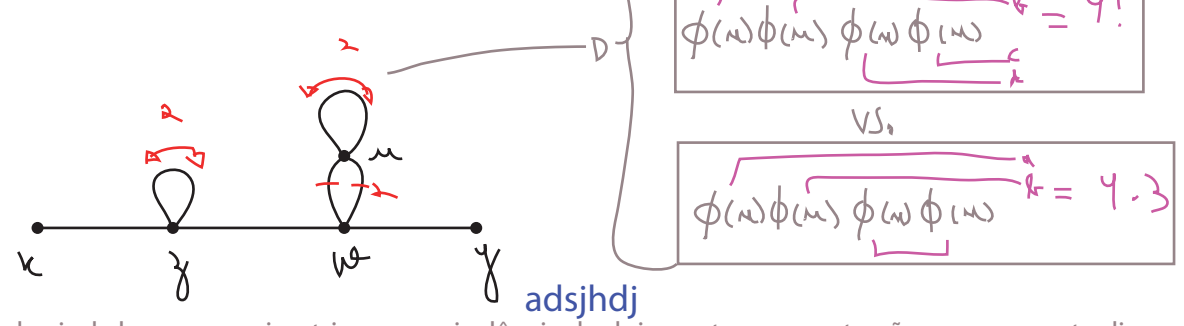
- (1) o fator 3! que vem da troca dos nomes dos pontos internos vai em geral cancelar com o 3! da série de Taylor da exponencial
- (2) cada um destes pontos internos tem 4 linhas saindo, e isso (inocentemente) nos dá um 4! para cada ponto interno, que cancela o 1/4! que está no Hamiltoniano de interação (de fato é por isso que definimos o Hamiltoniano com este 4!).

O ponto (2) acima não é totalmente verdade, **por conta das duplas contagens** e é isso que faz o cancelamento não ser exato e produz aquele "8" que sobrou no final. Isso quer dizer que simplesmente ignorando o 3! da série e os 4! do Hamiltoniano faremos uma sobrecontagem - que devemos dividir por um fator que dê conta das duplas contagens. Este fator que sobra é chamado de **Fator de Simetria** do diagrama e é nele que estamos interessados.

Como vemos este fator direto do diagrama? Baseado nos propagadores podemos desenhar:



E o fator de simetria vem de:



(pode ainda haver uma simetria por equivalência de dois pontos, mas esta não aparece neste diagrama)

$S = 2 \times 2 \times 2 = 8$

Fator de Simetria

Voltando aos fatores da expressão 59.1:

$S = 8 \Rightarrow$

$$-\frac{i\lambda}{8} D_F(x-y) \int d^4z D_F(z-z) D_F(z-z)$$

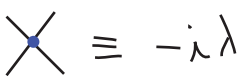
$S = 2 \Rightarrow$

$$-\frac{i\lambda}{2} D_F(x-y) \int d^4z D_F(z-z) D_F(z-z)$$

e isto aqui? $\rightarrow e^{-i\int \frac{\lambda}{4} \phi^4} = \frac{-i\lambda}{4!} \phi^4$

para cada ponto interno terei um fator deste


O fator que resta vem de estabelecer uma regra para o **vértice** da teoria:


 $\equiv -i\lambda$

Vértice
(eq. 62.1)

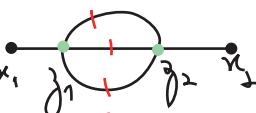
(note que o vértice é este ponto de onde saem 4 linhas, as linhas em si tem regras próprias dadas por 58.1)

E como este vértice é um ponto "interno" do diagrama, ele também contribui com uma integral em z . Para cada vértice no diagrama vai entrar um fator $(-i\lambda)$ e farei uma integral. Com isso, temos um conjunto de regras **para esta teoria** (campo escalar real com interação ϕ^4) que nos permite transformar um diagrama qualquer e um expressão analítica:

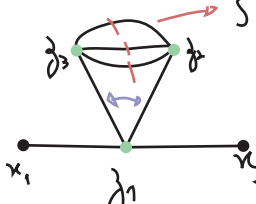
- (1) para cada propagador: $x_1 \text{ --- } x_2 = D_F(x_1 - x_2)$
- (2) para cada vértice:  $= (-i\lambda) \int d^4z$
- (3) para cada ponto externo: $x_1 \text{ --- } = 1$ (isto é trivial aqui, mas não será assim na versão final das regras)
- (4) divida tudo pelo fator de simetria

Regras (provisórias) de Feynman de $\lambda\phi^4$ no espaço das posições (eq. 62.2)

Mais alguns exemplos:


 $= \frac{(-i\lambda)^2}{3!} \int d^4z_1 \int d^4z_2 D_F(x_1 - z_1) D_F(x_2 - z_2) D_F^3(z_1 - z_2)$

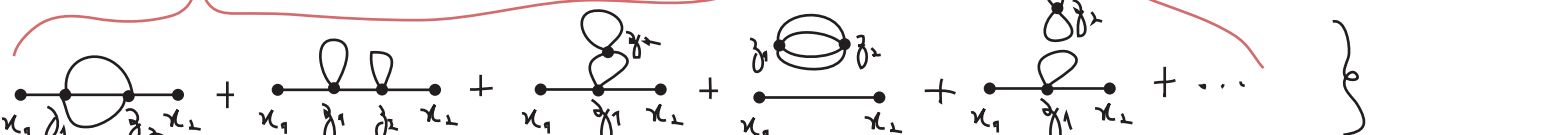
↳ 3! trocas de linhas


 $= \frac{(-i\lambda)^3}{3! \cdot 2} \int d^4z_1 d^4z_2 d^4z_3 D_F(x_1 - z_1) D_F(x_2 - z_2) D_F(z_1 - z_2) D_F(z_2 - z_3) D_F^3(z_3 - z_1)$

↳ $S = 3! \cdot 2$

Notando finalmente que para calcular um dado elemento de matriz, temos que somar sobre todos os diagramas possíveis até um certa ordem perturbativa:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - i\epsilon)} \frac{1}{N} \left\{ \underbrace{\text{---}}_{\mathcal{O}(\lambda^0)} + \underbrace{\text{---} \text{---}}_{\mathcal{O}(\lambda)} + \underbrace{\text{---} \text{---} \text{---}}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \dots \right\}$$



Veremos que em geral estamos interessados em calcular estes elementos no espaço dos momentos, não da posição, então é bem útil escrever as regras de Feynman também para os momentos. Note que:

eq. 46.1 $\Rightarrow D_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \underbrace{\frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon}}_{D_F(p)} e^{i p \cdot (y-x)}$

note que podia ser $(x-y)$ pois o sinal de p é arbitrário, a escolha é feita por consistência com as linhas externas (veja no fim da pg 64)

Note que:

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | 0 \rangle = \langle 0 | \phi_3 \phi_4 \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle + \dots$$

outros ordenamentos temp.

$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon p_3}} a_{\vec{p}_3}^\dagger e^{-i p_3 x_3}$

De forma que cada elemento no espaço das posições contém uma infinidade de possibilidades no espaço dos momentos

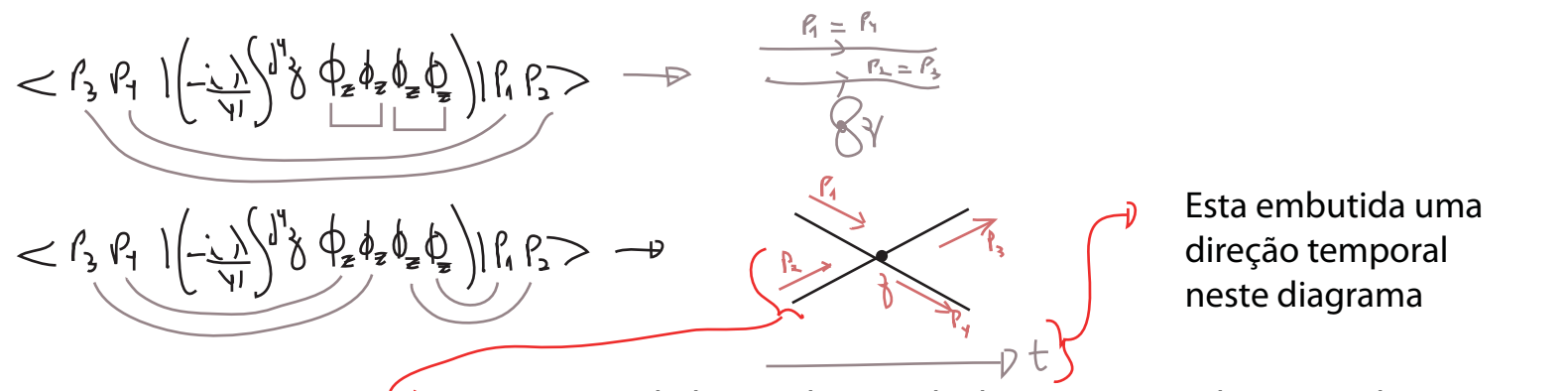
$$\langle 0 | \phi_3 \phi_4 \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle \sim \int d^4 p_1 \int d^4 p_2 \int d^4 p_3 \int d^4 p_4 \langle p_3 p_4 | p_1 p_2 \rangle$$

queremos regras para estes (com escolha específica de $p_1 \dots p_4$)

No caso de uma inserção da interação temos:

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \right) \} | 0 \rangle \sim \dots + \int \langle p_3 p_4 | \left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \right) | p_1 p_2 \rangle$$

de novo há várias possibilidades do que pode ocorrer:



Note que esta linha até de z , vinda de um ponto indeterminado, porque passamos da representação em x_2 para uma em p_2 . Chamamos isto de **linha externa**.

$\phi^+ \phi^+ \phi^+ \phi^- = 0$
assim todos com número diferente de criações e aniquilações

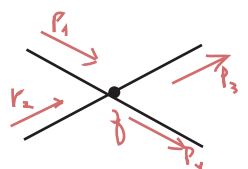
Suponha que estejamos interessados em:

eq. 55.2 \leftarrow

Então: $\langle p_3 p_4 | (\phi_z^+ + \phi_z^-) (\phi_z^+ + \phi_z^-) (\phi_z^+ + \phi_z^-) (\phi_z^+ + \phi_z^-) | p_1 p_2 \rangle$

4! formas de fazer isto

aniqu. / cria



$$\begin{aligned} \phi_z^+ |P_1\rangle &= \int \frac{d^3 P_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{P_2}}} \underbrace{a_{P_2} e^{+iP_2 z}}_{\text{comut.}} \sqrt{2E_{P_1}} a_{P_1}^+ |0\rangle = \\ &= \int \frac{d^3 P_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{P_2}}} e^{+iP_2 z} \sqrt{2E_{P_1}} (2\pi)^3 \delta(P_2 - P_1) |0\rangle = \underbrace{e^{+iP_1 z}}_{\sim e^{-1E_{P_1}(z^0 - z_1^0)}} |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{eq. 64.1})$$

Da mesma forma:

$$\langle P_3 | \phi_z = \langle 0 | e^{-iP_3 z} \quad (\text{eq. 64.2})$$

(partícula indo para um tempo posterior a z^0)

(partícula vinda de um tempo anterior a z^0)

O que nos mostra que cada linha externa contrinuirá com:



Ainda resta a integral em z:

$$= \frac{(-i\lambda)}{4!} \int d^4 z e^{+ip_1 z} e^{+ip_2 z} e^{-ip_3 z} e^{-ip_4 z} =$$

4! formas de fazer isto

$$= \frac{(-i\lambda)}{4!} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

contribuição do vértice \swarrow (a integração na posição do vértice garantiu conservação de momento no mesmo)

No caso de um diagrama mais complicado:

$$= \langle P_3 P_4 | \underbrace{\left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z_1 \phi_{z_1} \phi_{z_1} \phi_{z_1} \phi_{z_1} \right)}_{4.3} \underbrace{\left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z_2 \phi_{z_2} \phi_{z_2} \phi_{z_2} \phi_{z_2} \right)}_2 \underbrace{| P_1 P_2 \rangle}_{4.3} =$$

escolho o sinal de k para manter a direção de momento igual a das linhas externas: $Exp[ik_1 z_2]$ para momento entrando em z_2 e $Exp[-ik_2 z_1]$ para momento saindo de z_1 .

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} D_F(k_1) D_F(k_2) e^{i k_1^0 (\delta_1 - \delta_2)} e^{i k_2^0 (\delta_2 - \delta_1)} e^{+i P_1 z_1} e^{+i P_2 z_1} e^{-i P_3 z_2} e^{-i P_4 z_2}$$

fator de simetria \swarrow propagadores \swarrow linhas externas \swarrow vértice

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \underbrace{d^4 k_1}_{k_1 = k} \underbrace{d^4 k_2}_{P_1 + P_2 = q} \delta^4(+P_1 + P_2 - k_1 - k_2) \delta^4(+k_1 + k_2 - P_3 - P_4) D_F(k_1) D_F(k_2)$$

\swarrow $\delta^4(-k_2 + (q - k))$